实变函数

作者：Sirius.

四川大学计算机学院

目录

第一章 Lebesgue 测度 **1**
1.1 外测度 1
1.2 可测集与测度 2
1.3 外测度与 Borel 集的关系 3
1.4 正测度集和与矩体的关系 4
1.5 不可测集 4
1.6 连续映射与可测集 4

第二章 可测函数 **6**
2.1 可测函数的定义及其性质 6
2.2 可测函数列的收敛 9
2.3 可测函数与连续函数的关系 11

第三章 Lebesgue 积分 **13**
3.1 非负可测函数的积分 13
3.2 一般可测函数的积分 16
3.3 可积函数与连续函数的性质 18
3.4 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系 19
3.5 重积分与累次积分的关系 20

第四章 微分与不定积分 **22**
4.1 单调函数的可微性 22
4.2 有界变差函数 23
4.3 不定积分的微分 24
4.4 绝对连续函数与微积分基本定理 25
4.5 分步积分公式与积分中值公式 26

第一章　Lebesgue 测度

1.1　外测度

Def

定义 1.1.1 (开矩体覆盖). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，若存在一列开矩体 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ s.t.

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

则称 $\{I_k\}$ 为 E 的一个开矩体覆盖。

Def

定义 1.1.2 (外测度). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，定义 E 的外测度为

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : \{I_k\}\text{为}E\text{的一个开矩体覆盖}\right\},$$

其中 $|I_k|$ 表示开矩体 I_k 的体积。

推论 1.1.1. $\mathbb{R}^n$ 中单点集的外测度为零。

推论 1.1.2. $m^*(\bar{I}) = |I|$，其中 I 为任意开矩体。

定理 1.1.1 (外测度性质). 外测度有三大性质。

1. *(非负性)* $m^*(E) >= 0, m^*(\emptyset) = 0$
2. *(单调性)* 若 $E_1 \subset E_2$，则 $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$
3. *(次可加性)* $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$

推论 1.1.3. 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可数点集，则 $m^*(E) = 0$。$m^*(\mathcal{Q}) = 0$

例题 1.1.1. $[0,1]$ 中的 Cantor 集 C 的外测度为 0。

注释. 这意味着可数点集的外测度为 0，但是外测度为 0 的集合不一定可数。

引理 1.1.1 (外测度的扩展). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $\delta > 0$，令

$$m_\delta^* = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset E \text{且每个} I_k \text{的边长} < \delta\right\}$$

则 $m_\delta^*(E) = m^*(E)$.

定理 1.1.2 (距离外测度性质). 设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ 且 $d(E_1, E_2) > 0$，则

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

例题 1.1.2. 设 $E \subset [a,b], m^*(E) > 0, 0 < c < m^*(E)$，则存在 E 的子集 A，使得 $m^*(A) = c$.

定理 1.1.3 (外测度的平移不变性). 设 $E \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^n$，则

$$m^*(E + \{x_0\}) = m^*(E).$$

定理 1.1.4 (外测度的伸缩性). 设 $E \subset \mathbb{R}^n, \lambda > 0$，则

$$m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E).$$

1.2 可测集与测度

Def

定义 1.2.1 (可测集). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，若对任意集合 $T \subset \mathbb{R}^n$，都有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称 E 为可测集，可测集类记为 $\mathcal{M}$。

推论 1.2.1 (零测集为可测集). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，若 $m^*(E) = 0$，则 $E \in \mathcal{M}$。

定理 1.2.1 (可测集的性质). 可测集有以下性质，其中 *1,2,3* 说明 $\mathcal{M}$ 构成一个 $\sigma - algebra$。

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$.
2. 若 $E \in \mathcal{M}$，则 $E^c \in \mathcal{M}$。
3. 若 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$。
4. (可数次可加性) 若 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ 且互不相交，则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

Def

定义 1.2.2 (测度). 设 $E \in \mathcal{M}$，定义 E 的测度为

$$m(E) = m^*(E).$$

定理 1.2.2 (递增可测集列的测度极限). 设 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ 且 $E_i \subset E_{i+1}$，则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(E_i).$$

推论 1.2.2 (递减可测集列的测度极限). 设 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ 且 $E_i \supset E_{i+1}$，若 $m(E_1) < \infty$，则

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(E_i).$$

例题 1.2.1 (测度级数收敛，上限集测度为 0). 设 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$，且

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) < \infty,$$

则

$$m\left(\limsup_{i\to\infty} E_i\right) = 0.$$

推论 1.2.3 (测度论中可测集的 Fatou 引理). 设 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$，则

$$m\left(\liminf_{i\to\infty} E_i\right) \le \liminf_{i\to\infty} m(E_i).$$

1.3 外测度与 Borel 集的关系

引理 1.3.1 (Caratheodory 引理). 设 $G \neq \mathbb{R}^n$ 为开集，$E \subset G$，令 $E_k = \{x \in E : d(x, G^c) \ge 1/k\}(k = 1, 2, \cdots)$, 则 $m^*(E_k) \nearrow m^*(E)$。

定理 1.3.1 (非空闭集 F 是可测集). 设 $F \neq \emptyset$ 为闭集，则 $F \in \mathcal{M}$。

推论 1.3.1 (Borel 集是可测集). *Borel* 集全包含于可测集类，即 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}$。

定理 1.3.2 (可测集可用开集外逼近，闭集内逼近). 设 $E \in \mathcal{M}$，则对任意 $\epsilon > 0$，存在开集 $G \supset E$ 及闭集 $F \subset E$，使得

$$m(G \setminus E) < \epsilon, \quad m(E \setminus F) < \epsilon.$$

定理 1.3.3 (可测集与 Gδ 集，Fσ 集的关系). 设 $E \in \mathcal{M}$，则存在 G_δ 集 $G \supset E$ 及 F_σ 集 $F \subset E$，使得

$$m(G \setminus E) = 0, \quad m(E \setminus F) = 0.$$

定理 1.3.4 (外测度的正则性). 若 $E \subset \mathbb{R}^n$，则存在 G_δ 集 $G \supset E$，使得

$$m^*(E) = m(G).$$

此时也称 G 为 E 的等测包。

推论 1.3.2 (外测度的 Fatou 引理). 设 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$，则

$$m^*\left(\liminf_{i\to\infty} E_i\right) \le \liminf_{i\to\infty} m^*(E_i).$$

推论 1.3.3 (递增集合列的外测度极限). 设 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ 且 $E_i \subset E_{i+1}$，则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} m^*(E_i).$$

定理 1.3.5 (测度的平移不变性). 设 $E \in \mathcal{M}, x_0 \in \mathbb{R}^n$，则 $E + \{x_0\} \in \mathcal{M}$ 且

$$m(E + \{x_0\}) = m(E).$$

1.4 正测度集和与矩体的关系

定理 1.4.1 (矩体套住正测度集差异可任意小但不一定能为 0). 设 $E \in \mathcal{M}$ 且 $m(E) > 0$，$0 < \lambda < 1$ 则存在矩体 I 使得

$$\lambda|I| < m(E \cap I).$$

定理 1.4.2 (steinhaus 定理). 设 $E \in \mathcal{M}$ 且 $m(E) > 0$，则 $E - E$ 含有某个以原点为中心的开邻域。

1.5 不可测集

定理 1.5.1 (不可测集存在). 设 $\mathbb{R}$ 上定义等价关系 $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$，则存在不可测集 $E \subset [0,1]$，使得 E 在该等价关系下的每个等价类中恰有一个代表元。

1.6 连续映射与可测集

Def

定义 1.6.1 (连续映射). 设 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，若对任意开集 $G \subset \mathbb{R}^n$，有 $T^{-1}(G)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，则称 T 为连续映射。

定理 1.6.1 (连续映射的等价定义). 映射 T 是连续映射的等价条件是：对任一点 $x \in \mathbb{R}^n$ 及任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $|x - y| < \delta$ 时，有 $|T(x) - T(y)| < \epsilon$。

例题 1.6.1. 线性映射是连续的 (这里只考虑有限维空间中, 如 $\mathbb{R}^n$)。

定理 1.6.2 (连续映射与紧集的关系)**.** 设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为连续映射, 则对任意紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$, 有 $T(K)$ 也是紧集。

推论 1.6.1 (连续映射和 Fσ 集的关系)**.** 设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为连续映射，则对任意 F_σ 集 $F\subset\mathbb{R}^n$，有 $T(F)$ 也是 F_σ 集。

推论 1.6.2 (连续映射与零测集、可测集的关系)**.** 设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为连续映射，则对任意零测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 及可测集 $M\subset\mathbb{R}^n$，有 $T(E)$ 也是零测集，$T(M)$ 也是可测集。

定理 1.6.3 (非奇异线性映射与外测度的关系)**.** 设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为非奇异线性映射，则对任意集合 $E\subset\mathbb{R}^n$，有

$$m^*(T(E))=|\det T|m^*(E).$$

定理 1.6.4 (非奇异线性映射把可测集映为可测集)**.** 设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为非奇异线性映射，则对任意可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$，有 $T(E)\in\mathcal{M}$ 且

$$m(T(E))=|\det T|m(E).$$

第二章　可测函数

2.1　可测函数的定义及其性质

Def

定义 2.1.1 (可测函数). 设 f 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数，若对任意实数 t，有 $\{x \in E : f(x) > t\} \in \mathcal{M}$，则称 f 为可测函数

定理 2.1.1 (实际上，t 可取稠密子集任一元). 设 f 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数，若对某个实数稠密子集 $D \subset \mathbb{R}$，有对任意 $t \in D$，都有 $\{x \in E : f(x) > t\} \in \mathcal{M}$，则 f 为可测函数。

例题 2.1.1 (闭区间上单调函数可测). 设 $f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ 为单调函数，则 f 可测。

Tip

若 f 为闭区间上单调函数，$\{x \in E : f(x) > t\}$ 为区间，单点集，或者空集。

定理 2.1.2 (可测函数的经典可测集合). 设 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数，其中 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$。则对任意 $t \in \overline{\mathbb{R}}$，下列集合均为可测集:

$$\{x \in E : f(x) \geq t\},$$

$$\{x \in E : f(x) > t\},$$

$$\{x \in E : f(x) \leq t\},$$

$$\{x \in E : f(x) < t\},$$

$$\{x \in E : f(x) = t\},$$

$$\{x \in E : f(x) \neq t\}.$$

定理 2.1.3 (可测函数定义域可并可限制)**.** 设 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数，则

1. 若 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，其中 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$，且对任意 i，$f|_{E_i}$ 可测，则 f 可测。
2. 若 $F \subset E, F \in \mathcal{M}$，且 f 可测，则 $f|_F$ 可测。

定理 2.1.4 (可测函数的运算性质 1)**.** 设 $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数，则下列函数均为可测函数：

1. $cf (c \in \mathbb{R})$
2. $f + g$
3. fg(是乘法不是复合)

定理 2.1.5 (可测函数的运算性质 2)**.** 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数列，则下列函数均为可测函数：

1. $\sup\limits_{k} f_k$
2. $\inf\limits_{k} f_k$
3. $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k$
4. $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$

特别地，若极限存在，则极限函数也是可测函数。

例题 2.1.2 (函数正负部分解)**.** 设 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数，则 f 可表示为正负两部分之差：

$$f = f^+ - f^-,$$

其中

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

且 f^+ 和 f^- 均为可测函数。此外，$|f| = f^+ + f^-$ 也是可测函数。

例题 2.1.3 (可测集上连续函数是可测函数)**.** 设 $f : E \to \mathbb{R}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数，则 f 可测。

Def

定义 2.1.2 (命题几乎处处真)**.** 设 $P(x)$ 是关于 $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ 的命题，若存在测度为零的可测集 $N \subset E$，使得对任意 $x \in E \setminus N$，命题 $P(x)$ 成立，则称命题 $P(x)$ 在 E 上几乎处处真，记作 a.e. $x \in E, P(x)$。

定义 2.1.3 (几乎处处相等的可测函数)**.** 设 $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数，若 $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ 为测度为零的可测集，则称 f 与 g 在 E 上几乎处处相等，记作 a.e. $x \in E, f(x) = g(x)$。

定义 2.1.4 (几乎处处有限的可测函数)**.** 设 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数，若 $\{x \in E : |f(x)| = \infty\}$ 为测度为零的可测集，则称 f 在 E 上几乎处处有限。

定理 2.1.6 (可测函数改变零测集上的值仍然可测)**.** *设 $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数，若 a.e. $x \in E, f(x) = g(x)$，则 f 可测当且仅当 g 可测。*

Def

定义 2.1.5 (简单函数)**.** 设 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数，若 f 仅取有限个值，则称 f 为简单函数。

简单函数可以写成如下形式：

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{E_i}(x),$$

其中 $a_i \in \mathbb{R}$，$E_i = \{x \in E : f(x) = a_i\} \in \mathcal{M}$，且 $\chi_{E_i}(x)$ 为 E_i 的指示函数。
显然简单函数乘法和加法后仍然是简单函数，而可测简单函数是指简单函数且其取值对应的集合均为可测集的函数。

定理 2.1.7 (非负可测简单函数渐升列逼近非负可测函数)**.** *设 $f : E \to [0, \infty]$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数，则存在非负可测简单函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得对任意 $x \in E$，有*

$$f_k(x) \nearrow f(x) \quad (k \to \infty).$$

定理 2.1.8 (可测简单函数列逼近可测函数)**.** *设 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数，则存在可测简单函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $|f_k(x)| \leq |f(x)|$，且对任意 $x \in E$，有*

$$f_k(x) \to f(x) \quad (k \to \infty)$$

若 f 在 E 上有界，则上述收敛是一致收敛。

Def

定义 2.1.6 (支集)**.** 设 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数，则 f 的支集定义为

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}.$$

推论 2.1.1 (可测简单函数列逼近可测函数中，简单函数可取具有紧支集)**.** *设 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数，则存在可测简单函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $|f_k(x)| \leq |f(x)|$，每个 f_k 具有紧支集，且对任意 $x \in E$，有*

$$f_k(x) \to f(x) \quad (k \to \infty).$$

2.2　可测函数列的收敛

Def

定义 2.2.1 (几乎处处收敛)**.** 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数列，若存在测度为零的可测集 $N \subset E$，使得对任意 $x \in E \setminus N$，有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x),$$

则称函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上依几乎处处收敛于函数 f，记作 a.e. $x \in E, f_k(x) \to f(x)$。

显然，若函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是在 E 上的可测函数列，则极限函数 f 也是可测函数。也可以证明，若 f_k 在 E 上几乎处处有限，则极限函数 f 也是几乎处处有限的。

引理 2.2.1 (几乎处处收敛蕴含的性质)**.** *设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在有限测度可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的几乎处处有限的可测函数列，若 a.e. $x \in E, f_k(x) \to f(x)$，则对任意 $\epsilon > 0$，有*

$$m\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\}\right) = 0.$$

定理 2.2.1 (Egorov 定理（几乎处处收敛蕴含近一致收敛）)**.** *设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在有限测度可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的几乎处处有限的可测函数列，若 a.e. $x \in E, f_k(x) \to f(x)$，则对任意 $\epsilon > 0$，存在可测集 $F \subset E$，使得*

$$m(E \setminus F) < \epsilon,$$

且 f_k 在 F 上一致收敛于 f。

Def

定义 2.2.2 (依测度收敛). 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的函数列，若对任意 $\epsilon > 0$，有

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0,$$

则称函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上依测度收敛于函数 f，记作 $f_k \xrightarrow{m} f$。

定理 2.2.2 (依测度收敛的极限函数是对等的). 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的函数列，若 $f_k \xrightarrow{m} f$ 且 $f_k \xrightarrow{m} g$，则 *a.e.* $x \in E, f(x) = g(x)$。

定理 2.2.3 (几乎处处收敛蕴含依测度收敛). 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在有限测度可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的函数列，若 *a.e.* $x \in E, f_k(x) \to f(x)$，则 $f_k \xrightarrow{m} f$。

定理 2.2.4 (近一致收敛蕴含依测度收敛). 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的函数列，若对任意 $\epsilon > 0$，存在可测集 $F \subset E$，使得

$$m(E \setminus F) < \epsilon,$$

且 f_k 在 F 上一致收敛于 f，则 $f_k \xrightarrow{m} f$。

定理 2.2.5 (近一致收敛蕴含几乎处处收敛). 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在有限测度可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的函数列，若对任意 $\epsilon > 0$，存在可测集 $F \subset E$，使得

$$m(E \setminus F) < \epsilon,$$

且 f_k 在 F 上一致收敛于 f，则 *a.e.* $x \in E, f_k(x) \to f(x)$。

Def

定义 2.2.3 (依测度 Cauchy 列). 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的函数列，若对任意 $\epsilon, \delta > 0$，存在正整数 N，使得对任意 $m, n > N$，有

$$m(\{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| > \epsilon\}) < \delta,$$

则称函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上为依测度 Cauchy 列。

定理 2.2.6 (依测度 Cauchy 列蕴含依测度收敛（反过来显然真）). 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的函数列，则 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为依测度 *Cauchy* 列的充分必要条件是存在几乎处处有限的函数 f，使得 $f_k \xrightarrow{m} f$。

定理 2.2.7 (Riesz 定理（依测度收敛蕴含有几乎处处收敛的子列）). 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上函数列，若 $f_k \xrightarrow{m} f$，则存在子列 $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$，使得 *a.e.* $x \in E, f_{k_j}(x) \to f(x)$。

注释. 三种收敛有以下关系：

1. 在有限测度可测集时，几乎处处收敛等价于近一致收敛
2. 近一致收敛蕴含依测度收敛
3. 在有限测度可测集时，几乎处处收敛蕴含依测度收敛
4. 依测度收敛蕴含有几乎处处收敛的子列

2.3　可测函数与连续函数的关系

定理 2.3.1 (Lusin 定理)**.** 设 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数，则对任意 $\epsilon > 0$，存在闭集 $F \subset E$，使得

$$m(E \setminus F) < \epsilon,$$

且 $f|_F$ 连续。

推论 2.3.1 (存在连续函数与给定可测函数不等的集合测度任意小)**.** 设 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数，则对任意 $\epsilon > 0$，存在连续函数 $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$，使得

$$m(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon.$$

若 E 是有界集，可使 g 具有紧支集。

定理 2.3.2 (存在连续函数列几乎处处收敛到给定可测函数)**.** 设 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数，则存在连续函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得对 *a.e.* $x \in E$，有

$$f_k(x) \to f(x) \quad (k \to \infty).$$

引理 2.3.1 (可测函数又一充分必要条件：开集原象是可测的)**.** 设 $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数，则 f 可测的充分必要条件是对任意开集 $O \subset \mathbb{R}$，有

$$f^{-1}(O) = \{x \in E : f(x) \in O\} \in \mathcal{M}.$$

推论 2.3.2 (连续函数复合可测函数是可测函数)**.** 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，$g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数，则复合函数 $h(x) = f(g(x))$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数。

定理 2.3.3 (一定条件下，可测函数复合连续函数才是可测的)**.** 设 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续映射，且满足对任意零测集 $N \subset \mathbb{R}^n$，其原像 $T^{-1}(N)$ 亦为零测集。若 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为可测函数，则复合函数

$$(f \circ T)(x) = f(T(x))$$

也是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数。

推论 2.3.3 (可测函数复合非奇异线性变换是可测的)**.** 设 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为非奇异线性变换，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为可测函数，则复合函数

$$(f \circ A)(x) = f(Ax)$$

也是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数。

第三章　Lebesgue 积分

3.1　非负可测函数的积分

Def

定义 3.1.1 (非负可测简单函数的积分). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}(x)$ 为定义在 E 上的非负可测简单函数，其中 $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的可测划分，且 $a_i \geq 0$。定义 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分为

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} a_i m(E \cap A_i),$$

例题 3.1.1 (狄利克雷函数的积分). 设 $E = [0,1] \subset \mathbb{R}$，定义狄利克雷函数为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x)\,dx = 0.$$

定理 3.1.1 (初见积分的线性性质). 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数，E 为可测集，则对任意非负实数 α, β，有

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_E f(x)\,dx + \beta \int_E g(x)\,dx.$$

定理 3.1.2 (初见积分在递增可测集列下的极限). 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的递增可测集列，即 $E_k \subset E_{k+1}$，且 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，则对任意非负可测简单函数 $f(x)$，有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Def

定义 3.1.2 (非负可测函数的积分). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数，则定义

$$\int_E f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_E s(x)\,dx : 0 \leq s(x) \leq f(x), s(x)\text{为非负可测简单函数} \right\}.$$

Def

定义 3.1.3 (可积函数). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数，若

$$\int_E f(x)\,dx < +\infty,$$

则称 $f(x)$ 在 E 上可积。

推论 3.1.1 (非负可测函数的单调性、控制可积性、有界可积性). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x), g(x)$ 为定义在 E 上的非负可测函数。

1. *(单调性)* 若 $f(x) \le g(x)$，则

$$\int_E f(x)\,dx \le \int_E g(x)\,dx.$$

2. *(控制可积性)* 若 $f(x) \le g(x)$ 且 $g(x)$ 在 E 上可积，则 $f(x)$ 在 E 上也可积。

3. *(有界可积性)* 若 E 的测度有限且 $f(x)$ 在 E 上有界，则 $f(x)$ 在 E 上可积。

推论 3.1.2 (非负可测函数和特征函数的积函数表示其在子集的积分). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，A 为 E 的可测子集，$f(x)$ 为定义在 E 上的非负可测函数，则

$$\int_A f(x)\,dx = \int_E f(x)\chi_A(x)\,dx.$$

推论 3.1.3 (非负可测函数几乎处处为 0 的充要条件). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x)$ 为定义在 E 上的非负可测函数，则

$$\int_E f(x)\,dx = 0$$

的充要条件是 $f(x) = 0$ 几乎处处成立。

推论 3.1.4 (非负可测函数在零测集上积分为零). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x)$ 为定义在 E 上的非负可测函数，且 $m(E) = 0$，则

$$\int_E f(x)\,dx = 0.$$

定理 3.1.3 (非负可积函数几乎处处有限). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x)$ 为定义在 E 上的非负可积函数，则 $f(x) < +\infty$ 几乎处处成立。

定理 3.1.4 (Beppo Levi 非负渐升列积分定理). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$\{f_k(x)\}$ 为定义在 E 上的非负可测函数列，且对任意 $x \in E$，有 $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$，定义

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

则有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

定理 3.1.5 (二见积分的线性性质)**.** 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 E 上的非负可测函数，E 为可测集，则对任意非负实数 α, β，有

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_E f(x)\, dx + \beta \int_E g(x)\, dx.$$

例题 3.1.2 (非负可测函数对等则积分相等)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x), g(x)$ 为定义在 E 上的非负可测函数，且对 a.e. $x \in E$，有 $f(x) = g(x)$，则

$$\int_E f(x)\, dx = \int_E g(x)\, dx.$$

定理 3.1.6 (逐项积分定理)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$\{f_k(x)\}$ 为定义在 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)\, dx.$$

推论 3.1.5 (非负可测函数的分段积分)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 E 的可测划分，$f(x)$ 为定义在 E 上的非负可测函数，则

$$\int_E f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f(x)\, dx.$$

定理 3.1.7 (Fatou 引理)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$\{f_k(x)\}$ 为定义在 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E \left(\liminf_{k\to\infty} f_k(x) \right) dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\, dx.$$

定理 3.1.8 (有限测度集下非负函数可积的级数判别)**.** 设 f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的几乎处处有限的非负可测函数，且 $m(E) < +\infty$。在 $[0, +\infty)$ 上取一列数

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_k < \cdots \to \infty.$$

对每个 $k = 0, 1, 2, \ldots$，定义

$$E_k = \{x \in E : y_k \le f(x) < y_{k+1}\}.$$

则函数 f 在 E 上可积当且仅当级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k\, m(E_k)$$

收敛。

此时有

$$\lim_{\delta\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} y_k\, m(E_k) \;=\; \int_E f(x)\, dx. \tag{4.5}$$

3.2　一般可测函数的积分

Def

定义 3.2.1 (一般可测函数的积分). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x)$ 为定义在 E 上的一般可测函数，则定义

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx,$$

其中 $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$，$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$。

Def

定义 3.2.2 (可积函数). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x)$ 为定义在 E 上的一般可测函数，若

$$\int_E |f(x)|\,dx < +\infty,$$

则称 $f(x)$ 在 E 上可积。

Def

定义 3.2.3 (可积函数全体). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，定义

$$L(E) = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f \text{ 在} E \text{ 上可积}\}.$$

推论 3.2.1 (可积函数几乎处处有限). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x)$ 为定义在 E 上的可积函数，则 $f(x) < +\infty$ 几乎处处成立。

推论 3.2.2 (几乎处处为零的可测函数积分为零). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x)$ 为定义在 E 上的可测函数，且对 *a.e.* $x \in E$，有 $f(x) = 0$，则

$$\int_E f(x)\,dx = 0.$$

推论 3.2.3 (可测函数控制可积性). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x), g(x)$ 为定义在 E 上的可测函数，且对 *a.e.* $x \in E$，有 $|f(x)| \le |g(x)|$，若 $g(x)$ 在 E 上可积，则 $f(x)$ 在 E 上也可积。

定理 3.2.1 (三见积分的线性性质). 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 E 上的可测函数，E 为可测集，则对任意实数 α, β，有

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_E f(x)\,dx + \beta \int_E g(x)\,dx.$$

例题 3.2.1 (可积渐升列积分的极限). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$\{f_k(x)\}$ 为定义在 E 上的可测函数列，且对 a.e. $x \in E$，有 $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$，定义

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

若存在可积函数 $g(x)$ 使得对任意 k 和 a.e. $x \in E$，有 $f_k(x) \le g(x)$，则

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

例题 3.2.2 (可积函数列的 Fatou 引理)**.** 设 $g \in L(E)$, $f_n \in L(E)$（$n \in \mathbb{N}$）。若 $f_n(x) \ge g(x)$ 成立（a.e. $x \in E$），则

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \ \le\ \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx.$$

定理 3.2.2 (积分的绝对连续性)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x)$ 为定义在 E 上的可积函数，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对任意可测集 $A \subset E$，若 $m(A) < \delta$，则

$$\left|\int_A f(x)\,dx\right| \le \int_A |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

定理 3.2.3 (控制收敛定理)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$\{f_k(x)\}$ 为定义在 E 上的可积函数列，且对 *a.e.* $x \in E$，有 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$。若存在可积函数 $g(x)$ 使得对任意 k 和 *a.e.* $x \in E$，有 $|f_k(x)| \le g(x)$，则函数 $f(x)$ 在 E 上可积，且

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

定理 3.2.4 (逐项积分定理)**.** 设 $\{f_k\} \subset L(E)$. 若有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)|dx < \infty$$

则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛; 若记其和函数为 $f(x)$, 则 $f \in L(E)$ 且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

定理 3.2.5 (积分号下求导)**.** 设 $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, 函数 $f(x,t)$ 定义在 $E \times [a,b]$ 上，且满足

1. 对任意 $t \in [a,b]$，函数 $f(x,t)$ 作为 x 的函数在 E 上可积;
2. 对 *a.e.* $x \in E$，函数 $f(x,t)$ 作为 t 的函数在 $[a,b]$ 上可微，且其偏导数记为 $f_t'(x,t)$;
3. 存在可积函数 $g(x)$ 使得对任意 $t \in [a,b]$ 和 *a.e.* $x \in E$，有

$$|f_t'(x,t)| \le g(x).$$

则函数

$$F(t) = \int_E f(x,t)\,dx$$

在 $[a,b]$ 上可微，且对任意 $t \in [a,b]$，有

$$F'(t) = \int_E f_t'(x,t)\,dx.$$

3.3 可积函数与连续函数的性质

定理 3.3.1 (用带紧支集连续函数逼近可积函数)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x)$ 为定义在 E 上的可积函数，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\varphi(x) \in C_c(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\int_E |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon.$$

推论 3.3.1 (用带紧支集连续函数列逼近可积函数)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x)$ 为定义在 E 上的可积函数，则存在函数列 $\{\varphi_k(x)\} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f(x) - \varphi_k(x)|\, dx = 0.$$

或者

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$$

a.e. $x \in E$。

定理 3.3.2 (平均连续性)**.** 若 $f \in L(\mathbb{R}^n)$，则有

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|\, dx = 0.$$

定理 3.3.3 (用带紧支集阶梯函数列逼近可积函数)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f(x)$ 为定义在 E 上的可积函数，则存在带紧支集阶梯函数列 $\{s_k(x)\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f(x) - s_k(x)|\, dx = 0.$$

或者

$$\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x)$$

a.e. $x \in E$。

3.4 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

Def

定义 3.4.1 (Darboux 上下积分)**.** 设 $f(x)$ 为定义在区间 $[a,b]$ 上的有界函数，对任意划分

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\},\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

定义

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)\cdot(x_i-x_{i-1}),$$

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)\cdot(x_i-x_{i-1}).$$

则称

$$I^*=\inf_P U(f,P)$$

为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 Darboux 上积分，称

$$I_*=\sup_P L(f,P)$$

为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 Darboux 下积分。

Def

定义 3.4.2 (Riemann 可积函数)**.** 设 $f(x)$ 为定义在区间 $[a,b]$ 上的有界函数，若其 Darboux 上下积分相等，即

$$I^*=I_*,$$

则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积。

Def

定义 3.4.3 (振幅函数)**.** 设 $f(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的有界函数。对任意子区间 $x_0\in[a,b]$，定义

$$\omega(x_0)=\lim_{\delta\to0}\sup_{x',x''\in B(x_0,\delta)}|f(x')-f(x'')|$$

为函数 f 在区间 x_0 上的振幅。

振幅函数是可测函数，因为

$$\{x_0\in[a,b]:\omega(x_0)\geq c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\delta>0}\left\{x_0\in[a,b]:\sup_{x',x''\in B(x_0,\delta)}|f(x')-f(x'')|\geq c-\frac{1}{n}\right\},$$

右端集合为开集，故为可测集。

引理 3.4.1 (振幅函数的 Lebesgue 积分为 Darboux 上下积分差)**.** *设 $f(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的有界函数，$\omega(x)$ 为其振幅函数，则*

$$\int_a^b \omega(x)\,dx = I^* - I_*,$$

其中 I^* 和 I_* 分别为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 Darboux 上下积分。

定理 3.4.1 (有界函数 Riemann 可积的充要条件)**.** *设 $f(x)$ 为定义在区间 $[a,b]$ 上的有界函数，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件是 f 的不连续点集是零测集。*

定理 3.4.2 (Riemann 可积蕴含 Lebesgue 可积)**.** *设 $f(x)$ 为定义在区间 $[a,b]$ 上的函数，若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积，且积分值相同。*

例题 3.4.1 (Cauchy 意义下积分和 Lebesgue 积分无蕴含关系)**.** 设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 定义在区间 $[0,+\infty)$ 上，则函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上 Cauchy 意义下积分 (反常积分) 为 $\frac{\pi}{2}$，但在区间 $[0,+\infty)$ 上 Lebesgue 不可积。

3.5 重积分与累次积分的关系

定理 3.5.1 (Tonelli 定理（非负可测函数情形）)**.** *设 $f(x,y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数，则：*

1. *对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^p$，函数 $f(x,y)$ 作为 y 的函数是 $\mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数；*
2. *记*
$$F_f(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy,$$
则 $F_f(x)$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上的非负可测函数；
3. *有*
$$\int_{\mathbb{R}^p} F_f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx\,dy.$$

定理 3.5.2 (Fubini 定理（可积函数情形）)**.** *设 $f(x,y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上的可积函数，则：*

1. *对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^p$，函数 $f(x,y)$ 作为 y 的函数是 $\mathbb{R}^q$ 上的可积函数；*
2. *记*
$$F_f(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy,$$
则 $F_f(x)$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上的可积函数；

3. 有

$$\int_{\mathbb{R}^p} F_f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx\,dy.$$

定理 3.5.3 (截段集测度积分为全测度)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 是一个可测点集。对任意 $x \in \mathbb{R}^p$，定义其在 x 处的截段集为

$$E(x) = \{\, y \in \mathbb{R}^q : (x,y) \in E \,\}.$$

则对于几乎处处的 x，集合 $E(x) \subset \mathbb{R}^q$ 是可测的，且 $m(E(x))$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上（几乎处处有定义）的可测函数。

并且有如下公式:

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^p} m(E(x))\,dx.$$

定理 3.5.4 (可测集的直积是可测的，且测度为其乘积)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^p$，$F \subset \mathbb{R}^q$ 是两个可测集。则它们的直积集

$$E \times F = \{(x,y) : x \in E, y \in F\} \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

是可测的，且有

$$m(E \times F) = m(E) \cdot m(F).$$

第四章　微分与不定积分

4.1　单调函数的可微性

Def

定义 4.1.1 (Vitali 覆盖). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，$\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一族集合。若对任意 $x \in E$ 和任意 $\delta > 0$，都存在 $F \in \mathcal{F}$ 使得 $x \in F$ 且 $\operatorname{diam}(F) < \delta$，则称 $\mathcal{F}$ 为 E 的 Vitali 覆盖。特别地，对于 $E \subset \mathbb{R}^1$ 的 Vitali 覆盖，若每个覆盖集合均为区间，则称其为 E 的区间 Vitali 覆盖。

例题 4.1.1 (Vitali 覆盖的例子). 设 $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$，令 $\{r_n\}$ 为区间 $[a, b]$ 中的全体有理数序列。对任意正整数 n, m，定义区间

$$I_{n,m} = \left[r_n - \frac{1}{m},\ r_n + \frac{1}{m} \right].$$

则区间族

$$\Gamma = \{\, I_{n,m} : n, m = 1, 2, \dots \}$$

是 $[a, b]$ 的 Vitali 覆盖。

定理 4.1.1 (Vatali 覆盖定理). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 且 $m^*(E) < \infty$，$\mathcal{F}$ 为 E 的 *Vitali* 覆盖。则对于任意 $\varepsilon > 0$，存在有限个互不相交的集合 $F_1, F_2, \dots, F_m \in \mathcal{F}$，使得

$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{m} F_k \right) < \varepsilon.$$

Def

定义 4.1.2 (Dini 导数). 设函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$，定义

$$D^+ f(x_0) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

称其为函数 f 在点 x_0 处的右上 Dini 导数。其他 Dini 导数 $D_+ f(x_0)$、$D_- f(x_0)$ 和 $D^- f(x_0)$ 类似定义。

定理 4.1.2 (单调上升函数几乎处处可微)**.** 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调上升，则 f 在区间 $[a,b]$ 上几乎处处可微，即几乎处处有 $f'(x)$ 存在，且有

$$\int_a^b f'(x)\le f(b)-f(a).$$

定理 4.1.3 (单调上升列的逐项微分定理（Fubini）)**.** 设 $\{f_n(x)\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的递增函数列，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$$

a.e. $x\in[a,b]$ 成立.

4.2　有界变差函数

Def

定义 4.2.1 (变差，全变差，有界变差函数)**.** 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，对区间 $[a,b]$ 上的任意划分

$$P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\},$$

定义变差

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

称

$$V_a^b(f)=\sup_P V(f,P)$$

为函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的全变差。若 $V_a^b(f)<\infty$，则称函数 f 为区间 $[a,b]$ 上的有界变差函数，其全体记为 $BV[a,b]$。

例题 4.2.1 (单调函数是有界变差函数)**.** 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调上升，则对任意划分 P，有

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=f(b)-f(a).$$

因此，单调上升函数的全变差为

$$V_a^b(f)=f(b)-f(a)<\infty,$$

故单调上升函数为有界变差函数。类似地可证单调下降函数也是有界变差函数。

例题 4.2.2 (导数有界的函数是有界变差函数)**.** 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且其导数 f' 有界，即存在常数 $M>0$，使得对任意 $x\in[a,b]$，都有 $|f'(x)|\le M$。则函数 f 为区间 $[a,b]$ 上的有界变差函数，且有

$$V_a^b(f)\le M(b-a).$$

注释 (有界变差函数显然的性质). 有界变差函数具有以下性质:

- 有界变差函数必为有界函数。
- 有界变差函数构成一个线性空间。

定理 4.2.1 (全变差可加性)**.** 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界变差函数，则对任意 $c\in(a,b)$，都有

$$V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f).$$

定理 4.2.2 (Jordan 分解定理)**.** 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界变差函数，则存在区间 $[a,b]$ 上的两个单调上升函数 f_1 和 f_2，使得

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x),\quad \forall x\in[a,b].$$

此时，若取 $f_1(x)=P_a^x(f)$ (f 在区间 $[a,x]$ 上的正变差)、$f_2(x)=N_a^x(f)$ (f 在区间 $[a,x]$ 上的负变差)，则 f_1,f_2 均为 $[a,b]$ 上的单调上升函数，且 f 在 $[a,b]$ 上的全变差满足

$$V_a^b(f)=(f_1(b)-f_1(a))+(f_2(b)-f_2(a)).$$

推论 4.2.1 (有界变差函数的微分性质)**.** 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为有界变差函数，则函数 f 在区间 $[a,b]$ 上几乎处处可微。且其导数 f' 可积，且有

$$\int_a^b|f'(x)|dx\le V_a^b(f).$$

4.3　不定积分的微分

引理 4.3.1 (可积函数用连续平均逼近)**.** 设 $f\in L([a,b])$，令

$$F_h(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t$$

(当 $x\notin[a,b]$ 时，令 $f(x)=0$)，我们有

$$\lim_{h\to0}\int_a^b|F_h(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

定理 4.3.1 (不定积分几乎处处可微)**.** 设函数 $f\in L([a,b])$，定义不定积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b].$$

则函数 F 在区间 $[a,b]$ 上几乎处处可微，且几乎处处有

$$F'(x)=f(x).$$

推论 4.3.1 (Lebesgue 点)**.** 设函数 $f \in L([a,b])$，则几乎处处的点 $x \in [a,b]$ 是 f 的 *Lebesgue* 点，即有

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)|dt = 0.$$

例题 4.3.1 (不定积分是有界变差函数)**.** 设函数 $f \in L([a,b])$，定义不定积分

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

则函数 F 为区间 $[a,b]$ 上的有界变差函数，且有

$$V_a^b(F) \le \int_a^b |f(t)|dt.$$

4.4　绝对连续函数与微积分基本定理

引理 4.4.1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微且 $f'(x) = 0$，*a.e.* $x \in [a,b]$。若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是常数函数，则必存在 $\varepsilon > 0$，使得对任意的 $\delta > 0$，$[a,b]$ 内存在有限个互不相交的区间：

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n),$$

其长度的总和小于 δ，使得

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| > \varepsilon.$$

Def

定义 4.4.1 (绝对连续函数)**.** 设函数 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$，若对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对任意有限个互不相交的区间

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \subset [a,b],$$

当这些区间的长度总和满足

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta,$$

时，都有

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon,$$

则称函数 f 为区间 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，记为 $f \in AC[a,b]$。

注释 (绝对连续函数显然的性质)*.* 绝对连续函数具有以下性质：

- 绝对连续函数必为连续函数。
- 绝对连续函数构成一个线性空间。

例题 4.4.1 (Lipschitz 连续蕴含绝对连续)**.** 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为 Lipschitz 函数，即存在常数 $L>0$，使得对任意 $x,y\in[a,b]$，都有

$$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|.$$

则函数 f 为区间 $[a,b]$ 上的绝对连续函数。

注释. Lipschitz 连续 $\Longrightarrow$ 绝对连续 $\Longrightarrow$ 一致连续 $\Longrightarrow$ 连续

定理 4.4.1 (不定积分是绝对连续函数)**.** 设函数 $f\in L([a,b])$，定义不定积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b].$$

则函数 F 为区间 $[a,b]$ 上的绝对连续函数。

定理 4.4.2 (绝对连续函数是有界变差函数)**.** 设函数 $f\in AC[a,b]$，则函数 f 为区间 $[a,b]$ 上的有界变差函数。

推论 4.4.1 (绝对连续函数的微分性质)**.** 绝对连续函数是几乎处处可微的，且其导数是可积函数。（由绝对连续函数是有界变差的，再利用有界变差函数的微分性质）

定理 4.4.3 (绝对连续加导数几乎处处为零的函数是常数函数)**.** 设函数 $f\in AC[a,b]$，且其导数 f' 在区间 $[a,b]$ 上几乎处处为零，即 $f'(x)=0$，*a.e.* $x\in[a,b]$。则函数 f 为区间 $[a,b]$ 上的常数函数。

定理 4.4.4 (微积分基本定理)**.** 设函数 $f\in AC[a,b]$，则存在函数 $g\in L([a,b])$，使得对任意 $x\in[a,b]$，都有

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f(t)dt.$$

4.5　分步积分公式与积分中值公式

定理 4.5.1 (分步积分公式)**.** 设函数 $u,v\in AC[a,b]$，则有

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(b)v(b)-u(a)v(a)-\int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

定理 4.5.2 (积分第一中值公式)**.** 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负可积函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

定理 4.5.3 (积分第二中值公式)**.** 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上可积函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx+f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$