前　言

泛函分析是一门比较深入的数学理论课程，要想较好地理解它、掌握它仅靠记住一些定理和命题是不够的，必须通过读者自己去思考、琢磨并完成一定数量的习题才有可能真正地领会这门学科的基本概念和处理问题的基本思想。

几年来，我们在给工科研究生讲授泛函分析课程时，深感缺乏一本合适的习题集。因此，利用教学过程中搜集和使用的题目加以整理编写成此书，旨在帮助初学泛函分析的读者通过一些基本训练达到深化学习的目的。

一本好的习题集应该能激发读者的思考和探索的求知欲，扩展视野，提高提出问题和解决问题的能力。本书遵循这个原则，以基本题为主，循序渐进，适当地安排一些技巧性较强的题目，而且有意识地列入一些读者在已有知识的基础上能够进一步提出和解答的问题。对一些较难的题目，均用 * 号加以区分。

本书和《应用泛函基础》（南京工学院出版社已出版，该书中无习题）一书配套，章节编排顺序与之完全相同，且尽量不涉及《应用泛函基础》教材范围之外的内容，对必须补充的概念均重新加以定义。

为了适合自学者的情况，我们对每个题目都作了较为详细的解答或提示。读者应在独立思考并完成作业后再参看相应的解答，将会收到较好的效果。

应用泛函基础作为研究生一学期的课程，只需完成本书中1/4～1/3的题目，其余可当例题参考。



本书不仅适合于工科研究生，对理科或师范院校数学系的师生也有一定的参考价值，对报考相应数学专业硕士生和博士生的读者更是十分有用的。

鉴于我们水平所限，疏漏与不妥之处，敬请读者指正。

编者　1987年6月

符 号 说 明

$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\subset$、$\supset$	包含符号
$\subsetneq$、$\supsetneq$	严格包含符号
$\to$	趋于极限
$\mapsto$	映射到
$\Longrightarrow$	(1) 蕴涵； (2) 必要性
$\Longleftarrow$	(1) 被蕴涵；(2) 充分性
$\Longleftrightarrow$	充分且必要条件，等价
$\exists$	存在着，有
$\forall$	对所有，对每一
sup	上确界
inf	下确界
$\overline{\lim}$	上极限
$\underline{\lim}$	下极限
$\cup$	并(集)
$\cap$	交(集)
$m(A)$	集A的 Lebesgue 测度
$\overset{\circ}{A}$	集A的内部
A'	集A的导集
$\overline{A}$	集A的闭包
$X\times Y$	集X与Y的积集

$d(x,y)$	点 x 到点 y 的距离
$d(x,A)$	点 x 到集 A 的距离
$V(x_0,r)$	点 x_0 的 r 域邻、开球，也简记为 $V_r(x_0)$
$V[x_0,r]$	点 x_0 的 r 闭邻域、闭球，也简记为 $V_r[x_0]$
$S(x_0,r)$	点 x_0 为心， r 为半径的球面
$\overline{z}$	复共轭
$\|z\|$	绝对值、复数模
$Re(z)$	实部
$Im(z)$	虚部
ϕ	空集
A^c	集 A 的余集
N	自然数集
R	实数集
C	复数集
$R^n(C^n)$	n 维欧氏空间（n 维复欧氏空间）
A^T	矩阵 A 的转置阵
A^*	算子 A 的共轭(伴随)算子
$f(A)$	集 A 的象(集)
$f^{-1}(A)$	集 A 的原象(集)
$\triangleq$	定义为
$L(X,Y)$	是 $X\to Y$ 的全体线性算子构成的空间
$B(X,Y)$	$X\to Y$ 的有界线性算子构成的空间
$B(X)$	$X\to X$ 的全体有界线性算子构成的空间
$C(X,Y)$	紧算子空间
$C[a,b]$	连续函数空间
$C^{(k)}[a,b]$	具有 k 阶连续导数的函数空间

$L^p[a,b]$	p 次幂(L)可积函数空间
$L^\infty[a,b]$	本性有界可测函数空间
l^p	$\sum_{i=1}^{\infty}\|\xi_i\|^p$收敛的数列 $(\xi_1,\cdots\xi_n,\cdots)$ 组成的数列空间
l^∞	有界数列空间
c	收敛数列空间
c_0	收敛于 0 的数列空间
X^*	X的共轭空间
$\dim X$	X的维数
$\mathrm{dia}A$	集A的直径
$\mathrm{span}M$	M的张成空间
$M^\perp$	M的正交补
$N(A)$	算子A的零空间
$R(A)$	算子A的值域
$\|x\|$	向量 x 的范数
$\|f\|$	泛函 f 的范数
$\|A\|$	算子A的范数
$[x]$	实数 x 的整数部分

目　　录

习　　题

第一章　分析初步……（1）

§ 1.1　集合与映射……（1）

§ 1.2　实直线与连续函数……（5）

§ 1.3　Lebesgue测度与 Lebesgue 积分简介……（11）

第二章　度量空间……（15）

§ 2.1　拓扑空间……（15）

§ 2.2　度量空间及其例子……（19）

§ 2.3　度量空间中的有关拓扑概念……（24）

§ 2.4　度量空间的完备性……（29）

§ 2.5　压缩映射原理……（32）

§ 2.6　度量空间中的紧性……（35）

第三章　Banach 空间……（39）

§ 3.1　线性赋范空间与 Banach 空间……（39）

§ 3.2　有界线性算子……（44）

§ 3.3　有界线性泛函与共轭空间……（49）

§ 3.4　闭图象定理与有界逆算子定理……（54）

§ 3.5　紧算子……（56）

第四章　Hilbert 空间……（59）

§ 4.1　内积空间与 Hilbert 空间……（59）

§ 4.2　Hilbert 空间中的坐标系……（61）

§ 4.3　Hilbert 空间的自共轭性与伴随算子……（65）

提 示 及 解 答

§ 1.1 集合与映射……(73)
§ 1.2 实直线与连续函数……(86)
§ 1.3 Lebesgue测度与Lebesgue积分简介……(112)
§ 2.1 拓扑空间……(127)
§ 2.2 度量空间及其例子……(142)
§ 2.3 度量空间中的有关拓扑概念……(155)
§ 2.4 度量空间的完备性……(176)
§ 2.5 压缩映射原理……(189)
§ 2.6 度量空间中的紧性……(200)
§ 3.1 线性赋范空间与Banach空间……(210)
§ 3.2 有界线性算子……(225)
§ 3.3 有界线性泛函与共轭空间……(241)
§ 3.4 闭图象定理与有界逆算子定理……(265)
§ 3.5 紧算子……(273)
§ 4.1 内积空间与Hilbert空间……(282)
§ 4.2 Hilbert空间中的坐标系……(294)
§ 4.3 Hilbert空间的自共轭性与伴随算子……(313)
参考文献……(344)

习　　题

第一章　分析初步

§ 1.1　集合与映射

1. 设 $X=\{1,2,3,\cdots,10\}$，　　$A_1=\{2,3\}$，

$A_2=\{2,4,6\}$，　　$A_3=\{3,4,6\}$，　　$A_4=\{7,8\}$，

$A_5=\{1,8,10\}$，A_i^c 是 A_i 在X内的余集　$(i=1,2,\cdots,5)$，

试求　$\bigcap_{i=1}^{5} A_i^c$

2. 证明　$A\cap(B\cup C\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)$

3. 试证下列各式：

(Ⅰ) $A-B=A\cap B^c=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$

(Ⅱ) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

(Ⅲ) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

(Ⅳ) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

(Ⅴ) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

4. 证明　$(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$

5. 试求等式　$A\cup(B-A)=B$ 成立之充分且必要的条

件。

6. 求等式 $(A-B)\cup B=(A\cup B)-B$ 成立之充分且必要的条件。

7. 求证（Ⅰ）$(A-B)\cup(C-D)\supset(A\cup C)-(B\cup D)$

（Ⅱ）$(A-B)\cup(C-D)\subset(A\cup C)-(B\cap D)$

且举例说明，上述关系式不能改为等式。

8. 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $E=[a,b]$ 上实函数列，满足：

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\qquad\forall x\in E$$

求证 （Ⅰ） $E(f(x)>c)=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}E(f_n(x)>c)$

（Ⅱ） $E(f(x)\leqslant c)=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cap}}E(f_n(x)\leqslant c)$

其中 c 为任意实数。

9. 设映射 f：$X\to Y$，A、$B\subset X$，C、$D\subset Y$，

试证 （Ⅰ） $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

$$f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$$

（Ⅱ） $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

$$f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$$

（Ⅲ） $f(f^{-1}(D))\subset D$

$$f^{-1}(f(A))\supset A$$

10. 设f：$X\to Y$，则下列命题等价：

（Ⅰ） f 是单射，即 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$

则 $f(x_1) \neq f(x_2)$

（Ⅱ）若 $f(x)=f(y)$ 则 $x=y$

（Ⅲ）若 $y \in R(f)$ 则 $f^{-1}(\{y\})$ 为X中独点集。

11. 设映射 $f: X \to Y$，则下列命题等价：

（Ⅰ） f 是单射

（Ⅱ） $\forall A、B \subset X$，有 $f(A \cap B)=f(A) \cap f(B)$

（Ⅲ） $\forall A \subset X$，$f^{-1}(f(A))=A$

12. 设X为非空集，$A \subset X$，作X上实函数

$$x_A(x)=\begin{cases} 1 & \text{当 } x \in A \\ 0 & \text{当 } x \overline{\in} A \end{cases}$$

称 $x_A(x)$ 为集合A的**特征函数**。试证 $x_A(x)$ 具有如下性质：

（Ⅰ） $A=B \iff x_A(x)=x_B(x)$

（Ⅱ） $A=X \iff x_A(x) \equiv 1$

$A=\phi \iff x_A(x) \equiv 0$

（Ⅲ） $A \subset B \iff x_A(x) \leqslant x_B(x)$

（Ⅳ） $x_{A \cup B}(x)=\max(x_A(x), x_B(x))$

$x_{A \cap B}(x)=\min(x_A(x), x_B(x))$

$x_{A-B}(x)=x_A(x)-x_B(x)$ （其中$B \subset A$）

13. 设 $A=\{1,2,\}$，$B=\{a,b,c\}$，$C=\phi$ 试求：

$$A \times B, \quad B \times C$$

14. 设 $X=\{x;\ a \leqslant x \leqslant b\}$，$Y=\{y;\ c \leqslant y \leqslant d\}$，

$Z=\{z;\ -\infty<z<+\infty\}$. 试求：$X\times Y$，$X\times Y\times Z$

15. 设 $Z=\{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$，它是整数集，试证其为可列集。

16. 设A为无穷集，证明：存在 $A^*\subset A$，使得

$$A^*\sim A \text{ 且 } A-A^* \text{ 为可列集。}$$

17. 设 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 是一个代数方程，如果它的系数a_0，a_1，a_2，$\cdots$，a_n 都是整数，就称该方程为**整系数代数方程**。若Q表示一切整系数代数方程所组成的集合，证明Q为可列集。

18. 设 $A=\{I_\alpha;\ \alpha\in\Lambda\}$ 是实直线R中一族非空的、彼此不交的开区间，试证A为可列集。

19. 设A是一可列集，证明A 的所有有限子集所组成的集合A^*亦为可列集。

（注 A^*中元素实际上是由 A中有限个元素所构成的子集合，故有时亦称 A^* 为**集类**。）

20. 证明实直线 $R=(-\infty,\ +\infty)$ 为不可列无穷集。

21. 证明(0，1)中无理数集P为不可列集。

*22. 证明平面点集 $A=\{(x,\ y);\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$ 是与 $B=(0,\ 1)$ 对等的不可列无穷集。

*23. 设 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$为一列集合，定义：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\xlongequal{\Delta}\{x;\ x\text{ 属于}A_n(n\geqslant 1)\text{中的无穷多个}\}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\xlongequal{\Delta}\{x;\ x\text{ 至多不属于}A_n(n\geqslant 1)\text{中的有限个}\}$$

称 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ 为集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**上限集**，$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ 为集列的**下限集**。试证明：

(Ⅰ) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

(Ⅱ) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

*24. 若有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 称**集列** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ **极限存在**，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$。试证明：

(Ⅰ) 若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$，即集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ **单调上升**，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

(Ⅱ) 若 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$，即集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为**单调下降**，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

*25. 设有集合 A，B 及集列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中

$$E_n = \begin{cases} A & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ B & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

试求集列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 极限存在的充分且必要之条件。

*26. 设 $A \subset R$ 且被开区间集 $G = \{I_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ 所覆盖，证明存在 G 的可列子集 G^* 覆盖 A。

§ 1.2 实直线与连续函数

1. 设 $A = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;\ n=1,\ 2,\ \cdots\right\}$

$$B = \left\{0,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n}+1;\ n=1,\ 2,\ \cdots\right\}$$

试求： A'， $\overline{A}$， $\mathring{A}$， B'， $\overline{B}$， $\mathring{B}$.

2. 设 A, $B\subset R$, 证明：

（Ⅰ）当 $A\subset B$ 时，必有 $A'\subset B'$， $\overline{A}\subset\overline{B}$.

（Ⅱ）$(A\cup B)'=A'\cup B'$， $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

（Ⅲ）$\overline{\overline{A}}=A$

3. 设 $A\subset R$, 则下列命题等价：

（Ⅰ）$x_0\in\overline{A}$

（Ⅱ）$\forall\varepsilon>0$， $A\cap V_\varepsilon(x_0)\neq\phi$

（Ⅲ）$\exists x_n\in A$， $n=1$， 2， … 使得 $x_n\to x_0$

4. R 中任一点 x 的 ε 邻域均为开集。

5. 设 $A\subset R$, 证明 A' 为闭集。

6. 设 $A\subset R$, 求证：

（Ⅰ）$\mathring{A}$ 为包含于集 A 的最大开集；

（Ⅱ）$\overline{A}$ 为包含集 A 的最小闭集。

7. 若 G 为 R 中开集，且 $G\cap A=\phi$, 试证：

$$G\cap\overline{A}=\phi$$

8. 求证（Ⅰ）R 中闭集必为可列个开集的交集；

（Ⅱ）R 中开集必为可列个闭集的并集。

*9. 设 $A\subset R$, 试证：$A-A'$ 至多可列。

*10. 设 $\mathscr{F}=\{G;\ G$ 为 R 中开集$\}$ 证明：

存在 $\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty}\subset\mathscr{F}$ 且有

$$\cup\{G\in\mathscr{F}\}=\cup\{G_\lambda;\ \lambda=1,\ 2,\ \cdots\}$$

11. 证明 Cauchy 数列是有界的。

12. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调数列，试证：

（Ⅰ）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则它的任何子列也收敛于 a

（Ⅱ）若∃子数列$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，使得$x_{n_k}\to a$ $(k\to\infty)$

则数列 $x_n\to a$ $(n\to\infty)$

13. 求证 Cauchy 数列的子列必为 Cauchy 列。

14. 利用柯西准则证明：

（Ⅰ）由 $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ 所成的数列$\{x_n\}$收敛；

（Ⅱ）由 $x_N=\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\cdots+\frac{1}{\ln N}$ 所成的数列$\{x_N\}$发散。

15. 设 $X=\left\{\frac{1}{2}\pm\frac{n}{2n+1}\right\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，证明：

$$\inf X=0,\ \sup X=1$$

16. 设A为有界数集，则存在 $\{x_n\}$、$\{y_n\}\subset A$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sup A,\ \lim_{n\to\infty} y_n=\inf A$$

17. 设函数 $f(x)$，$g(x)$均定义在A集上，试证：

（Ⅰ）$\sup\limits_{x\in A}(f(x)+g(x))\leqslant\sup\limits_{x\in A} f(x)+\sup\limits_{x\in A} g(x)$

（Ⅱ）$\sup\limits_{x\in A}(f(x)+g(x))\geqslant\sup\limits_{x\in A} f(x)+\inf\limits_{x\in A} g(x)$

（Ⅲ）$\inf\limits_{x\in A}(-f(x))=-\sup\limits_{x\in A} f(x)$

*18. 设A，B为R上的非空集，定义：

$$d(x,\ y)\overset{\Delta}{=}\inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}}|x-y|$$

称为**集A与B之间的距离**，试证：若A，B为闭集，且A有界，则必有 $x_0\in A$，$y_0\in B$，使得

$$d(x, y) = |x_0 - y_0|$$

*19. 证明：（Ⅰ）R上闭区间$[a, b]$不能表示成两个不相交的非空闭集的并集；

（Ⅱ）R上开区间(a, b)不能表示成两个不相交的非空开集的并集；

（Ⅲ）实直线R不能表示成两个不相交的非空闭（开）集之并集。

*20. 若将有界数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的一切收敛子列的极限所组成的集合记为S，求证S是闭集。

21. 设A为R中紧集，求证：A与R中闭集F的交集$A \cap F$必为紧集。

22. 设 $A \subset R$，求证：

A为紧集$\Longleftrightarrow$$A$中任一无穷子集必有聚点且聚点属于$A$.

23. 设 $A \subset R$，求证：

A为紧集 $\Longleftrightarrow$ A中任一点列均有收敛于A中点的子列。

24. 若A为R中紧集，则必有$a \in A$，$b \in A$，使得

$$a = \min\{x;\ x \in A\},\quad b = \max\{x;\ x \in A\}$$

25. 若 $A = [0, 1)$，$\forall a \in (0, 1)$ 试证：

（Ⅰ）$u_1 = [0, a)$ 为A中之开集；

（Ⅱ）$u_2 = [a, 1)$ 为A中之闭集。

26. 设$A \subset R$，证明：

（Ⅰ）任意多个A中的开集之并仍为A中开集；

（Ⅱ）有限多个A中开集之交仍为A中开集。

27. 设 $F \subset A(\subset R)$，证明：

F为A中闭集 $\Longleftrightarrow$ 存在R中闭集V，使得

$$F=V\cap A$$

*28. 设A是R中紧集，$\{F_\lambda\}$是A的一族闭子集，证明：如果$\{F_\lambda\}$中任意有限个F_λ的交集不空，则$\bigcap_\lambda F_\lambda$亦不为空集，其逆也真。

29. 试用连续函数的拓扑定义，即设 f：$A\to R$，如果R中任一开集的原象都是A中的开集，则称f是A上的连续函数，试说明R上的绝对值函数：$f(x)=|x|$，$\forall x\in R$是连续的。

30. 设f：$E=[a,b]\to R$ 连续，$E_1=\{x\in E;\ f(x)\leqslant c\}$，$E_2=\{x\in E;f(x)<c\}$，其中$c$为任意实数，求证：$E_1$为$E$中闭集，$E_2$为$E$中开集。

31. 设 f：$E=[a,\ b]\to R$，则f连续的充分必要条件是，对任意实数c，集合 $E_1=\{x\in E;\ f(x)\geqslant c\}$与$E_2=\{x\in E\cdot f(x)\leqslant c\}$ 都是闭集。

32. 设 f：$A\to B$，g：$B\to C$ （A，B，$C\subset R$）都是连续函数，试证复合函数 $g\circ f$：$A\to C$ 是连续的。

33. 设 $f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界，求证$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。

34. 设 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 求证：$f(x)$ 在$(c,\ 1)$ $(0<c<1)$内一致连续，试问：$f(x)$在$(0,\ 1)$内是否一致连续。

35. 判定下列函数列的一致收敛性：

（Ⅰ）$f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$，$x\in[0,\ 1]$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

（Ⅱ）$f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$，$x\in[0,\ 1]$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

36. 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C[a,\ b]$，且$f_n(x)$ 在$[a,\ b]$上一致

收敛于 $f(x)$，求证：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

37. 若 $f_n(x)$ 在$[a, b]$上都有连续导数，且 $f_n(x)\to f(x)$ 及 $f'_n(x)\xrightarrow{\text{一致}}g(x)$，则 $f'(x)=g(x)$

即 $$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)$$

*38. 设S为有界数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一切收敛子列的极限所成的集合，由题20、24知S为紧集且S中可取到最大和最小值。定义：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\triangleq\sup S \quad 和 \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\triangleq\inf S$$

分别称为数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**上极限**和**下极限**。证明：

（Ⅰ）$\overline{\lim}\,x_n\geqslant\underline{\lim}\,x_n$

（Ⅱ）若记 $\overline{x}=\overline{\lim}x_n$，$\underline{x}=\underline{\lim}\,x_n$，则 $\forall\varepsilon>0$：

（A）对所有充分大的 n 有

$$x_n<\overline{x}+\varepsilon,\qquad x_n>\underline{x}-\varepsilon$$

（B）有无穷多个 n 使得不等式：

$$x_n>\overline{x}-\varepsilon,\ x_n<\underline{x}+\varepsilon \text{ 成立。}$$

（Ⅲ）数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限 $\Longleftrightarrow$ $\overline{\lim}x_n=\underline{\lim}\,x_n$

*39. 设数列为

$$\left\{\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \frac{n+1}{n},\ \cdots\right\}$$

试求

$\overline{\lim}\ x_n$ 和 $\underline{\lim}\ x_n$

*40. 试举例说明：

（Ⅰ）积分的极限不等于极限的积分的函数列；

（Ⅱ）导数的极限不等于极限的导数的函数列。

§ 1.3 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分简介

1. 设 $E=(\alpha,\ \beta)$，$A\subset E$，$m_*(A)=mE-m^*(E-A)$ 为 A 的内测度，证明：

（Ⅰ）$m_*(\phi)=0$，$m_*(A)\geqslant 0$

（Ⅱ）若 $A_1\subset A_2$，则 $m_*(A_1)\leqslant m_*(A_2)$

（Ⅲ）$m_*(A)\leqslant m^*(A)$

*2. 设 E_n 是 R 上单调降的可测集列，即 $\forall n\in N$，均有 $E_{n+1}\subset E_n$，并且 $m(E_1)<+\infty$，则有

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{n\to\infty}m(E_n)$$

3. 设 E_n 是 R 上单调增的可测集列，即 $\forall n\in N$，均有 $E_n\subseteq E_{n+1}$，证明：

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{n\to\infty}m(E_n)$$

*4. 证明：对任意集 $A\subset R$，恒有 G_δ 型集 G，使得

$$G\supset A \text{ 且 } mG=m^*A$$

*5. 证明：若 A 为有界可测集，必有 F_σ 型集 F，使得

$$F\subset A \text{ 且 } mF=mA$$

6. 设 E，F 均为可测集，记 $E\Delta F=(E-F)\cup(F-E)$，

若有 $m(E\Delta F)=0$，证明：

$$mE=mF=m(E\cap F)$$

*7. 设E为可测，$mE<+\infty$，证明：对任意 $\varepsilon>0$，恒有闭集F，使 $F\subset E$，且 $m(E-F)<\varepsilon$.

8. 设 $f(x)$ 是可测集A上所定义的可测函数，则对于任意实数 c，

$$A(f\geqslant c)，\ A(f=c)，\ A(f\leqslant c)，\ A(f<c)$$

都是可测集。

9. 如果 $f(x)$是E上的可测函数，k是一个有限数，则（1）$f(x)+k$，（2）$kf(x)$，（3）$|f(x)|$，（4）$f^2(x)$，（5）$1/f(x)$　　$(f(x)\neq 0)$ 都为可测函数。

10. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为E上可测函数，证明集合 $E(f(x)>g(x))$ 是可测集。

11. 设 $f(x)$，$g(x)$ 为E上可测函数，证明

$M(x)=\max\{f(x)，\ g(x)\}$ 及 $m(x)=\min\{f(x)，\ g(x)\}$

均为E上的可测函数。

12. 设 $f(x)$ 在 E_k 上可测 $(k=1，2，\cdots)$，证明 $f(x)$ 在 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 上亦可测。

13. 设E是[0，1]中不可测集，令

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in E \\ -x & x\overline{\in}E \end{cases}$$

问，$f(x)$在[0，1]上是否可测？$|f(x)|$是否可测？

14. 设 $f(x)$ 是E上可测函数，$f(x)=g(x)$ a.e. E，则 $g(x)$ 也是E上的可测函数。

*15. 设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是可测集$E$上定义的可测函数列，证明$\sup\limits_n f_n(x)$与$\inf\limits_n f_n(x)$都是$E$上的可测函数。

16. 设$R(x)$为$(0, 1)$上的实函数，且

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p} & \text{当 } x=\dfrac{q}{p},\quad \dfrac{q}{p}\text{为既分约数，}q<p\\ 0 & \text{当 } x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

试计算$(L)\int_{(0,1)}R(x)dx$

17. 设$mE\neq 0$，$f(x)$在E上可积，如果对于任何有界可测函数$\varphi(x)$都有$\int_E f(x)\varphi(x)dx=0$，则$f(x)=0$ a. e. E

18. 设$mE<+\infty$，$f(x)$为E上可积函数，$E_n\nearrow$可测，$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)dx=\int_E f(x)dx$$

19. 计算$(L)\int_{(0,1)}\frac{1}{x}dx$，问$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0, 1)$上是否$(L)$可积？

20. 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{当 } x\text{ 在无理点处}\\ 1 & \text{当 } x\text{ 在有理点处}\end{cases}$$

问$f(x)$在$[0, 1]$上(R)可积吗？是(L)可积吗？

21. 试求积分的极限

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}dx$$

22. 试求积分的极限

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}dx$$

*23. 证明：

$$(L)\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}dx=\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}+\cdots\quad(p>-1)$$

*24. 若 $f(x)$ 是 $R=(-\infty,+\infty)$ 上可测函数，如果极限

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_{(-n,n)}|f(x)|dx$$

存在且有限，则称 $f(x)$ **在** R **上** Lebesgue **可积**，且记

$$(L)\int_R f(x)dx=\lim_{n\to\infty}(L)\int_{(-n,n)}f(x)dx$$

若 E 是 R 上任意可测集（允许 $mE=+\infty$），则定义

$$(L)\int_E f(x)dx=(L)\int_R f(x)\chi_E(x)\,dx$$

其中 $\chi_E(x)$ 可测集 E 的特征函数。

试证：当 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界、非负，(R) 可积时，则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上 (L) 可积，且

$$(L)\int_{(a,+\infty)}f(x)dx=(R)\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

*25. 设 $f(x)$，$|f(x)|$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界，(R) 可积，则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上 (L) 可积，且

$$(L)\int_{(a,+\infty)}f(x)dx=(R)\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

第二章　度量空间

§ 2.1　拓扑空间

1．设 $X=\{x,y,z,w\}$，试确定下列X的子集类是否为X的拓扑？

$\mathscr{H}_1=\{\phi,\ X,\ \{z\},\ \{y,z\},\ \{x,y,z\}\}$

$\mathscr{H}_2=\{\phi,\ X,\ \{w\},\ \{w,x\},\ \{w,y\}\}$

$\mathscr{H}_3=\{\phi,\ X,\ \{x,y\},\ \{x,y,z\},\ \{x,y,w\}\}$

2．设$\mathscr{T}$为X的平凡拓扑，$\mathscr{D}$为X的离散拓扑，$\mathscr{H}$为X的任一其他拓扑，试比较此三个拓扑的强弱。

3．设 $X=\{a,\ b,\ c,\ d\}$，有拓扑

$$\mathscr{H}=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\}\}.$$

（Ⅰ）写出（X，$\mathscr{H}$）中的全体闭集；

（Ⅱ）确定集 $\{a\}$，$\{a,b\}$ 的内部、导集与闭包；

（Ⅲ）确定X的导集X'．

4．设 $X=[0,\ 1)(\subset R)$，$\mathscr{T}$由ϕ及所有形如

$$[0,\ \alpha)\quad(0<\alpha\leqslant 1)$$

的集合所组成，求证：（X，$\mathscr{T}$）是拓扑空间。

5．设X是无限集（即X有无穷多个点），$\mathscr{T}$由ϕ，X以及所有使G^c为有限集的集G组成，求证：（X,$\mathscr{T}$）是拓扑空间。

6．设$\mathscr{C}$是X的一个子集类，记

$$\mathscr{H}_C=\cap\{\mathscr{H};\ \mathscr{C}\subset\mathscr{H},\ \mathscr{H}\text{是}X\text{的拓扑}\}$$

求证：$\mathscr{T}_C$ 是 X 的拓扑，并且它是使 $\mathscr{C}$ 中成员都成为开集的 X 的最弱拓扑。

7. 设 $A\subset(X,\ \mathscr{T})$，求证：$\overset{\circ}{A}$ 是开集，且是包含于 A 的最大开集；$\overline{A}$ 是闭集且是包含 A 的最小闭集。

8. 设 $A,\ B\subset(X,\ \mathscr{T})$，求证：

（Ⅰ）$x\in\overline{A}\Longleftrightarrow$对 x 的任一邻域 $V(x)$，有 $A\cap V(x)\neq\phi$

（Ⅱ）$A\subset B\Longrightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$

（Ⅲ）$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$

（Ⅳ）$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

（Ⅴ）$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$，并举例说明一般不能把“$\subset$”改成为“$=$”。

9. 设 R 赋予平凡拓扑 $\mathscr{T}=\{\phi,\ R\}$，求证：R 中任一点列 $\{x_n\}$ 都收敛，且收敛于任一点 $x\in R$。

10. 求证：Hausdorff 空间中任一单点集都是闭集。

*11. 求证：$(X,\ \mathscr{T})$ 为 Hausdorff 空间的充要条件是 X 的任一单点集 $\{x\}$ 都是该点 x 的全体邻域的交。

12. 求证：Hausdorff 空间中的子集 A 的导集 A' 必是闭集。

13. 设 $F:\ (X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{Y})$，求证：$F$ 是连续映射的充要条件是 $(Y,\ \nu)$ 中任一闭集 A 的原象集 $F^{-1}(A)$ 都是 $(X,\mathscr{T})$ 中的闭集。

14. 设 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 具有拓扑

$$\mathscr{T}=\{\phi,\ X,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\},\ \{2,3,4\}\}$$

令 $F:\ X\to X$，满足 $F(1)=2,\quad F(2)=4,\quad F(3)=2,\quad F(4)=3$.

求证：F 在 4 连续，但在 3 不连续。

*15. 设 X，Y 都是拓扑空间，F：$X\to Y$.

求证：F是连续映射$\Longleftrightarrow$对X的任一子集A有

$$F(\overline{A})\subset\overline{F(A)}$$

16. 设 X. Y 都是拓扑空间. F：$X\to Y$. 求证：F是连续映射$\Longleftrightarrow$对Y的任一子集B有

$$\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(\overline{B})$$

17. 设$\mathscr{x}$、$\mathscr{y}$是X上两个拓扑，且 $\mathscr{x}\subset\mathscr{y}$，求证：若$A$为$(X,\mathscr{x})$中的闭集，则$A$必为$(X,\ \mathscr{y})$中的闭集。即弱闭集必为强闭集。

18. 设$\mathscr{x}$，$\mathscr{y}$为X上两个拓扑，求证：$\mathscr{y}\subset\mathscr{x}\Longleftrightarrow$ 恒等映射I：$(X,\ \mathscr{x})\to(X,\ \mathscr{y})$为连续映射。

19. 求证：常值映射 F：$X\to Y$，即

$$F(x)=y_0,\qquad \forall x\in X$$

其中 y_0 为Y中固定元，对 X，Y的任何拓扑都是连续映射。

20. 若 $\mathscr{x}$，$\mathscr{y}$是X上的两个拓扑，且$\mathscr{x}\subset\mathscr{y}$，求证：$A$为$(X,\ \mathscr{y})$中的紧集，则$A$必为$(X,\ \mathscr{x})$中的紧集。即强紧集必为弱紧集。

*21. 设$X=A\cup B$，且 A、B 都是拓扑空间$(X,\ \mathscr{x})$中的闭集，若 f：$A\to(Y,\ \mathscr{y})$ 与 g：$B\to(Y,\ \mathscr{y})$ 都连续，且 $f|_{A\ B}=g|_{A\cap B}$（即 f 在$A\cap B$上的限制等于 g 在$A\cap B$上的限制），求证：f，g是同一连续映射 h：$(X,\ \mathscr{x})\to(Y,\ \mathscr{y})$在$A$、$B$上的限制。

22. 定义：F：$(X,\ \mathscr{x})\to(Y,\ \mathscr{y})$，若对任一$G\in\mathscr{x}$，都有 $F(G)\in\mathscr{y}$，称F为**开映射**。

求证：(1) F：$(X,\ \mathscr{x})\to(Y,\ \mathscr{y})$ 为开映射 $\Longleftrightarrow$ 对任

一$x\in X$及任一 x 的邻域$V(x)$，$F(V(x))$ 必为$F(x)$的邻域。

(2) 可逆映射 F：$(X, \mathscr{x})\to(Y, \mathscr{Y})$ 为同胚映射 $\Longleftrightarrow$ F是连续的开映射。

23. 设 $(X, \mathscr{x})$，$(Y, \mathscr{Y})$ 都是 Hausdorff 空间，F：$X\to Y$ 是可逆的开映射，求证：

(Ⅰ) 若 $\{y_n\}\subset Y$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y\in Y$，则

$$\lim_{n\to\infty} F^{-1}(y_n) = F^{-1}(y)$$

(Ⅱ) B为$(Y, \mathscr{Y})$中紧集，则$F^{-1}(B)$为$(X, \mathscr{x})$中紧集。

24. 设$(X, \mathscr{x})$为 Hausdorff 空间，A为其中的紧集，求证：

(Ⅰ) 紧集A必为闭集；

(Ⅱ) 紧集A的闭子集B也必为紧集；

(Ⅲ) 一族紧集的交仍为紧集；

(Ⅳ) 有限个紧集的并仍为紧集。

25. 求证：紧空间 $(X, \mathscr{x})$ 中任一无限子集A必有聚点，即A为无限集必 $A'\neq\phi$.

26. 若紧空间 $(X, \mathscr{x})$ 中点列 $\{x_n\}$ 只有唯一聚点 x，且 $x_i\neq x_j$ $\forall i\neq j$. 求证：$\{x_n\}$ 必收敛于 x。

*27. 定义：设$(X, \mathscr{x})$为拓扑空间，如有子集类$\mathscr{B}\subset\mathscr{x}$，使$\mathscr{x}$的每一非空的成员都是$\mathscr{B}$的某些成员的并，则称$\mathscr{B}$为$(X, \mathscr{x})$的拓扑$\mathscr{x}$的基。

求证：(Ⅰ) R中一切开区间组成的子集类$\mathscr{B}$为R（一维欧氏空间）的拓扑基。

(Ⅱ) 若$\mathscr{B}$为 $(X, \mathscr{x})$ 的拓扑基，则满足

$$\mathscr{B}\subset\widetilde{\mathscr{B}}\subset\mathscr{x}$$

的$\widetilde{\mathscr{B}}$也是（X，$\mathscr{T}$）的拓扑基。

*28. 设$\mathscr{D}$是X的离散拓扑，求证：X的一切单点集组成的集类$\mathscr{B}=\{\{x\};\ x\in X\}$是（$X$，$\mathscr{D}$）的拓扑基。

*29. 设 $\mathscr{B}_1$，$\mathscr{B}_2$分别是X上的拓扑$\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$的基。求证：$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2 \Longleftrightarrow$ 对每个 $B\in\mathscr{B}_1$，B必是$\mathscr{B}_2$中某些成员的并。

*30. 设$\mathscr{B}$是X的一族子集，$\widetilde{\mathscr{B}}$是由ϕ及$\mathscr{B}$的成员可能作出的一切并集组成的子集类，求证：$\widetilde{\mathscr{B}}$为X的一个拓扑$\Longleftrightarrow\mathscr{B}$满足

（Ⅰ）$X=\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$

（Ⅱ）$\forall B_1$，$B_2\in\mathscr{B}$ 及 $\forall x\in B_1\cap B_2$，必有 $B_3\in\mathscr{B}$，使得

$$x\in B_3\subset B_1\cap B_2$$

*31. 设$\mathscr{B}$为（X，$\mathscr{T}$）中的一个子集类，$\widetilde{\mathscr{B}}$同30题，求证：$\widetilde{\mathscr{B}}=\mathscr{T}\Longleftrightarrow\mathscr{B}$满足

（Ⅰ）$\forall A\in\mathscr{T}$ 及 $\forall a\in A$，存在 $B\in\mathscr{B}$，使得

$$a\in B\subset A$$

（Ⅱ）$\forall B\in\mathscr{B}$及$\forall b\in B$，存在$A\in\mathscr{T}$，使得

$$b\in A\subset B$$

§ 2.2 度量空间及其例子

1. 设$(X,\ d)$为度量空间，求证：对任何一组元素 $\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n\}\subset X$，有如下推广了的三角不等式

$$d(x_1,x_n)\leqslant d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n)$$

2. 设 (X, d) 为度量空间，求证：对 $x, y, z, w \in X$ 恒有

(Ⅰ) $|d(x,y)-d(z,w)| \leqslant d(x,z)+d(y,w)$；

(Ⅱ) $|d(x, y)-d(z,y)| \leqslant d(x,z)$.

3. 设$d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$，$x, y \in R$，求证：d 是R上的度量。

4. 设 $f: R \to R$ 是连续函数，令

$$d(x,y)=|f(x)-f(y)|;\ x, y \in R$$

求证：d 为R上的度量 $\Longleftrightarrow f$ 是严格单调函数。

5. 设 $f: R \to R$ 是单射，求证：

$$d(x,y)=|f(x)-f(y)|,\ x, y \in R$$

为R上的度量，反之亦然。

6. 设 $d_\infty(x,y)=\sup_n|\xi_n-\eta_n|$，$x=\{\xi_n\}, y=\{\eta_n\} \in l^\infty$，

求证：d_∞ 是 l^∞ 上的度量。

7. 设 $d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n|\xi_n-\eta_n|$，$x=\{\xi_n\}, y=\{\eta_n\} \in l^\infty$，

且 $\mu_n>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 收敛，求证：d 也是 l^∞ 上的度量。

8. 设 (X, d) 为度量空间，令

$$\rho(x, y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

求证：(X, ρ)也是度量空间。

9. 设$f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$，是严格增函数且满足

$f(0)=0$，$f(u+v)\leqslant f(u)+f(v)$　$(u, v\in[0, +\infty))$，

求证：当 (X,d) 为度量空间时，则$\rho(x, y)=f(d(x,y))$ 也为X上的度量。

10．设d为X上的度量，求证：当 $0<\alpha<1$ 时，

$$\rho(x,\ y)=[d(x,\ y)]^{\alpha}$$

也是X上的度量。

11．求证积分形式的 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式：

$$\int_a^b|x(t)\,y(t)|dt\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b|y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$p>1$，且 $x\in L^p[a,\ b]$，$y\in L^q[a,\ b]$；

$$\left(\int_a^b|x(t)\pm y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}+\left(\int_a^b|y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

其中 $p\geqslant 1$，$x(t)$，$y(t)\in L^p[a,\ b]$

12．求证：(Ⅰ) $\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\right)^2\leqslant n\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2$；

(Ⅱ) $\int_0^1 e^{x(t)}dt\int_0^1 e^{-x(t)}dt\geqslant 1$　其中$x(t)\in C[0,\ 1]$.

13．设 $d(x,\ y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt$，$x$，$y\in C[a,\ b]$

求证：d 是$C[a,\ b]$的一个度量。

14．设 $X=\{f(z)$；f 在$|z|<1$内解析，且在$|z|\leqslant 1$上连续$\}$

令　$d(f,\ g)=\max_{|z|=1}|f(z)-g(z)|$，$f$，$g\in X$

求证：(X, d) 是度量空间。

15. 设 $B(A)$ 是A上定义的有界函数全体组成的集合，令 $d(f, g)=\sup\limits_{x\in A}|f(x)-g(x)|$，求证：$d$ 为 $B(A)$ 上的度量。

16. 设$X\neq\phi$，令 $d(x, y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$ $x, y\in X$，

求证：(X, d) 是度量空间（称为**离散度量空间**），且X中的任一子集都为开集，同时又为闭集。

17. 求证：度量空间必为 Hausdorff 拓扑空间。

18. 试问度量空间 (X, d) 的子空间 (A, d) 的拓扑与 (X, d) 的拓扑有何关系？

19. 设 $A\subset(X, d)$，求证：当 $A\neq\phi$ 时，有

$$\mathrm{dia}A=0\Longleftrightarrow A\text{是单点集.}$$

20. 设 A，B都是 (X, d) 中的有界集，求证：$A\cup B$ 也是有界集。

21. 若 (X_1, d_1) 与 (X_2, d_2) 为度量空间，求证：$X=X_1\times X_2$上可定义如下（常用的）度量：

$$d(x, y)=d_1(x_1, y_1)+d_2(x_2, y_2)$$

$$d(x, y)=\sqrt{[d_1(x_1, y_1)]^2+[d_2(x_2, y_2)]^2}$$

$$d(x, y)=\max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

$$d(x, y)=\{[d_1(x_1, y_1)]^p+[d_2(x_2, y_2)]^p\}^{1/p}$$

$$(1<p<+\infty),$$

其中 $x=(x_1, y_1)$，$y=(x_2, y_2)\in X=X_1\times X_2$

22. 求证：$l^1\subset l^p\subset l^q\subset c\subset l^\infty$，$(1<p<q<+\infty)$

其中 c 为全体收敛数列组成的集合，并且其中的包含关系不能改成相等关系。

23. 求证：$C[a,b]\subsetneq L\ [a,b]\subsetneq L^{p_1}[a,b]\subsetneq L^{p_2}[a,b]$

$$\subsetneq L[a,b],\quad (1<p_2<p_1<+\infty)$$

24. 设 $x=(\xi_1,\ \xi_2)$，　　$y=(\eta_1,\ \eta_2)\in R^2$，

$$d_p(x,y)=(|\xi_1-\eta_1|^p+|\xi_2-\eta_2|^p)^{1/p},$$

求证：$d_p(x,y)$ 是 p 的减函数　$(1\leqslant p<+\infty)$，即 $1\leqslant p<q<+\infty$ 有

$$d_p(x,y)\leqslant d_q(x,y)$$

25. 设 $X(n)$ 是形如

$$P(D)=p_nD^n+p_{n-1}D^{n-1}+\cdots+p_1D+p_0$$

(其中 $p_n,\ \cdots,\ p_0\in R$)的微分算子全体，其中 $D=\dfrac{d}{dt}$，令

$$d(P(D),Q(D))=\sum_{i=0}^{n}|p_i-q_i|$$

其中

$$Q(D)=\sum_{i=0}^{n}q_iD^i,\quad D^0=1$$

求证：$(X(n),\ d)$ 是度量空间。

26. 若 $(Y,\ d)$ 为度量空间，$F:\ X\to Y$ 是 1—1 的映射，令 $\rho(x_1,\ x_2)=d(F(x_1),\ F(x_2))$，$x_1,\ x_2\in X$，试问 (X,ρ) 是度量空间吗？为什么？

27. 求证：　若 $\rho:\ X\times X\to R$ 满足（Ⅰ）$\rho(x,\ x)=0$ $\forall x\in X$，　$\rho(x,\ y)>0$　$\forall x\neq y$　（Ⅱ）$\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x,\ z)$

$+\rho(y,\ z)\quad \forall x,\ y,\ z\in X.$ 则 $(X,\ \rho)$ 为度量空间。

§ 2.3 度量空间中的有关拓扑概念

1. 求证：度量空间中的闭球

$$V[x_0,\ r]=\{x\in X;\ d(x,\ x_0)\leqslant r\},\ r>0,\ x_0\in X$$

总是闭集。球面 $S(x_0,\ r)=\{x\in X;\ d(x,\ x_0)=r\}$，也是闭集。

试问，是否恒有 $V[x_0,\ r]=\overline{V(x_0,\ r)}$ 及

$V[x_0,\ r]-V(x_0,\ r)=S(x_0,\ r)\neq\phi$ 呢？

2. 试在度量空间 $C[0,\ 2\pi]$ 中确定最小的 r，使得

$$y\in V[x,\ r]$$

其中 $x=\sin t,\ y=\cos t$.

3. 设 $\Gamma=\left\{(x,\ y);\ y=\sin\frac{1}{x},\quad x\in\left(0,\ \frac{2}{\pi}\right]\right\}\subset R^2$

试求

$$\mathring{\Gamma},\ \overline{\Gamma},\ \mathrm{dia}\,\Gamma$$

4. 设 $A\subset(X,\ d)$，求证：$\mathrm{dia}\,\overline{A}=\mathrm{dia}A,$

$$d(x,A)=d(x,\ \overline{A}).\quad \forall x\in X$$

5. 设 $x_0=t^2\in C[-1,\ 1]$，试问：$C[-1,\ 1]$中的开球 $V(x_0;\ 1)$，闭球 $V[x_0;\ 1]$ 是什么？

6. 设 $A\subset(X,\ d)$，令

$$F(x)=d(x,\ A)=\inf_{y\in A}d(x,\ y)$$

求证：F：$X\to R$ 是连续泛函， 试问F是一致连续吗？

7．设 $Kx(t)=\int_a^t x(t)\,d\tau$， $x\in C[a,\ b]$，求证：

K：$C[a,\ b]\to C[a,\ b]$ 是连续映射。试问K是一致连续吗？

8．设 F：$R^n\to R^m$，定义 $F(x)=y$ 为

$$y=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{11} & f_{12}\cdots f_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_{m1} & f_{m2}\cdots f_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=F(x)$$

求证：F是连续的。

9．设F：$L^2[a,\ b]\to C[a,\ b]$，定义为

$$Fx(t)=\int_a^t x^2(\tau)\,d\tau,\ x\in L^2[a,\ b]$$

求证：F是连续映射。

10．设 D：$C^{(1)}[a,\ b]\to C[a,\ b]$，其中 $C^{(1)}[a,\ b]$ 是$[a,\ b]$ 上具有一阶连续导数的函数全体，也赋予度量

$$d(x,\ y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|,\ x,\ y\in C^{(1)}[a,\ b]$$

规定

$$Dx(t)=\frac{d}{dt}x(t),\ x\in C^{(1)}[a,\ b],$$

试问导算子D是连续映射吗？

11．设 $\{x_n\}\subset(X,\ d)$，求证： $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in X\iff$ 对$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$都收敛。

12．设 $\{x_n\}\subset(X,\ d)$，求证： $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in X\iff$对每个$x$的邻域 $V(x)$，存在N，使得当 $n>N$ 时，恒有 $x_n\in V(x)$.

13．求证：度量空间$(X,\ d)$中的任一闭集必为可列多个开

集的交；任一开集必为可列多个闭集的并。

14. 求证：度量空间(X, d)中互不相交的闭集A，B，必有互不相交的开集G，V使得

$$A\subset G,\quad B\subset V.$$

15. 求证：泛函 f：$(X, d)\to R$ 是连续的$\Longleftrightarrow$对任意$\lambda\in R$，$\{x\in X;\ f(x)<\lambda\}$与$\{x\in X;\ f(x)>\lambda\}$ 都是(X, d)中的开集。

16. 求证：泛函 f：$(X, d)\to R$ 是连续的$\Longleftrightarrow$对任意$\lambda\in R$，$\{x\in X;\ f(x)\leqslant\lambda\}$与$\{x\in X;\ f(x)\geqslant\lambda\}$都是$(X, d)$中的闭集。

17. 设 $X=(-1, 1)\subset R$，$F(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$，$x\in R$，求证：F：$R\to X$在通常R的拓扑意义下是同胚映射。

18. 设 $A=\{x\in X;\ f(x)=g(x)\}$

$$B=\{x\in X;\ f(x)\leqslant g(x)\}$$

其中f，g都是(X, d)上的实的连续泛函，求证：A，B都是(X, d)中的闭集。

*19. 定义：设d_1，d_2都是X上的两个度量，如果(X, d_1)的拓扑$\mathscr{T}_{d_1}$与(X, d_2)的拓扑$\mathscr{T}_{d_2}$是相同的，称d_1与d_2是X上**拓扑等价的度量**，简称**等价度量**。

求证：X上的度量d与度量 $\rho=\dfrac{d}{1+d}$（见§2.2节中第8题）是等价的度量。

20. 求证：X上度量d_1与度量d_2等价$\Longleftrightarrow$恒等映射 I：$(X, d_1)\to(X, d_2)$ 是同胚映射。

21. 求证：若(X, d_1)与(X, d_2)，存在常数$\mu_2\geqslant\mu_1>0$，

使得

$$\mu_1 d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant \mu_2 d_1(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

则 d_1，d_2 是等价度量。

22. 求证：对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n)\in R^n$.

$$d_1(x,\ y)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|$$

$$d_2(x,\ y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d\ (x,\ y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i-\eta_i|$$

$$d_p(x,\ y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{1/p}\quad (1<p<+\infty).$$

都是 R^n 上的等价度量。

23. §2.2 节中第 21 题的诸度量 d 都为 $X=X_1\times X_2$ 上的等价度量。

24. 设 $Y=\{f;\ f:\ (X,\ d)\to R$ 有界连续泛函$\}$，令

$$\rho(f,\ g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$$

设 x_0 为X中固定点，令 $G:\ X\to(Y,\ \rho)$

$$G(y)=d(x,\ y)-d(x,\ x_0)$$

求证：$G:\ (X,\ d)\to(G(X),\ \rho)$ 是等距映射。

25. 设A，$M\subset(X,\ d)$，求证：A在M中稠密，即$\overline{A}\supset M$的充要条件为如下任何一条成立：

（Ⅰ）$\forall x\in M$ 的任一邻域 $V_\varepsilon(x)$ 有 $A\cap V_\varepsilon(x)\neq\phi$

（Ⅱ）$\forall x\in M$，存在 $\{y_n\}\subset A$，使得 $y_n\to x$

（Ⅲ）若A在B中稠密，且B在M中稠密。

26. 求证：$l^p(1\leqslant p<+\infty)$是可分的。

*27. 求证：l^∞是不可分的。

28. 求证：$C[0,\ 1]$与$C[a,\ b]$是等距的。

29. 设$(X,\ d)$是离散度量空间，求证：任一映射F：$(X,\ d)\to(Y,\ \rho)$都是一致连续的。

30. 设 $x_k=(\xi_1^{(k)},\ \cdots,\ \xi_n^{(k)})\in R^n$，

$$x_0=(\xi_1^{(0)},\ \cdots,\ \xi_n^{(0)})\in R^n,$$

求证：$x_k\to x_0\Longleftrightarrow\xi_i^{(k)}\to\xi_i^{(0)}\quad(k\to\infty)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。

31. 设 $x_k=x_k(t)\in C[a,\ b]$，$x_0\in C[a,\ b]$，求证：

$x_k\to x_0\Longleftrightarrow\{x_k(t)\}$在$[a,\ b]$上一致收敛于$x_0(t)$.

*32. 设$(X,\ d)$为度量空间，$Y=\{f;\ f:\ X\to R$为Lipschitz连续泛函$\}$，即$f\in Y\Longleftrightarrow$存在常数$k$使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant kd(x,\ y)\quad\forall x,\ y\in X$$

（Ⅰ）若$f,\ g\in Y$，$\alpha\in R$，求证：$h=f+g$，$\alpha f\in Y$；

（Ⅱ）试问$\sigma(f,\ g)=\inf\{k;\ |f(x)-g(x)-f(y)+g(y)|\leqslant kd(x,y)\quad\forall x,y\in X\}$是否为$Y$上的度量？

（Ⅲ）设$Y_0=\{f;\ f\in Y,\ f(x_0)=0\}$，试问$\sigma$是否为$Y_0$上的度量？其中$x_0$为$X$中定点。

33. 设 $f_n,\ f\in C[a,\ b]$，且$d(f_n,\ f)\to0$，$t_n\in[a,\ b]$，$t_n\to t_0$ 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t_n)=f(t_0)$.

34. 设 $f:\ X\to X$是连续映射，$(X,\ d)$为度量空间，设$X\times X$中度量为

$$d((x_1,y_1),\ (x_2,y_2))=d(x_1,x_2)+d(y_1,y_2)$$
$$(x_i,y_i)\in X\times X$$

$\Delta=\{(x,x);\ x\in X\}$ 为$X\times X$中对角线集，

令

$$g(x,x)=(x,f(x))\in \mathrm{Graph}(f)$$

求证：g：$\Delta\to \mathrm{Graph}(f)$ 是连续映射；g是可逆的，试问g^{-1}是连续映射吗？

*35. 设 f，$g\in C[a,\ b]$，$x_0=f$，$x_1=g$，且

$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{3}(f+2g)$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}d\left(x_n,\ \frac{1}{3}(f+2g)\right)=0$.

36. 设$g_n(t)=\dfrac{t^2}{t^2+(1-nt)^2}\in C[0,1]$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}g_n(t)=0$ $\forall t\in[0,\ 1]$，但 $d(g_n,\ 0)\nrightarrow 0$.

37. 设f，$g\in C[0,1]$ 定义 $d_1(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|dt$，

求证：题 36 中的 $g_n\to 0$，即 $d_1(g_n,\ 0)\to 0$ $(n\to\infty)$.

38. 求证：同胚映射 F：$(X,\ d)\to(Y,\ \rho)$ 下，(X,d) 可分，则 $(Y,\ \rho)$ 也可分。

39. 求证：A在 $(X,\ d)$ 中稠密$\Longleftrightarrow$$(X,\ d)$ 中任何非空开集G，恒有$A\cap G\neq\phi$.

40. 设 $A=\{x=(\xi_1,\cdots\xi_n,\cdots);\ |\xi_n|\leqslant\frac{1}{n},\ \forall n\}$ （称为 Hilbert **立方体**），求证：A作为 l^2 的子集是闭集。

§ 2.4 度量空间的完备性

1. 求证：度量空间中的 Cauchy 列必有界。

2. 求证：度量空间中的Cauchy 列的子列也必为 Cauchy 列。并且它若有收敛子列，则原来 Cauchy 列也必收敛，且有相同的极限。

3. 求证：等距的度量空间(X, d)与(Y, ρ)具有相同的完备性。

4. 若 $F: (X, d)\to(Y, \rho)$ 是一致连续的映射，求证：F把X中的 Cauchy 列$\{x_n\}$映成为Y中的 Cauchy 列。

5. 若有常数 $\mu_2\geqslant\mu_1>0$，使得

$$\mu_1 d_1(x, y)\leqslant d_2(x, y)\leqslant\mu_2 d_1(x, y)\quad \forall x, y\in X$$

成立，求证：(X, d_1) 与 (X, d_2) 有相同的完备性。

6. 求证：l^∞ 是完备的度量空间。

7. 设 $M=\{x=(\xi_1, \cdots\xi_n, 0, 0, \cdots)$； x是前有限项可能不全为 0 的“有限数列”$\}$. 令 $d(x, y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i|$，

$x, y\in M$，试问M是否为完备空间？其完备化空间是什么？

8. 求证：任一离散度量 空间（见§2.2 中第 16 题）都是完备度量空间。

9. 求证：收敛数列空间 c 作为 l^∞ 的子空间是完备的，且是可分的子空间。

10. 验证 $x_n(t)=\begin{cases}1-nt, & t\in\left[0, \frac{1}{n}\right)(n=1, 2, 3, \cdots)\\ 0, & t\in\left[\frac{1}{n}, 1\right]\end{cases}$

是否为 $C[0, 1]$ 中的Cauchy 列？是否为 $L^1[0, 1]$ 中的 Cauchy 列？

11. 在R中若赋予度量

$$d(x, y)=|\text{arc tg } x-\text{arc tg } y|$$

试问(R, d)是完备空间吗？度量空间的完备性是拓扑性质吗？

12. 求证：$Y=\{x\in C[a, b]; x(a)=x(b)\}$，是$C[a, b]$的完备子空间。

13. 设完备度量空间(X, d)中的闭子集序列$\{A_n\}$满足：

$$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{dia}A_n=0$，$A_n\neq\phi\quad\forall n$

求证：存在唯一点$x_0\in X$使得$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\{x_0\}$.

14. 设(X_1, d_1)，(X_2, d_2)为度量空间，定义

$$d(x, y)=[d_1^p(x_1, y_1)+d_2^p(x_2, y_2)]^{1/p}\quad(1\leqslant p<+\infty)$$

其中$x=(x_1, x_2)$，$y=(y_1, y_2)\in X=X_1\times X_2$，求证：

(X, d)完备$\Longleftrightarrow(X_i, d_i)$ $(i=1, 2)$都完备。

15. 设(X, d)为度量空间，$\rho(x, y)=\dfrac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$，

求证：(X, d)与(X, ρ)有相同的完备性。

16. 设在自然数集$N=\{1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$上定义

$$d(x, y)=\begin{cases}\delta+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}\qquad(x, y\in N)$$

其中$\delta\geqslant 0$为常数，求证：(N, d)是度量空间，试问它是完备的吗？

17. 求证：整数集Z是R中的第一纲集，但在其本身中是第二纲集。

18. 设(X, d)为度量空间，求证：(X, d)为完备的$\Longleftrightarrow$对任一单调减的闭集序列$\{A_n\}$，若$A_n\neq\phi$且$\operatorname{dia}A_n\to 0$则

必有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 为单点集。

19. 设 (X, d) 为度量空间，求证：(X, d) 为完备空间 $\Longleftrightarrow$ (X, d) 中任一 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 都有收敛子列。

*20. 设 f：$(X,d)\to(Y,\rho)$，如 $f(X)$ 为 (Y, ρ) 中有界集，则称 f 是X到Y中的**有界映射**，设 (Y, ρ) 是完备度量空间，记 $BC(X; Y)=Z$ 为X到Y中的全体有界一致连续映射组成的集，令

$$\sigma(f,g)=\sup\{\rho(f(x), g(x)); x\in X\}, f, g\in Z$$

试问 (Z, σ) 是度量空间吗？完备吗？

21. 设 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 都为 (X, d) 中 Cauchy 列，求证：$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ 必存在。

22. 求证：l^2 中的 Hilbert 立方体A是稀疏集（参见§2.3节第40题）.

§ 2.5 压缩映射原理

1. 设 $X=[1, +\infty)\subset R$，T：$X\to X$，规定

$$Tx=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$$

求证：T是压缩映射。

2. 易知方程 $x^3+4x-2=0$ 在 $[0, 1]$ 上有实根，令 $f(x)=\frac{1}{4}(2-x^3)$，求证：f：$[0, 1]$ 是压缩映射，并用迭代法求原方程在$[0, 1]$上的实根。

3. 用迭代法求方程 $x^3+x-1=0$ 的实根，并估计近似解的误差。

4. 设有线性方程组

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 & 1/5 \\ 1/6 & 1/5 & 1/2 \\ -1/6 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

试证明（用压缩映射原理）此方程组有唯一解，并确定用迭代法（取$x_0=(0,\ 0,\ 0)^T$）所得的近似解的误差估计。

5．试用迭代法求解非线性微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y^2+2, & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ y(0)=0 \end{cases}$$

试确定近似解序列中的$y_0(x)$，$y_1(x)$，$y_2(x)$，$y_3(x)$.

6．证明：$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$确定的$f$：$R\to R$是具有唯一不动点$x=\dfrac{3}{2}$的压缩映射。如果取初始近似值为$x_0=2$，试确定迭代法得到的近似解序列中$x_n(n\geqslant m)$有误差估计

$$\left|x_n-\frac{3}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2^{m+1}}$$

7．试用压缩映射的思想计算$\sqrt[3]{5}$的近似值。

8．设F：$(X,\ d)\to(X,\ d)$，$(X,\ d)$完备，且满足：

（Ⅰ）F在闭球$V[x_0;\ r]$上是压缩的，即

$d(F(x),F(y))\leqslant kd(x,y)\quad\forall x,\ y\in V[x_0;r]$ $(0\leqslant k<1)$，

且

（Ⅱ）$d(x_0,\ F(x_0))\leqslant(1-k)r$

求证：F在$V[x_0;\ r]$中有唯一不动点。

9．设f：$[a,\ b]\to R$，且$f''(x)\in C[a,\ b]$，$\tilde{x}$是$f(x)$的$(a,\ b)$内单重零点（即$f(\tilde{x})=0$，$f'(\tilde{x})\neq 0$）．求证：如下定义的牛顿方法

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

所得序列$\{x_n\}$，只要$|x_0-\tilde{x}|$足够小，则必有$x_n\to\tilde{x}$.

10. 设$(X,\ d)$完备，$F:\ X\to X$满足

$$\inf_n \sup_{x\neq y}\frac{d(F^n x,\ F^n y)}{d(x,\ y)}<1$$

求证：F有唯一不动点。

11. 设实系数线性方程组

$$(*)\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

其中b_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）也为实数组，若满足条件

$$\sum_{i,\ j=1}^{n}(a_{ij}-\delta_{ij})^2<1$$

其中δ_{ij}当$i=j$时为1，否则为0。试用压缩映射原理求证：（*）必有唯一的解$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$。

12. 设$f(t)\in C[0,\ 1]$试求积分方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_0^t x(s)\,ds\quad t\in[0,\ 1]$$

的连续解（用迭代法）。

13. 设$k(t,\ s,\ u)$在$[a,\ b]\times[a,\ b]\times R$上连续，且$\forall u_1,\ u_2\in R$

$$|k(t,\ s,\ u_1)-k(t,\ s,\ u_2)|\leqslant M|u_1-u_2|$$

$$\forall\,(t,s)\in[a,b]\times[a,\ b]$$

求证：积分方程 $x(t)=\lambda\int_a^b k(t,\ s,\ x(s))ds+f(t)$ 对任一 $f\in C[a,\ b]$，只要 $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$时，必有唯一连续解 $x^*(t)\in C[a,\ b]$.

*14. 设 $f(x,\ y)$ 在 R^2 上连续，$y_0=f(x_0,\ y_0)$，且 $f'_y(x,\ y)$ 在 R^2 上也连续，并 $f'_y(x_0,\ y_0)=0$，求证：$\exists\delta>0$，及 $g(x)\in C[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ 使得

$$y_0=g(x_0),\ g(x)=f(x,\ g(x))\quad \forall x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta].$$

*15. 设$f(x,\ y)$ 具有一阶连续偏导数，且$f(x_0,\ y_0)=0$，$f'_y(x_0,\ y_0)\neq 0$，求证：存在 $\delta>0$，及 $g(x)\in C[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$，使得

$$y_0=g(x_0),\ \text{且 } f(x,\ g(x))=0\quad \forall x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$$

§ 2.6 度量空间中的紧性

1. 求证全有界集的子集必为全有界集。

2. 举例说明全有界集未必是列紧集。

3. $M\subset(X,\ d)$，求证：

（Ⅰ）M是自列紧集$\Longleftrightarrow M$是列紧的闭集；

（Ⅱ）M是列紧集$\Longleftrightarrow\overline{M}$是自列紧集；

（Ⅲ）列紧集的子集为列紧集；

（Ⅳ）列紧空间的闭子集为自列紧集。

4. 设（X，d）完备，$M\subset X$，求证：M为自列紧集$\Longleftrightarrow$ M为全有界的闭集。

5. 设A为（X，d）中的有限点集，求证：A必为自列紧集。

6. 设 (X, d) 为离散度量空间，$A \subset X$，求证：A 为紧集$\Longleftrightarrow A$是有限点集。

7. 设 (X, d) 完备，$A \subset X$，求证：$\overline{A}$ 为紧集$\Longleftrightarrow A$ 为全有界集。

8. 求证：列集性是度量空间中的拓扑性质。

9. 设A，B为度量空间 (X, d) 中的两个紧集，求证：存在 $a \in A$，$b \in b$，使得

$$d(a, b) = \inf\{d(x, y);\ x \in A,\ y \in B\}$$

存在 $a_1 \in A$，$b_1 \in B$，使得

$$d(a_1, b_1) = \sup\{d(x, y);\ x \in A,\ y \in B\}.$$

10. 设 (X, d) 是紧空间，$\{A_n\}$ 为 (X, d) 中的一列非空闭集，且

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$$

求证：

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \phi \ .$$

11. 设 $\{x_n\}$ 为 (X, d) 中的收敛点列，且极限为 x_0，求证：$A = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ 是紧集。

12. 设$\{x_n\}$是完备度量空间X中的全有界集中的点列，记 S 为 $\{x_n\}$ 的一切收敛子列的极限所组成的点集，求证：S 是紧集。

13. 设 f：$(X, d) \to (Y, \rho)$，求证：f 是连续映射$\Longleftrightarrow$对 (X, d) 的任一紧集A，$f|_A$：$\to (Y, \rho)$ 是连续的。

*14. 设f：$(X, d) \to (Y, \rho)$是单射，求证：f 是连续映射$\Longleftrightarrow f$ 则将(X, d)中任一紧集A映成为 (Y, ρ) 中的紧集。

15. 若 (X, d) 与 (X, ρ) 都是度量空间，且若有常数

$k>0$，使得 $\rho(x, y)\leqslant kd(x, y)\ \ \forall x, y\in X$，求证：$(X,d)$ 为紧空间时，(X, ρ) 也必为紧空间。

16. 设 (X, d) 为紧空间，F：$(X, d)\to(Y, \rho)$ 是连续的双射，求证：F^{-1}：$(Y, \rho)\to(X, d)$ 必是一致连续的。

*17. 设 (X, d) 是紧空间，F：$(X, d)\to(X, d)$ 是等距映射，求证：（Ⅰ）对任何 $x\in X$，令

$$x_n=F(x_{n-1}),\ \ x_1=F(x)\quad (n=2, 3, \cdots)$$

必有

$$x\in\overline{\{x_n\}}$$

（Ⅱ）$F(X)=X$.

*18. 设(X, d) 是紧空间，F：$(X, d)\to(X, d)$，求证：F是等距映射$\Longleftrightarrow$对任x．$y\in X$，有

$$d(x, y)\leqslant d(F(x), F(y))$$

19. 设 (X, d) 为紧空间，F：$(X, d)\to(X, d)$ 满足

$$d(F(x), F(y))<d(x, y)\quad \forall x\neq y,\ x, y\in X,$$

求证：F有唯一不动点 $x^*\in X$，使得 $x^*=F(x^*)$.

20. 设 (X, d) 为紧空间，若 F：$X\to X$是没有不动点的连续映射，求证：存在 $k>0$，使得

$$d(x, F(x))\geqslant k\quad \forall x\in X$$

21. 求证：(X, d) 为紧空间$\Longleftrightarrow$$(X, d)$ 中任一族其交为空集的闭集，必有有限个成员其交也为空集。

*22. 求证：(X, d) 为紧空间$\Longleftrightarrow$对 (X, d) 中的任意一族闭集 $\{F_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$，如其中任意有限个 F_λ 的交集都为非空集，则 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda$ 也必为非空集。

23. 设 (X_1, d_1), (X_2, d_2) 的积空间 (X, d) 中，令

$$d(x, y)=\max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

$\forall x=(x_1, y_1)$, $y=(x_2, y_2)\in X=X_1\times X_2$，求证：$(X, d)$为紧空间$\Longleftrightarrow$$(X_1, d_1)$ 与 (X_2, d_2) 都是紧空间。

24. 设F: $(X_1, d_1)\to(X_2, d_2)$，其中 (X_2, d_2) 是紧空间，求证：F是连续映射$\Longleftrightarrow$$\mathrm{Graph}(F)$ 是 $(X_1\times X_2, d)$中的闭集（设 $X_1\times X_2$ 中度量按本节题23中形式）。

第三章　Banach 空间

§ 3.1 线性赋范空间与 Banach 空间

1. 利用线性空间的公理证明线性空间 X 中任意向量 $x\in X$ 与数域 K 中的数 λ，恒有：

（Ⅰ）$-x$ 是由 x 唯一确定的；

（Ⅱ）$\lambda\theta=\theta$；

（Ⅲ）$0x=\theta$；

（Ⅳ）$-x=(-1)x$；

（Ⅴ）如 $\lambda x=\theta$，则或 $\lambda=0$ 或 $x=\theta$.

2. 下列集合，哪些是线性空间？

（Ⅰ）满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$ 的数列 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)$ 全体；

（Ⅱ）满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=1$ 的数列 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)$ 全体；

（Ⅲ）满足微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+b\dfrac{dy}{dx}+cy=0$，（$b$，$c$ 为已知实数）的一切解 $y=y(x)$ 的全体；

（Ⅳ）一切 x 的多项式全体；

（Ⅴ）一切次数 $\leqslant 4$ 的 x 的多项式全体。

3. 设 M 为线性空间 X 的子集：求证：

（Ⅰ）span M 是 X 的子空间；

（Ⅱ）span M 是 X 的包含 M 的最小子空间。

4. 设 y_1，y_2，…，$y_m\in M=$ span $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$，

（Ⅰ）若 y_1，y_2，…，y_m 线性无关，则 $m\leqslant n$.

（Ⅱ）若 y_1，…，y_m 线性无关，且 $m<n$，则存在 y_{m+1}，

…，$y_n \in M$使得 $M=\mathrm{span}\{y_1, \cdots, y_m, y_{m+1}, \cdots, y_n\}$.

5. 设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是复线性空间X的基，视X为实线性空间，其维数为多少？试找出此实线性空间的一组基。

6. 设X_1，X_2为某线性空间X的子空间，令

$$X_1+X_2=\{x_1+x_2;\ x_1\in X_1,\ x_2\in X_2\}$$

称X_1+X_2为X_1与X_2的**和**。设M，N为X的两子空间，

求证：$$M+N=\mathrm{span}(M\cup N)$$

试问，对X的任意子集M，N，有

$$\mathrm{span}\,M+\mathrm{span}\,N=\mathrm{span}(M\cup \mathrm{N})$$

成立吗？

7. 设Y，Z都是线性空间X的子空间，求证：$Y\cap Z$也是X的子空间。试问：$Y\cup Z$是否也一定是X的子空间？

8. 设$Af=\int_0^x f(t)\,dt$，$f\in C[a, b]$；

$$Df=\frac{d}{dx}f(x),\ f\in C^{(1)}[a, b];$$

求证：A：$C[a, b]\to C^{(1)}[a, b]$是线性算子。

D：$C^{(1)}[a, b]\to C[a, b]$是线性算子。

9. 设A：$D(A)(\subset X)\to Y$是线性算子，求证：$D(A)$为X的子空间；$R(A)$为Y的子空间。

10. 设 $Ax=(\xi_2, -\xi_1, \xi_3)$ $\forall x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\in R^3$，求证：$A$：$R^3\to R^3$是同构映射。

11. 设A：$X\to Y$是同构映射，求证：A^{-1}：$Y\to X$也是同构映射。

12. 求证：R与R^2不同构。

13. 求证：X 与 Y 若为同一数域 K 上的同一维数的有限维线性空间，它们必为同构的。

14. 若 $\dim X=\dim Y<+\infty$，$A: X\to Y$ 为线性算子，求证：A^{-1} 存在$\Longleftrightarrow R(A)=Y$.

15. 设 $\{A_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ 为线性空间 X 中的一族凸集，求证：$\bigcap_\lambda A_\lambda$ 也是凸集。

16. 设 M 为线性空间 X 的子集，令

$$C_0(M)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i;\ x_i\in M,\ \lambda_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ n\text{为自然数}\right\}$$

（称 $C_0(M)$ 为 M 的**凸包**）。求证：$C_0(M)$ 是 X 中包含 M 的最小凸集。

17. 设 X 为线性赋范空间，x，$y\in X$，求证：

$$|\,\|x\|-\|y\|\,|\leqslant\|x-y\|\ .$$

18. 设 X 为数域 K 上的线性赋范空间，λ_n，λ，μ_n，$\mu\in K$，x_n，y_n，x，$y\in X$，若 $\lambda_n\to\lambda$，$\mu_n\to\mu$，$x_n\to x$，$y_n\to y$，求证：

$$\lambda_n x_n+\mu_n y_n\to\lambda x+\mu y,$$

且当 $\|x_n\|\neq 0$，$\|x\|\neq 0$ 时，$\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\to\dfrac{x}{\|x\|}$.

19. 求证：$\|x\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|$，$x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)\in R^n$ 是 R^n 上的范数。

20. 求证：$\|x\|_p=\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{1/p}$ $(1\leqslant p<+\infty)$ 是 $C[a,\ b]$ 上的范数。

21. 设 $c_0=\{x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots);\ \xi_n\in R,\ \lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0\}$，定义 $\|x\|=\sup\limits_n|\xi_n|$，求证：

（Ⅰ）c_0 是 l^∞ 的子空间；

（Ⅱ）c_0 是 l^∞ 的闭子空间；

（Ⅲ）c_0 是可分的 Banach 空间。

22. 设 $\|x\|=\left(\int_0^2|x(t)|^2dt\right)^{1/2}$，$x\in C[0,2]$，求证：$(C[0,2],\|\cdot\|)$ 不是 Banach 空间。（令

$$x_n(t)=\begin{cases}t^n, & t\in[0,1]\\ 1, & t\in(1,2]\end{cases}$$

求证：$\{x_n\}$ 是 $(C(0,2],\|\cdot\|)$ 中的不收敛的 Cauchy 列）。

23. 设 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^p, y=(\eta_1,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^q$，$z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n,\cdots)\in l^r$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$ $(p,q,r>1)$，

求证：$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i\zeta_i|\leqslant\|x\|_p\|y\|_q\|z\|_r$。

24. 设 p 满足 $0<p<1$，$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in R^n$，令

$$\|x\|_p=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p,\quad d_p(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p(=\|x-y\|_p)$$

求证：$(R^n,\|\cdot\|)$ 不是赋范空间，而(R^n,d_p)是度量空间。

25. 设 $c=\{x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots);\ \xi_n\in R,\ \lim_{n\to\infty}\xi_n\exists\}$，令 $\|x\|=\sup_n|\xi_n|$，求证 $(c,\|\cdot\|)$ 是可分的 Banach 空间。

26. 设X为 Banach 空间，求证：

（Ⅰ）若$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛；

（Ⅱ）若$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则 $\lim_{n\to\infty}x_n=\theta$。

（Ⅲ）若$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，则$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$.

27. 设X为 Banach 空间，$\{x_n\}\subset X$，$r(t)\in L(0,+\infty)$，且 $r(t)$ 为单调递减满足

$$\|x_n\|\leqslant r(n)\quad\forall n$$

求证：$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛。

28. 若 $\sum_{1}^{\infty}\|x_n-x_{n+1}\|$ 收敛，$x_n\in X$，X 为线性赋范空间，试问：$\{x_n\}$是否为 Cauchy 列？$\{x_n\}$是否一定收敛？

29. 设 $e_1=(1,0,0,\cdots)$，$e_2=(0,1,0,\cdots)$，…求证：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}e_n$ 在 c_0 中收敛，但不是绝对收敛，并求此级数之和。

30. 设 $X_0\subset(X,\|\cdot\|)$，且 X_0 在 X 中稠密，求证：$\forall x\in X$，$\exists\ x_n\in X_0$ 使得 $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ 收敛。

31. $X(\neq\{\theta\})$ 为线性赋范空间，求证：X为 Banach 空间$\Longleftrightarrow X$的单位球面 $S_1(\theta)=\{x\in X;\ \|x\|=1\}$ 为完备的。

32. 设X为线性赋范空间，令

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ \|x-y\|+1, & x\neq y\end{cases}$$

求证：(X,d) 为度量空间，但 d 不是由范数决定的度量。

33. 设Y是 l^∞ 的子空间，其中元素除至多有限项非零外全

为零的无穷数列，求证：Y不是 l^∞ 的闭子空间。

34. 设X为线性赋范空间，求证：X为Banach 空间$\Longleftrightarrow X$中级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 必收敛。

35. 设 X_0 为线性赋范空间 X 的子空间， 求证：$\overline{X}_0$ 也是 X的子空间。

36. 设 $B[a, b]$ 为$[a, b]$上有界函数全体，其线性运算与$C[a, b]$ 中相同，令

$$\|x\| = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|, \quad x \in B[a, b]$$

求证：$B[a, b]$ 是Banach 空间。

37. 求证：范数公理(1)可改成“$\|x\| \Longrightarrow x=\theta$”.

§ 3.2 有界线性算子

1. $Ax=(\xi_2, \xi_1) \quad \forall x=(\xi_1, \xi_2) \in R^2$,

$Bx=(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2) \quad \forall x=(\xi_1, \xi_2) \in R^2$,

$Cx=(\xi_1, 0) \quad \forall x=(\xi_1, \xi_2) \in R^2$,

求证：A， B， C 都是 $R^2 \to R^2$ 中的线性算子，并指出它们的零空间与值域。

2. 设A：$X \to Y$ 为线性算子， 而 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为X中线性无关向量组。 试问 $\{Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_n\}$ 是否一定为Y中线性无关向量组？什么条件下一定为线性无关组呢？

3. 设 $C^{(1)}[0, 1]$ 中定义范数 $\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$

$+ \max_{t \in [0, 1]} |x'(t)|$，求证： 微分算子 $D=\frac{d}{dt}$：$C^{(1)}[0, 1]$

$\to C[0, 1]$，为有界线性算子。

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: $R^2 \to R^2$，求证：A 为有界线性算子，并求 $\|A\|$.

5. 设 $Ax=\left(\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_3, \cdots\right)$ $\forall x=(\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^2$，求证：$A \in B(l^2)$，并求 $\|A\|$.

6. 设 $A \in B(X, Y)$，试问 $R(A)$ 是否必定为 Y 中闭子空间。

7. 设 A_n: $l^2 \to l^2$，$A_n x=(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots)$ $\forall x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^2$，称 A_n 为**左移位算子**，试证：$A_n \in B(l^2)$，且求 $\|A_n\|$.

8. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$: $(R^n, \|\cdot\|_\infty) \to (R^m, \|\cdot\|_\infty)$ 求证：

$$\|A\| = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

9. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$: $(R^n, \|\cdot\|_1) \to (R^m, \|\cdot\|_1)$ 求证：

$$\|A\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

10. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$: $(R^n, \|\cdot\|_1) \to (R^m, \|\cdot\|_\infty)$ 求证：

$$\|A\|_{1,\infty} = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

11. 设 $k(s, t)$ 为 $[a, b]\times[a, b]$ 上连续函数，

$Tx=\int_a^b k(s, t)x(t)dt$，求证：$T$ 可视为 $L^2[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 中的的有界线性算子。

12. 设 $A \in B(X, Y)$，求证：A 的零空间 $N(A)$ 必为 X 中闭子空间。

13. 设 A_n，$A \in B(X, Y)$，则 $\|A_n - A\| \to 0 \Longleftrightarrow \{A_n\}$ 在

X的任一有界集Ω上都一致收敛于A。

14. 设 $\{A_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}\subset B(X;\ Y)$，求证：

$$\{x\in X;\ \sup_{\lambda\in}\|A_\lambda x\|\leqslant n\}=\bigcap_{\lambda\in}\{x\in X;\ \|A_\lambda x\|\leqslant n\}.$$

15. 设 X 为 Banach 空间，$A\in B(X)$，$\|A\|=\lambda$，

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在 $z=\lambda$ 绝对收敛，求证：$f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n A^n$

在 $B(X)$中也收敛。

16. 设 $A\in B(X)$，且$\|A\|<1$，求证 $\lim_{n\to\infty}A^n=0$(零算子)。

17. 设X为 Banach 空间，求证：当$A\in B(X)$且$\|A\|<1$

时有 $(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n\in B(X)$

18. 设X为 Banach 空间，$A\in B(X)$。$\|A\|<|\lambda|$，求证：

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|A\|}.$$

19. 设X为 Banach 空间，A，$B\in B(X)$且$A^{-1}\in B(X)$，

$\|B\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|}$，求证：$(A+B)^{-1}\in B(X)$ 且

$$\|(A+B)^{-1}\|\leqslant\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|B\|\ \|A^{-1}\|}$$

*20. 设 X 为 Banach 空间，X_0 为 $B(X)$ 中有有界逆算子的有界线性算子的全体，求证：X_0 为 $B(X)$ 中的开集，且 G：$A\in X_0\to A^{-1}\in X_0$ 是连续映射。

21. 设 $A\in B(X,\ Y)$，$R(A)=Y$，$B\in B(Y,\ X)$，满足 $BAx=x\quad\forall x\in X$，求证：$A^{-1}=B\in B(Y,\ X)$。

22. 设X为 Banach 空间，Y 为线性赋范空间，

$A_n \in B(X;\ Y)$，且$\sup\limits_n \|A_n\| = +\infty$，求证：存在$x_0 \in X$使得

$$\sup_n \|A_n x_0\| = +\infty$$

23．设X为Banach空间，A_n，$A \in B(X;\ Y)$，且$A_n \xrightarrow{s} A$，求证：$\sup\limits_n \|A_n\| < +\infty$.

24．求证：题7中左位移算子序列$\{A_n\}$强收敛于0，但A_n不一致收敛于0。

25．设X为有限维线性赋范空间，Y为X的真子空间，求证：存在$x_0 \in X$使得 $\|x_0\| = 1$，且 $d(x_0,\ Y) = 1$.

26．设X与Y为等距同构的线性赋范空间，求证：X与Y必拓扑同构。试问，反之一定成立吗？

27．设X与Y是拓扑同构的线性赋范空间，求证：X与Y具有相同的完备性。

28．题25中X的有限维改成为Y为有限维，相应的结论成立否？

29．设(a_{ij}) $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots)$是无穷矩阵，满足

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty.$$ 设$Ax=y$，其中 $x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots)$

$\in l^\infty$，$y=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_n,\ \cdots)$，并且 $\eta_i = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j$，求证：

$$A \in B(l^\infty),\ \text{且}\ \|A\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$$

30．设无穷矩阵(a_{ij})满足

$$\sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| = M < +\infty$$

令$Ax=y$，其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^1$， $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n,\cdots)$，

$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j$，求证：$A\in B(l^1)$，且$\|A\|=M$.

31. 设 $\sup_i|\alpha_i|<+\infty$，令 $Ax=y$，　其中

$x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots)\in l^1$， $y=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_n,\cdots)$， $\eta_i=\alpha_i\xi_i$

$(i=1,\ 2,\ \cdots)$，求证：$A\in B(l^1)$，且$\|A\|=\sup_i|\alpha_i|$； A^{-1} 存在并且是有界线性算子的充要条件为 $\inf_i|\alpha_i|>0$.

32. 设 (a_{ij}) 是无穷矩阵，满足

（Ⅰ） $|a_{ij}|\leqslant a \quad \forall i,j$

（Ⅱ）当 $|i-j|>k$ 时 $|a_{ij}|=0$

其中 a， k 是正的常数。令 $y=Ax$，　其中

$$x=(\xi_1,\cdots,\ \xi_n,\ \cdots)\ \in l^p \quad (1\leqslant p\leqslant\infty);$$

$$y=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_n,\ \cdots),\ \ \eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots),$$

求证：$A\in B(l^p)$，且求$\|A\|$的一个上界。

33. 设 $\{A_n\}\subset B(X,\ Y)$，其中X为 Banach 空间，$A\in B(X;\ Y)$，求证：$\forall x\in X$，有 $\|A_nx-Ax\|\to 0\Longleftrightarrow\{A_n\}$ 满足下列两条件：（Ⅰ）$\{\|A_n\|\}$ 是有界数列；（Ⅱ）对X的某稠密子集D中每个元素$y\in D$有 $\|A_ny-Ay\|\to 0$.

34. 设X为线性赋范空间，$x_1,\ \cdots,\ x_n\in X$，求证：对任一$y\in X$，　$\exists x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i$ 使得

$$\|x-y\|=d(y,\ M)$$

其中 $M=\mathrm{span}\{x_1, \cdots x_n\}$. （称此 x 为 y 的**最佳逼近元**）

35. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，若 $A: X\to X$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\neq y}\frac{\|A^n(x)-A^n(y)\|}{\|x-y\|}<+\infty$$

求证：存在唯一 $x_0\in X$，使得 $A(x_0)=x_0$

36. 设 Y 为线性赋范空间 X 的线性子空间，且 Y 不在 X 中稠密，求证：存在 $x_n\in X$，满足 $\|x_n\|=1$，且 $d(x_n, Y)\to 1$.

37. $(X, \|\cdot\|)$ 为线性赋范空间，求证：$\dim X=+\infty$ $\Longleftrightarrow$ 存在 $\{x_n\}\subset X$，满足 $\|x_n\|=1$ 且 $\|x_m-x_n\|\geqslant 1$ $\forall m\neq n$.

§ 3.3 有界线性泛函与共轭空间

1. 设 $g(x)=x(t_0)$，$x\in C[a, b]$，t_0 为 $[a, b]$ 中固定点，求证：$g\in (C[a, b])^*$，且 $\|g\|=1$.

2. 设 $f(x)=\int_a^{\frac{a+b}{2}} x(t)\,dt$，$x\in C[a, b]$，求证 $f\in (C[a, b])^*$，并求 $\|f\|$.

3. 设 $f(x)=\int_{-1}^{0} x(t)\,dt-\int_0^1 x(t)\,dt$，求证：$f\in (C[-1, 1])^*$，且求 $\|f\|$.

4. 设 $f(x)=\xi_{n_0}$，$\forall x=(\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots)\in l^\infty$，其中 n_0 为固定的自然数，求证：$f\in (l^\infty)^*$，并求 $\|f\|$.

5. 设 $y\in C[a,b]$，令 $f(x)=\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt$，$\forall x\in C[a,b]$，求证：$f\in (C[a, b])^*$.

6. 设 f 为线性赋范空间 X 上的线性泛函，求证：$f\in X^*$ $\Longleftrightarrow N(f)=\{x\in X;\ f(x)=0\}$ 为 X 的闭子空间。

7. 设 $f\in X^*$，$f\neq 0$，任取 $x_0\in X-N(f)$，求证：对任

一 $x\in X$，可唯一地表示成

$$x=y_0+\alpha x_0 \quad y_0\in N(f),\ \alpha\in K$$

其中K为X的数域。

8. 设 $f(x)=\alpha\xi_1+\beta\xi_2 \quad \forall x=(\xi_1,\ \xi_2)\in R^2$， 为 R^2 上的有界线性泛函，试将 f 保范延拓成 R^3 上的有界线性泛函 。

9. 设X为线性赋范空间，$x,\ y\in X$，如 $\forall f\in X^*$ 有 $f(x)=f(y)$，求证：$x=y$ 。

10. 设 S_1^* 为共轭空间X^*中单位球面，$x_0\in X$，如果 $\forall f\in S_1^*$ 有 $|f(x_0)|\leqslant c$，求证：$\|x_0\|\leqslant c$.

11. 设X为自反空间，求证：X为 Banach 空间。

*12. 设X为自反空间，求证：X^*也为自反空间。

*13. 设X为 Banach 空间，且X^*自反，求证：X也为自反空间。

14. 设Y为X的闭子空间，且对 $f\in X^*$，由 $f(x)=0$ $\forall x\in Y$，必有 $f(x)=0 \quad \forall x\in X$，求证：$X=Y$.

15. 设X为线性赋范空间，$x_0\in X$，$x_0\neq\theta$，求证：存在 $f\in X^*$ 使得

$$f(x_0)=1,\quad \|f\|=\frac{1}{\|x_0\|}$$

*16. 设 c_0 为收敛于 0 的数列空间，求证：$c_0^*=l^1$.

*17. 求证：$(l^p)^*=l^q$ ，$\left(p>1,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

18. 设X为数域K（R或C）上的 Banach 空间，Y为X中闭子空间，$x_0\in X-Y$ 求证：

（Ⅰ）$Y_0=\{\alpha x_0+y;\ \alpha\in K,\ y\in Y\}$是$X$中的闭子空间；

（Ⅱ）$\forall x\in Y_0$，∃唯一 $\alpha\in K$，$y\in Y$ 使得 $x=\alpha x_0+y$，且当 $f(\alpha x_0+y)=\alpha$ 时，$f\in Y_0^*$.

19. 设 $A_n \in B(X, Y)$，X为 Banach 空间，且

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax \quad \forall x \in X$，求证：$A \in B(X, Y)$.

20. 设X为线性赋范空间，$x_n \in X$，$\forall f \in X^*$，$\{f(x_n)\}$ 都有界，求证：$\{\|x_n\|\}$ 有界。

21. 设X，Y都为 Banach 空间，$A_n \in B(X, Y)$ 求证：下列命题互为等价，

（Ⅰ）$\{\|A_n\|$有界；

（Ⅱ）$\forall x \in X$，$\{\|A_n x\|\}$有界；

（Ⅲ）$\forall x \in X$，$g \in Y^*$，$\{g(A_n x)\}$有界。

22. 设 $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots) \in l^2$，求证：

$$e_n \xrightarrow{w} \theta, \text{ 但 } e_n \overset{\|\cdot\|}{\nrightarrow} \theta .$$

23. 设 $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots) \in l^1$， 求证：

$$e_n \xrightarrow{w^*} \theta, \text{ 但 } e_n \overset{w}{\nrightarrow} \theta .$$

24. 设X为线性赋范空间，x_n，$x \in X$，求证：

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \Longrightarrow x_n \xrightarrow{w} x .$$

25. 设 x_n，$x \in X$，$A \in B(X, Y)$，$x_n \xrightarrow{w} x$ 求证：

$$Ax_n \xrightarrow{w} Ax .$$

26. 设 x_n，$x_0 \in (X, \|\cdot\|)$，且 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，求证：

$x_0 \in \overline{\text{span}\{x_n\}}$

27. 设X为 Banach 空间，$f_n \in X^*$，且 $\forall x \in X$，

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$存在，令 $f_0(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，求证：$f_n \xrightarrow{w^*} f_0$.

*28. 设X为可分线性赋范空间，求证：X^*中有界集必为弱*列紧的，也即X^*中的有界序列$\{f_n\}$，必有子列$\{f_{n_k}\}$使得

$$f_{n_k} \xrightarrow{W^*} f_0 \in X^*.$$

29. 设x_n，$x_0 \in C[a, b]$，且$x_n \xrightarrow{W} x_0$，求证：

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

*30. 设$\forall \varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得只要$\|x\| = \|y\| = 1$，$\|x-y\| \geqslant \varepsilon$，就恒有$\|x+y\| \leqslant 2-\delta$，则称$(X, \|\cdot\|)$是一致凸的线性赋范空间。求证：

（Ⅰ）$C[a, b]$，$L[a, b]$，l都不是一致凸的。

（Ⅱ）当X是一致凸的线性赋范空间时，则

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 \iff x_n \xrightarrow{W} x_0 \text{ 且 } \|x_n\| \to \|x_0\|.$$

31. 设$f_n \in X^*$，且$|f_n(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall n$，$x \in X$，

令$S = \{x \in X;\ \lim_{n\to\infty} f_n(x)$存在$\}$，求证：$S$是$X$的闭子空间。

32. 设$\forall x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^p (1 < p < +\infty)$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\xi_n$都收敛，求证：$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \in l^q$.

33. 设$\forall x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in c$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\xi_n$都收敛，求证：$a = (a_1, \cdots, a_n, \cdots) \in l^1$.

34. 设对任一$x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\xi_n$都收敛，求证：$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \in l^\infty$.

35. 设 $S\subset(X,\ \|\cdot\|)$，且对任一 $\{x_n\}\subset S$，存在 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})$ 存在 $\forall f\in X^*$，求证：S 为 X 中有界集。

36. 设 $x_n=(\xi_1^{(n)},\ \cdots,\ \xi_k^{(n)},\ \cdots)$，$x_0=(\xi_1^{(0)},\ \cdots,\ \xi_k^{(0)},\ \cdots)\in l^p$，$(1<p<+\infty)$ 求证：$x_n\xrightarrow{W}x_0\iff$ 满足 $\sup\limits_n\|x_n\|<+\infty$，且 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k^{(0)}\quad(n\to\infty)\quad\forall k$.

*37. 求证：$x_n\xrightarrow{W}x(C[a,\ b)\iff$ 满足 $\sup\limits_n\|x_n\|<+\infty$，且 $\forall t\in[a,\ b]$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$.

38. 当（X，$\|\cdot\|$）为有限维时，求证：

$$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0\iff x_n\xrightarrow{W}x_0\ .$$

39. 设 $f_i\in X^*\ (i=1,2,\cdots,n)$，$\lambda_i\in K\ (i=1,2,\cdots,n)$.
考虑线性方程组：

$$f_i(x)=\lambda_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\qquad(1)$$

求证：式（1）有解$x\in X$ 的必要条件为对任意数组 $\alpha_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\in K$，若 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f_i=\theta$ 必有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i=0$.

40. 设 $M\subset(X,\ \|\cdot\|)$，求证：

$$M^{\perp}=\{f\in X^*;\ f(x)=0\quad\forall x\in M\}$$

为 X^* 的闭子空间。

41. 设 $M\subset X^*$，求证

$$^{\perp}M=\{x\in X;\ f(x)=0\quad\forall f\in M\}$$

为X中的闭子空间。

42. 设M为 $(X, \|\cdot\|)$ 的闭子空间，求证：

$$^{\perp}(M^{\perp})=M \quad .$$

43. 设 $A_n\in B(X, Y)$，且$\|A_nx\|\leqslant M\|x\|$ $\forall n$及 $x\in X$，Y为 Banach 空间， $S=\{x\in X;\ \lim\limits_{n\to\infty} A_nx$ 存在$\}$，求证：S是X的闭子空间。

44. 设 $e_1, \cdots, e_n$ 是线性赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的线性无关的向量组，M是正常数，$a_1, \cdots, a_n$ 是给定的数组。求证：存在满足条件（Ⅰ）$f(e_k)=a_k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ 及（Ⅱ）$\|f\|\leqslant M$ 的有界线性泛函 $f\in X^*$ 的充要条件为：对任何数组 $t_1, \cdots, t_n$ 都恒有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} t_k a_k\right|\leqslant M\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} t_k e_k\right\|$.

§ 3.4 闭图象定理与有界逆算子定理

1. 设X，Y 为同一数域K上的赋范空间，令

$$\|(x, y)\| \quad =(\|x\|^p+\|y\|^p)^{1/p} \quad (1\leqslant p<+\infty)$$

求证：$X\times Y$ 为赋范空间。

2. 设上题中，令 $\|(x, y)\|=\max\{\|x\|, \|y\|\}$，求证：$X\times Y$也为赋范空间。

3. 若 X，Y 都为 Banach 空间，求证题 1，2 中$X\times Y$都为 Banach 空间。

4. 设A：$D(A)(\subset X)\to Y$是有界线性算子，且$D(A)$ 为X的闭子空间，求证：A是闭算子。

5. 设A：$X\to Y$是闭算子，X，Y都是线性赋范空间，若有逆算子 A^{-1}：$Y\to X$，则 A^{-1} 必为闭算子。

6. 设A：$D(A)(\subset X)\to Y$ 是闭算子，求证：$N(A)$ 必为

X的闭子空间。

7. 设X，Y都为赋范空间，A：$X\to Y$是闭算子，求证：

（Ⅰ）X中紧集Ω的象$A(\Omega)$为Y中的闭集；

（Ⅱ）Y中紧集K的原象$A^{-1}(K)$为X中的闭集。

8. 设X，Y都为 Banach 空间，A：$D(A)(\subset X)\to Y$是闭算子，令

$$\|x\|_A=\|x\|+\|Ax\| \quad \forall x\in D(A)$$

求证：$(D(A)，\|\cdot\|_A)$为 Banach 空间。

9. 设 $X(\subset l)$是有限数列全体所成的线性子空间，令

$$Ax=\left(\xi_1，\frac{1}{2}\xi_2，\cdots，\frac{1}{n}\xi_n，\cdots\right)$$

$\forall x=(\xi_1，\cdots，\xi_n，\cdots)\in X$，求证：$A\in B(X)$，且$A^{-1}$：$X\to X$存在，但为无界线性算子，试问，这与有界逆算子定理矛盾吗？

10. 设(a_{ij})是无穷矩阵，满足

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<\infty \quad (i=1，2，\cdots)$$

记 $y=Ax$，其中 $x=(\xi_1，\xi_2，\cdots，\xi_n，\cdots)\in l^2$，

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j(i=1，2，\cdots)，\ y=(\eta_1，\eta_2，\cdots\eta_n，\cdots)\in l^2 \ .$$

求证：$A\in B(l^2)$.

11. 设无穷矩阵(a_{ij})满足：对每个$x=(\xi_1，\cdots，\xi_n，\cdots)\in l^\infty$，

$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j$ 都收敛，$(i=1，2，\cdots)$，且

$y=(\eta_1，\cdots，\eta_n，)\in l^\infty$，记 $y=Ax$，求证：$A\in B(l^\infty)$.

12. 设 $(X, \|\cdot\|_1)$, $(X, \|\cdot\|_2)$ 都是 Banach 空间，且存在常数 $M>0$，使得

$$\|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

求证：$\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的等价范数。

13. 设 X, Y, Z 都为 Banach 空间. 如果 $A \in B(X, Z)$, $B \in B(Y, Z)$, 且对每一 $x \in X$, 方程 $Ax=By$ 都有唯一的解 $y=A_1(x)$，求证：$A_1 \in B(X, Y)$.

14. 设 $X=L^2[0, 1]$, $D(A)=\{x(t); \frac{dx}{dt} \in L^2[0, 1], x(0)=x(1)=0\}$, A 是导算子，求证：$A: D(A)(\subset X) \to X$ 是闭算子，但不是有界的；A^{-1} 存在，且 A^{-1} 是有界线性算子。

15. 设 X 为 Banach 空间，线性算子 $P: X \to X$，如满足 $P^2=P$（称 P 为**投影算子**），且零空间 $N(P)$ 与值域 $R(P)$ 都是闭的，求证：P 必为有界线性算子。

16. 设 $P: X \to X$ 为投影算子，且 P 为闭算子，求证：$R(P)$ 必为闭的。

§ 3.5 紧算子

1. 设 $A: X \to Y$ 是线性算子，X, Y 为赋范空间，求证：A 为紧算子 $\Longleftrightarrow$ $A(V[\theta, 1])$ 是 Y 中列紧集。其中 $V[\theta, 1] \subset X$.

2. 在题 1 条件下，求证：A 为紧算子$\Longleftrightarrow$对任一 X 中有界点列 $\{x_n\}$, $\{Ax_n\}$ 必有收敛子列。

3. 求证：定义在有限维赋范空间 X 到任一赋范空间 Y 中取值的线性算子必为紧算子。

*4. 设A：$X\to Y$ 为紧算子，且 $R(A)=Y$，X，Y都是 Banach 空间，求证：$\dim Y<+\infty$.

5. 设 $\dim X=+\infty$，A：$X\to X$是 1—1 的紧算子，求证：$A^{-1}\in B(X)$.

6. 设X为 Banach 空间，A：$X\to X$为紧算子，求证：$I-A$ 的零空间 $N(I-A)$ 必为有限维的。

7. 求证：紧算子的值域必是可分的。

8. 设 X，Y 都为 Banach 空间，A：$X\to Y$ 为紧算子，x_n，$x\in X$，$x_n\xrightarrow{w}x$，求证：$\|Ax_n-Ax\|\to 0$.

*9. 设A：$X\to X$为紧算子，$\lambda\neq 0$，则 $\lambda I-A$ 的值域 $R(\lambda I-A)$ 必为X的闭子空间。

10. 设X为赋范空间，$x_0\in X$，$f_0\in X^*$，令$Ax=f_0(x)x_0$，求证：A：$X\to X$是紧算子。

11. 设A_n：$X\to Y$是有限秩算子，其中Y为Banach 空间，且$\|A_n-A\|\to 0$，求证：A：$X\to Y$是紧算子。

12. 设 A：$l^p\to l^p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$，

$$Ax=\left\{\xi_1,\ \frac{1}{2}\xi_2,\ \cdots,\ \frac{1}{n}\xi_n,\ \cdots\right\},\ x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^p,$$

求证：A是紧算子。

13. 设 $\lambda_n\in K$（数域R或C），$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$，

$$Ax=(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2,\cdots,\lambda_n\xi_n,\cdots)\quad\forall x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^2,$$

求证：A是 $l^2\to l^2$ 的紧算子。

14. 设A：$X\to Y$为紧算子，求证：$\forall\varepsilon>0$，存在Y的有限维子空间 $M_\varepsilon(\subset R(A)\subset Y)$ 使得

$$\inf\{\|Ax-y\|;\ y\in M_\varepsilon\}\leqslant\varepsilon\|x\|\quad\text{成立。}$$

15. 设X为赋范空间，A：$X\to X$是等距同构映射：

（Ⅰ）求证：A为紧算子$\Longleftrightarrow \dim X<+\infty$；

（Ⅱ）若 A：$X\to X$ 为拓扑同构映射，上述结论仍然成立吗？

16. 设 $A\in B(X,\ Y)$，满足 $\|Ax\|\geqslant c\|x\|$ （即为下有界的有界线性算子），求证：A为紧算子 $\Longleftrightarrow \dim X<+\infty$.

17. 设A：$X\to Y$为紧算子，M为X的子空间，求证：A在M上的限制$A|_M$：$M\to X$ 也必为紧算子。

18. 设 X 为 Banach 空间，A，B，$C\in B(X)$，若 $A=B+C$，且C^{-1}存在为紧算子，$\|B\|\|C^{-1}\|<1$，求证：A^{-1}存在，也为紧算子。

19. 设X为线性赋范空间，Y为 Banach 空间，$f_n\in X^*$，$y_n\in Y$，$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^1$，且$\|f_n\|\leqslant 1$，$\|y_n\|\leqslant 1\quad \forall n$，令

$$Ax=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(x)\,y_n,\quad x\in X$$

求证：（Ⅰ）$A\in B(X,\ Y)$，（Ⅱ）A为紧算子，

*20. 设A：$X\to Y$为紧算子。求证：$R(A)$为Y中 Banach 子空间 $\Longleftrightarrow \dim R(A)<+\infty$.

第四章　Hilbert 空间

§ 4.1 内积空间与 Hilbert 空间

1．设X为内积空间，x，$y\in X$，若对一切 $z\in X$ 均有 $(x,\ z)=(y,\ z)$，试证 $x=y$.

2．设 $X=\{(\xi_1,\ \xi_2);\ \xi_i\in C,\ i=1,\ 2,\ \}$ 且在 X 上定义范数 $\|x\|=|\xi_1|+|\xi_2|$，$\forall x=(\xi_1,\ \xi_2)\in X$，问该范数是否为内积的导出范数?

3．设 X 是内积空间，x_n，$x\in X$ 且 $\|x_n\|\to\|x\|$ 及 $(x_n,\ x)\to(x,\ x)$，试证：$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$.

4．设H是内积空间，x_1，x_2，…，x_n 是H中的向量，且满足条件

$$(x_\mu,\ x_\nu)=\begin{cases}0, & \text{当 } \mu\neq\nu\\ 1, & \text{当 } \mu=\nu\end{cases}$$

试证：$\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ 是线性无关的。

5．设X是实内积空间，x，y 为非零元，求证：

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\| \iff \exists\ \lambda>0 \text{ 使得 } y=\lambda x$$

*6．设 X_1，…，X_n，…为一列内积空间，令

$$X=\left\{\{x_n\};\ x_n\in X_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<+\infty\right\}$$

且

当 $\{x_n\}$，$\{y_n\}\in X$ 时，规定：

$$\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}\overset{\Delta}{=}\{\alpha x_n+\beta y_n\},\ \alpha,\ \beta\in K$$

$$(\{x_n\},\ \{y_n\})\overset{\Delta}{=}\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,\ y_n)$$

试证：X是内积空间，又当 X_n 都是 Hilbert 空间时，X 也是 Hilbert 空间。

7. 设X是 n 维线性空间，$\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$ 是 X 的一组基，试证：$(x,\ y)$ 成为X上内积的充分且必要的条件是存在 $n\times n$ 正定方阵 $A=(a_{ij})$ 使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\ \sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}\,x_i\,\overline{y}_j$$

8. 设X为内积空间，$y\in X$，试证：映射 f_y：$X\to K$ 且 $f_y(x)=(x,\ y)$ 是X上线性连续泛函，且 $\|f_y\|=\|y\|$.

9. 设X是内积空间，X^*是它的共轭空间，f_y 表示X上线性泛函 $f_y(x)=(x,\ y)$，若X到 X^* 的映射 F：$y\to f_y$ 是双射，则X为 Hilbert 空间。

10. 说明 $C[0,\ 1]$，l^p $(p\neq 2)$ 不是内积空间。

11. 设X为复内积空间，$A\in B(X)$，试证：

$$(Ax,\ y)=\frac{1}{4}\{(A(x+y),\ x+y)-(A(x-y),\ x-y),$$
$$+i(A(x+iy),\ x+iy)-i(A(x-iy),x-iy)\}$$

12. 在复内积空间X中，若 $(Ax,\ x)=0$，$\forall x\in X$，试证：$A=\theta$，此结论在实内积空间中不成立。

13. 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 R^n 中的一组基，矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 $R^n\to R^n$ 的有界线性算子，证明：对$\forall x\in R^n$，有

$$(Ax,\ x)=x^TAx$$

其中，$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$

14. 设H为 Hilbert 空间，$A\in L(H,\ H)$，且满足

$$(Ax,\ y)=(x,\ Ay)\quad \forall x,\ y\in H$$

试证：$A\in B(H)$.

15. 设 T，S 为 Hilbert 空间H上的线性算子，满足

$$(Tx,\ y)=(x,\ Sy),\ \forall x,\ y\in H$$

试证：T为有界的。

§ 4.2 Hilbert 空间中的坐标系

1. 若X为实内积空间，试证：

$$x\perp y \iff \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$$

又若X为复内积空间，上面结论是否成立？

2. 若X为实内积空间，试证：

$$(x+y)\perp(x-y) \iff \|x\|=\|y\|$$

当 $X=R^2$ 时，说明上面表示式的几何意义。又若X为复内积空间，条件 $\|x\|=\|y\|$ 意味着什么？

3. 设X为内积空间，K 为数域，试证：

$$x\perp y \iff \|x+\lambda y\|=\|x-\lambda y\|,\ \forall\lambda\in K \text{ 成立.}$$

4. 设X为内积空间，K为数域，试证：

$$x\perp y \iff \|x+\lambda y\|\geqslant\|x\|,\ \forall\lambda\in K$$

5. 证明：（Ⅰ）若 $x\neq\theta$，$y\neq\theta$，$x\perp y$，则集合$\{x,\ y\}$为线性无关集；（Ⅱ）若 $x_i\neq\theta$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$x_i\perp x_j$ $(i\neq j)$，则$\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ 为线性无关集。

6. 设X是内积空间，M和N是X的子集，证明：当$M\perp N$时，$M\subset N^{\perp}$，$N\subset M^{\perp}$.

7. 设X是内积空间，M，N是X的非空子集，且$M\subset N$，试证：（Ⅰ）$M^{\perp}\supset N^{\perp}$；　　（Ⅱ）$M^{\perp}=((M^{\perp})^{\perp})^{\perp}$；
（Ⅲ）$M^{\perp}=(\overline{M})^{\perp}$.

8. 设M为 Hilbert 空间H的子空间，若 $\forall x\in H$， x在M上投影x_0均存在，则M为H的闭子空间。

9. 设M是 Hilbert 空间H的非空子集，试证：$(M^{\perp})^{\perp}$是H中包含M的最小闭子空间。

10. 设M和N是 Hilbert 空间H的两个正交的闭子空间，求证：$M\oplus N$也是H的闭子空间。

11. 设 $C[-1, 1]$ 是实值连续函数空间，定义内积

$$(f, g)=\int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,dt$$

若记M为 $C[-1, 1]$中奇函数全体，N为 $C[-1, 1]$ 中偶函数全体，求证：$M\oplus N=C[-1, 1]$，且 $M=N^{\perp}$.

12. 设H是内积空间，M、$N\subset H$，若L是由M和N张成的线性子空间，证明：$L^{\perp}=M^{\perp}\cap N^{\perp}$。

*13. 设H是 Hilbert 空间，M为H的闭子空间，证明：M为H上某个非零线性连续泛函的零空间的充要条件是$M^{\perp}$为一维子空间。

*14. 设H为 Hilbert 空间，M为H的闭子空间，$x_0\in H$，证明：

$$\begin{aligned}&\min\{\|x-x_0\|;\ x\in M\}\\&=\max\{|(x_0, y)|;\ y\in M^{\perp},\ \|y\|=1\}.\end{aligned}$$

15. 设H为 Hilbert 空间，M是H的凸子集，$\{x_n\}\subset M$，且 $\|x_n\|\to d=\inf\limits_{x\in M}\|x\|$，证明：$\{x_n\}$在$H$中收敛。

16. 设X为内积空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$为$X$中标准正交列，$\forall x\in X$，记 $x_0=\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k$，试证：任取 $\alpha_i\in K$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，有 $\|x-x_0\|\leqslant\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|$.

17. 设 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是内积空间X中的标准正交列，试证：

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x, e_k)(y, e_k)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|, \quad \forall x, y\in X$$

*18. 设 $\boldsymbol{F}=\{e_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间X中标准正交系，试证：$\forall x\in X$，x关于$\boldsymbol{F}$的 Fourier 系数$\{(x, e_\lambda); \lambda\in\Lambda\}$中最多只有可列多个不为零。

19. 设H为可分 Hilbert 空间，证明：H中任何标准正交系至多为可列集。

20. 设H为 Hilbert 空间，试证：

$\boldsymbol{F}=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为标准正交基 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{F}$ 为完备标准正交列，即 $\forall x\in H$，均有

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$$

21. 设H为 Hilbert 空间，$\boldsymbol{F}=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是H中标准正交列，$E=\overline{\text{span}\boldsymbol{F}}$，试证下列命题等价：

（Ⅰ）$\boldsymbol{F}$ 为标准正交基；

（Ⅱ）$E=H$；

（Ⅲ）$\forall x\in H$，有 $x=\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$.

22. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间H中的标准正交基，如

果 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\in H$， $y=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i e_i\in H$，试证：

$$(x,\ y)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\overline{\beta}_i \text{ 且 } \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\overline{\beta}_i \text{ 绝对收敛。}$$

23．设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间H中标准正交列，证明：

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是标准正交基 $\Longleftrightarrow$ $(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}(x,\ e_n)\overline{(y,\ e_n)}$

$\forall x,\ y\in H$

24．设$\boldsymbol{F}=\{e_n\}$ 为 Hilbert 空间H中标准正交列，证明：

数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e_n$ 依H中范数收敛。

25．设 $\boldsymbol{F}=\{e_n\}$ 为 Hilbert 空间H中的标准正交列，若

$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 收敛且设 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n e_n$

证明：$\alpha_n=\beta_n$ $(\forall n)$ 成立且 $\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$.

26．在 $C[-1,\ 1]$中，将 $x_0=1$，$x_1=t$，$x_2=t^2$ 用许密特正交法化为标准正交系。

27．设 $\boldsymbol{F}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int};\ n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots\right\}$证明：

（Ⅰ）$\boldsymbol{F}$ 是 $L^2[-\pi,\ \pi]$ 中标准正交基；

（Ⅱ）$\forall x\in L^2[-\pi,\ \pi]$，有 $x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{int}$ 且当 $[a,\ b]\subset[-\pi,\ \pi]$ 时，可逐项积分，即

$$\int_a^b x(t)\,dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\int_a^b e^{ikt}\,dt$$

28. 设 f_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，f 为 Hilbert 空间H中元素，试证：$\|f_n-f\|\to 0 \iff \forall g\in V[\theta,\ 1]$，均有

$$(f_n,\ g)\xrightarrow{\text{一致}}(f,\ g)$$

§ 4.3 Hilbert 空间的自共轭性与伴随算子

1. 设H为 Hilbert 空间，任意取定 $y\in H$，试证：映射 F_y：$x\mapsto(x,\ y)$ 是H上的线性连续泛函，且 $\|F_y\|=\|y\|$.

2. 在 l^2 中举例说明强、弱收敛不等价，且证明：当 $x_n\xrightarrow{W}x_0$，$\|x_n\|\to\|x_0\|$ 时，必有 $x_n\to x_0$.

3. 设H为 Hilbert 空间，若$\forall f\in H$，数列$\{(f,\ g_n)\}$均为 Cauchy 列，就称点列 $\{g_n\}$ 为 H 中**弱** Cauchy **列**。若H中任一弱 Cauchy 列都有属于 H 的弱极限，则空间称为**（序列）弱完备**。试证：每一个H空间均为（序列）弱完备。

4. 设H为 Hilbert 空间，$\{x_n\}$ 为H中有界序列，则 $\{x_n\}$ 含有弱收敛子序列 $\{x_{n_k}\}$.

*5. 设H为 Hilbert 空间，映射 $\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 是 $H\times H\to K$（R或C）的泛函，若满足：

（Ⅰ）$\varphi(\alpha x+\beta y,\ z)=\alpha\varphi(x,\ z)+\beta\varphi(y,\ z)$；

（Ⅱ）$\varphi(x,\ \alpha y+\beta z)=\overline{\alpha}\,\varphi(x,\ y)+\overline{\beta}\,\varphi(x,\ z)$.

其中，x，y，$z\in H$，α，$\beta\in K$. 则称 $\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 是H上的**双**

线性泛函（亦称**拟双线性泛函**）。若 $|\varphi(x,\ y)|\leqslant C\|x\|\cdot\|y\|$，$\forall x,\ y\in H$，$C$为常数，称 $\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 为有界，且记

$$\|\varphi\|\overset{\Delta}{=}\sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}}|\varphi(x,\ y)|.$$ 试证：若 $\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 为双线性有界泛函，则存在唯一的算子$A\in B(H)$，使得 $\varphi(x,\ y)=(Ax,y)$，$\forall x,\ y\in H$，且 $\|\varphi\|=\|A\|$.

6. 若 $\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 是 Hilbert 空间 $H\times H\to K$ 的双线性泛函，且满足**厄米**（Hermite）**性**，即 $\varphi(x,\ y)=\overline{\varphi(y,\ x)}$，$\forall x,\ y\in H$，证明：当 $\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 为有界时，必存在唯一的自伴算子 $A\in B(H)$ 使得

$$\varphi(x,\ y)=(Ax,\ y),\quad \forall x,\ y\in H.$$

7. 设A是实 Hilbert 空间H上有界线性算子，$\|A\|<1$ 试证：

$$\{x;\ Ax=x\}=\{x;\ A^*x=x\}.$$

8. 设H为复 Hilbert 空间，A是H上有界线性算子，试证：$A=-A^*\iff\forall x\in H$，均有 $Re(Ax,\ x)=0$.

9. 若$\{T_n\}$是 Hilbert 空间H上有界线性算子列，且 $\|T_n-T\|\to 0$，试证：$T_n^*\to T^*$.

10. 设T是 $l^2\to l^2$ 的右位移算子，即 $\forall x=\{\xi_i\}\in l^2$，有 $Tx=(0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)$，求$T$的共轭算子 T^*。

11. 设A是 $l^2\to l^2$ 的有界线性算子，当 $x=\{x_i\}\in l^2$ 时，记 $Ax=\{y_j\}$，$A^*x=\{y_j^*\}$，其中 $y_j=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ji}x_i$，$y_j^*=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ji}^*x_i$. 试证：$a_{ji}^*=\overline{a_{ij}}$.

12. 设 A_n ($n=1, 2, \cdots$) 是复 Hilbert 空间H上一列自伴算子，且有$\lim\limits_{n\to\infty}(A_nx, y)=(Ax, y)$，对$\forall x, y\in H$成立，证明：$A$也是自伴算子。

13. 设A是 Hilbert 空间H上的自伴算子，证明：

$$A=\theta \iff (Ax, x)=0 \quad \forall x\in H \text{ 均成立。}$$

*14. 设A为 Hilbert 空间H上的自伴算子，若令

$$m=\inf_{\|x\|=1}(Ax, x), \qquad M=\sup_{\|x\|=1}(Ax, x)$$

证明：$\|A\|=\max\{|m|, |M|\}$.

15. 设H为复 Hilbert 空间，$A: H\to H$，且为正算子，即 $(Ax, x)\geqslant 0$, $\forall x\in H$，试证：

$$|(Ax, y)|^2\leqslant(Ax, x)(Ay, y), \quad \forall x, y\in H.$$

16. 设X为复 Hilbert 空间，$A: X\to X$，且为严格正算子，即 $\exists\alpha_0>0$，使 $(Ax, x)\geqslant\alpha_0(x, x)$，$\forall x\in X$，试证：$A^{-1}$ 存在且 $\|A^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{\alpha_0}$.

17. 设H为复 Hilbert 空间，J是$H\to H$的严格正算子，若定义 $(x, y)_J\overset{\Delta}{=}(Jx, y)$，$\forall x, y\in H$，试证：

（Ⅰ）H按内积 $(\cdot, \cdot)_J$ 为完备空间，记为H_J；

（Ⅱ）若 $A\in B(H_J)$，则A为自伴算子$\iff JA=A^*J$，其中，A^*为A在 Hilbert 空间H上的共轭算子。

*18. 设H，H_1均为 Hilbert 空间，定义**乘积** Hilbert **空间**

$H\times H_1\overset{\Delta}{=}\{\{x, y\};\ x\in H, y\in H_1\}$，规定内积为：

$$(\{x,\ y\},\ \{x_1,\ y_1\})\overset{\Delta}{=\!=}(x,\ x_1)+(y,\ y_1)_1$$

其中 $(\cdot,\ \cdot)$，$(\cdot,\ \cdot)_1$ 分别为空间H，H_1 中的内积，易知 $H\times H_1$为完备空间，若有算子V：$H\times H_1\to H_1\times H$，且

$$V(\{x,\ y\})\overset{\Delta}{=\!=}\{-y,\ x\}$$

试证：（Ⅰ）$V\in B(H\times H_1,\ H_1\times H)$，且 $\|V\|=1$，

（Ⅱ）$V^*\in B(H_1\times H,\ H\times H_1)$，且

$$V^*(\{y,\ x\})=\{x,\ -y\}$$

（Ⅲ）$V^*V=I_{H\times H_1}$，$VV^*=I_{H_1\times H}$，$\|V^*\|=1$.

*19. 设 $\varphi(\cdot,\ \cdot)$ 是内积空间X上的双线性泛函，如果

$$\sup_{\|x\|=1}|\varphi(x,\ x)|<+\infty$$

问φ是否为连续的？

20. 设 p_1 和 p_2 是 Hilbert 空间H上的两个投影算子，且 $P_1+P_2-P_1P_2$ 也是投影算子，试证：$P_1P_2=P_2P_1$.

21. 设e_1，e_2，…，e_n 为内积空间H中的标准正交向量，$L=\mathrm{span}\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$，试求：（Ⅰ）$\forall x\in H$，$P_Lx$ 的表示式；（Ⅱ）$P_Lx=x$ 的充要条件；（Ⅲ）$P_Lx=\theta$ 的充要条件。

22. 设H为复 Hilbert 空间，$P\in B(H)$，试证：

$$P\text{为投影算子}\iff\|Px\|^2=(Px,\ x).$$

又问，若H为实空间，上述结论是否仍成立？

*23. 设 P_1，P_2 是 Hilbert 空间 H 上可交换的两个投影算子，试证：$P=P_1+P_2-P_1P_2$ 也是投影算子，且满足

（Ⅰ）$P\geqslant P_1$，$P\geqslant P_2$，即 $(Px,\ x)\geqslant(P_1x,\ x)$，

$(Px,\ x)\geqslant(P_2x,\ x)$，$\forall x\in H$.

（Ⅱ）对任一满足条件 $Q\geqslant P_1$，$Q\geqslant P_2$ 的投影算子Q必有 $Q\geqslant P$.

24. 设 P_L，P_M 是 Hilbert 空间H上的投影算子，L，M分别为 P_L，P_M 的投影子空间，若有 $P_LP_M=P_MP_L=O$，就称 P_L 和 P_M 是**正交的**，记为 $P_L\perp P_M$，试证：

（Ⅰ）$P_L\perp P_M \iff L\perp M$；

（Ⅱ）$P_L\perp P_M \iff P_L+P_M$ 是投影算子 $P_{L\oplus M}$.

25. 设 $\{P_n\}$ 是 Hilbert 空间H上一列两两正交的投影算子，$\{\lambda_n\}$ 是有界数列，试证在H上必有有界线性算子A使得

$$A=(\text{强})\lim_{n\leftarrow\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda_kP_k\ .$$

26. 设 P_1，P_2 为 Hilbert 空间H上的投影算子，试证下列命题等价：

（Ⅰ）$P_2P_1=P_1P_2=P_1$；

（Ⅱ）$\forall x\in H$，$\|P_1x\|\leqslant\|P_2x\|$；

（Ⅲ）$P_1\leqslant P_2$；

（Ⅳ）$N(P_1)\supset N(P_2)$；

（Ⅴ）$R(P_1)\subset R(P_2)$.

27. 设 P_1，P_2 为 Hilbert 空间H上投影算子，试证：

（Ⅰ）P_1P_2 为投影算子 $\iff P_1P_2=P_2P_1$；

（Ⅱ）P_2-P_1为投影算子 $\iff R(P_1)\subset R(P_2)$.

28. 设X和Y是 Hilbert 空间，$A\in B(X, Y)$，试证：

（Ⅰ）$N(A)=R(A^*)^{\perp}$；

（Ⅱ）$N(A^*)=R(A)^{\perp}$；

（Ⅲ）$\overline{R(A)}=N(A^*)^{\perp}$；

（Ⅳ）$\overline{R(A^*)}=N(A)^{\perp}$.

29. 设H是复 Hilbert 空间，$A\in B(H)$，如果$AA^*=A^*A$，称A为**正常算子**。证明：

（Ⅰ）当A为正常算子时，必有$\|A^2\|=\|A\|^2$；

（Ⅱ）若A为自伴算子必为正常算子。

*30. 设T为复 Hilbert 空间H上的正常算子，A和B分别为T的实部和虚部，证明：$\|T\|^2=\|A^2+B^2\|$.

31. 设H为复 Hilbert 空间，$A\in B(H)$，证明：

A为正常算子 $\Longleftrightarrow$ $\|A^*x\|=\|Ax\|$，$\forall x\in H$.

32. 设H为复 Hilbert 空间，$T\in B(H)$，且T为正的自伴算子，若有自伴算子 $A\in B(H)$，满足$A^2=T$，就称A为T的**平方根**，如果A亦为正算子，则称A为T的**正平方根**，并记为$A=T^{\frac{1}{2}}$，试求算子 $A: R^2\to R^2$，使得 $A^2=I$，并指出哪个平方根是I的正方根？

33. 设 $A\in B(H)$，H 为复 Hilbert 空间，A 为正自伴算子，利用A的平方根，试证：$\forall x, y\in H$，有

$$|(Ax, y)|\leqslant(Ax, x)^{\frac{1}{2}}(Ay, y)^{\frac{1}{2}}$$

34. 设A为复 Hilbert 空间H上有界正自伴线性算子，证明：（Ⅰ） $\|Ax\|\leqslant\|A\|^{\frac{1}{2}}\cdot(Ax, x)^{\frac{1}{2}}$；

（Ⅱ）$(Ax,\ x)=0 \iff Ax=\theta$.

35. 设H为 Hilbert 空间，$U\in B(H)$，若U是满射且为保范的，即 $\|Ux\|=\|x\|$，$\forall x\in H$，则称U是**酉算子**。

试证：（Ⅰ）U为酉算子$\iff U^*U=UU^*=I$ ；

（Ⅱ）若$H\neq\{\theta\}$，$\|U\|=1$ ；

（Ⅲ）$U^{-1}(=U^*)$ 是酉算子；

（Ⅳ）U是正常算子。

36. 设H为 Hilbert 空间，A：$H\to H$是线性算子，且 $\|Ax\|=\|x\|\quad\forall x\in H$，若$A$不为酉算子，则 $R(A)\subsetneq H$；且 $R(A)$ 为闭子空间。

37. 设U是 Hilbert 空间 $L^2[0,\ 2\pi]$中如下定义的算子：

$$(Uf)(t)\overset{\Delta}{=}e^{it}f(t),\quad f(t)\in L^2[0,\ 2\pi]$$

证明U是酉算子。

*38. 设A：$D(A)\to H$ 的线性算子，H为 Hilbert 空间，$\overline{D(A)}=H$，若有算子A^*：$D(A^*)\to H$，使得 $\forall y\in D(A^*)$，$\forall x\in D(A)$，均有 $(Ax,\ y)=(x,\ A^*y)$，则称 A^* 为 A 的 Hilbert **伴随算子**（这里A可能是无界的）。试证，A 的 Hilbert 伴随算子 A^* 总是闭算子。

39. 若线性算子A有一扩张A_1为闭线性算子，则A称为**可闭的**，而A_1称为A的**闭线性扩张**(也称为**闭延拓**)。若 A_1 为A的闭线性扩张，而A的任何闭线性扩张也是A_1的闭线性扩张，则称A_1为**极小的**闭线性扩张。如果A的极小闭线性扩张存在，则记为 $\overline{A}$，亦称A**的闭包**。

设A：$D(A)\to l^2$，其中 $D(A)=\{x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,$

0，…)； n 为任意自然数}，且 $Ax=(\xi_1,\ 2\xi_2,\ \cdots,\ n\xi_n,$ 0，…)，试证：

（Ⅰ）A 是非闭算子。

（Ⅱ）算子 A_1：$D(A_1)\to l^2$，其中

$$D(A_1)=\left\{x=\{\xi_i\}\in l^2\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}n^2|\xi_n|^2<+\infty\right\};$$

且 $A_1x=(\xi_1,\ 2\xi_2,\ \cdots,\ n\xi_n,\ \cdots)$ 是 A 的闭线性扩张。

*40. 设 H 为 Hilbert 空间，A：$D(A)\to H$，$\overline{D(A)}=H$（称 A 为**稠定的**），证明 A 为可闭的 $\Longleftrightarrow$ A^* 为稠定的，即 $\overline{D(A^*)}=H$.

习题解答及提示

§1.1 集合与映射

1. $\{5, 9\}$

2. 利用结合律与分配律，有

$$A\cap(B\cup C\cup D)=A\cap(B\cup(C\cup D))$$

$$=(A\cap B)\cup(A\cap(C\cup D))$$

$$=(A\cap B)\cup((A\cap C)\cup(A\cap D))$$

$$=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)$$

3. (I) $x\in A-B \iff x\in A$ 且 $x\overline{\in}B$

$$\iff x\in A\cap B^c$$

所以 $$A-B=A\cap B^c$$

又 $$A-(A\cap B)=A\cap(A\cap B)^c$$

$$=A\cap(A^c\cup B^c)$$

$$=(A\cap A^c)\cup(A\cap B^c)$$

$$=A\cap B^c$$

$$=A-B$$

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap B^c$$

$$=(A\cap B^c)\cup(B\cap B^c)$$

$$= A \cap B^c$$

$$= A - B$$

故 $$A - B = A \cap B^c = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$$

（Ⅱ）—（Ⅴ）类似证明。

4.（证法一） 由题3（Ⅴ），有

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - (A \cap B)) \cup (B - (A \cap B))$$

$$= (A - B) \cup (B - A)$$

（证法二） 利用对偶律，有

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$

$$= (A \cap (A \cap B)^c) \cup (B \cap (A \cap B)^c)$$

$$= (A \cap (A^c \cup B^c)) \cup (B \cap (A^c \cup B^c))$$

$$= ((A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)) \cup ((B \cap A^c)$$

$$\cup (B \cap B^c))$$

$$= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

$$= (A - B) \cup (B - A)$$ 证毕

注 $(A \cup B) - (A \cap B)$ 或 $(A - B) \cup (B - A)$ 称为**对称差**，记为 $A \Delta B$。

5. 先将关系式化简，即

$$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c)$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) = A \cup B$$

恒有 $B \subset A \cup B = A \cup (B - A)$ 成立，故只须求使关系式

$B \supset A \cup B$ 成立的充分必要条件。

显然，当且仅当 $A \subset B$ 时，有 $A \cup B \subset B$ 成立，因此等式 $A \cup (B-A) = B$ 成立之充分且必要条件为 $A \subset B$。

6. 解法类似题 5，等式成立之充分必要条件为

$$B = \phi$$

7. (I) $(A \cup C) - (B \cup D)$

$$= (A \cup C) \cap (B \cup D)^c$$

$$= (A \cup C) \cap (B^c \cap D^c)$$

$$= (A \cap B^c \cap D^c) \cup (C \cap B^c \cap D^c)$$

$$\subset (A \cap B^c) \cup (C \cap D^c)$$

即 $$(A \cup C) - (B \cup D) \subset (A-B) \cup (C-D)$$

但是，若取 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{1, 2\}$，$C = \{1\}$，$D = \{2\}$，则有

$$(A-B) \cup (C-D) = \{1, 3, 4\}$$

$$(A \cup C) - (B \cup D) = \{3, 4\}$$

故只有 $(A \cup C) - (B \cup D) \subseteq (A-B) \cup (C-D)$ 等式不成立。

(II) $(A \cup C) - (B \cap D)$

$$= (A \cup C) \cap (B \cap D)^c = (A \cup C) \cap (B^c \cup D^c)$$

$$= (A \cap (B^c \cup D^c)) \cup (C \cap (B^c \cup D^c))$$

$$\supset (A \cap B^c) \cup (C \cap D^c) = (A-B) \cup (C-D)$$

若取 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{1, 2\}$，$C = \{1\}$，$D = \{2\}$，

则易知

$$(A\cup C)-(B\cap D)\supsetneq(A-B)\cup(C-D)$$

即等号不成立。

8. (I) $\forall x_0\in E\,(f(x)>c)$

有

$$f(x_0)>c \quad 且 \quad x_0\in E$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)$$

所以 $\exists n_0$ 使得 $f_{n_0}(x_0)>c$,

故

$$x_0\in E\,(f_{n_0}(x_0)<c)$$

于是

$$x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E\,(f_n(x)>c)$$

反之

若取 $x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E\,(f_n(x)>c)$

则

$\exists n_0$，使得 $f_{n_0}(x_0)>c$ 且 $x_0\in E$

由单调性， $f(x_0)\geqslant f_{n_0}(x_0)>c$

故

$$x_0\in E\,(f(x)>c)$$

因此

$$E(f(x)>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)>c)$$

（Ⅱ） $E=[a,\ b]$ 取为基本集

由

$$(E(f(x)>c))^c=(\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)>c))^c$$

即得

$$E(f(x)\leqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(E(f_n(x)>c))^c$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)\leqslant c)\quad \text{证毕}$$

9. （Ⅰ） $y\in f(A\cup B)$

$\Longleftrightarrow \exists x\in A\cup B$，使得 $f(x)=y$

$\Longleftrightarrow \exists x\in A$ 或 $x\in B$，使得 $f(x)=y$

$\Longleftrightarrow y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)$

$\Longleftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)$

即得证

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$$

又

若 $x\in f^{-1}(C\cup D)$

$\Longleftrightarrow f(x)\in C\cup D$

$\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(C)$ 或 $x\in f^{-1}(D)$

$\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

则

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

（Ⅱ）若　　$y \in f(A \cap B)$

即　$\exists x \in A \cap B$，使 $y = f(x)$

$$\Longrightarrow \quad y \in f(A) \cap f(B)$$

所以

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

反之未必成立。例如，若 $f: R \to R$ 且 $y = f(x) = x^2$ 。

取 $A = \{1, 2\}$，$B = \{-1, -2\}$

则

$$(f(A \cap B) = \phi) \subsetneqq (f(A) \cap f(B)) = \{1, 4\}$$

又

$$x \in f^{-1}(C \cap D)$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x) \in C \cap D$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in f^{-1}(C) \text{ 且 } x \in f^{-1}(D)$$

故有

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

（Ⅲ）若　　$y \in f(f^{-1}(D))$

则

$$\exists x \in f^{-1}(D) \text{ 使得 } y = f(x)$$

所以

$$y \in D, \text{ 即 } \quad f(f^{-1}(D)) \subset D$$

又

若 $x \in A$

则

$$f(x) \in f(A)$$

从而

$x \in f^{-1}(f(A))$，即 $A \subset f^{-1}(f(A))$　　证毕

注　(Ⅲ)中两关系式一般不能改为等式。如取 $A=\{1, 2\}$，$D=\{-1, 1, -4, 4\}$，则对映射 $y=f(x)=x^2$，有

$$f(f^{-1}(D))=f(\{1, 2\})=\{1,4\} \subsetneq \{1,-1,-4,4\}=D$$

且

$$f^{-1}(f(A))=f^{-1}(\{1, 4\})=\{-1, 1, -2, 2\} \supsetneq A$$

10. (Ⅰ)$\Longrightarrow$(Ⅱ) 显然成立

(Ⅱ)$\Longrightarrow$(Ⅲ) 若不然，设 $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$ 且 $x_1 \neq x_2$ 则

$$f(x_1)=f(x_2)=y$$

由(Ⅱ)知 $x_1=x_2$ 导出矛盾，故(Ⅲ)成立。

(Ⅲ)$\Longrightarrow$(Ⅰ) 亦用反证法得证。

11. (Ⅰ)$\Longrightarrow$(Ⅱ) 由题9(Ⅱ)有 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

现只须证其相反方向的关系式。

$\forall y \in f(A) \cap f(B)$ 则 $\exists x_1 \in A, x_2 \in B$

使得

$$y=f(x_1) \quad 及 \quad y=f(x_2)$$

由条件(Ⅰ)即知

$$x_1 = x_2 \in A \cap B$$

于是

$$y = f(x_1) = f(x_2) \in f(A \cap B)$$

即有（Ⅱ）成立

（Ⅱ）$\Longrightarrow$（Ⅲ） 对 X 任意子集A，恒有 $A \subset f^{-1}[f(A)]$，故只须证 $A \supset f^{-1}[f(A)]$。

$\forall x \in f^{-1}[f(A)]$，$\exists y \in f(A)$ 使 $y = f(x)$，再由 $y \in f(A)$，有 $x_1 \in A$，使 $y = f(x_1)$。

若设 $x \neq x_1$，则由 $y \in f(\{x\}) \cap f(\{x_1\}) \subset f(\{x\} \cap \{x_1\}) = f(\phi) = \phi$，导出矛盾，故 $x = x_1 \in A$，（Ⅲ）成立。

（Ⅲ）$\Longrightarrow$（Ⅰ） 设 $y = f(x_1) = f(x_2)$ 且 $x_1 \neq x_2$，即

$$\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}(\{y\})$$

由条件 $f^{-1}[f(A)] \subset A$，故若取 $A = \{x_1\}$ 就有 $\{x_1, x_2\} \subset f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}[f(A)] \subset A$，导出矛盾，所以 $x_1 = x_2$，f 为单射，证毕。

12.（Ⅰ）、（Ⅱ）显然成立。

（Ⅲ）“$\Longrightarrow$” 若 $x \overline{\in} A$，有 $\chi_A(x) = 0$，故总有 $\chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$。

若 $x \in A$，有 $x \in B$，于是 $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$，关系式仍然成立。

“$\Longleftarrow$” 反证。若存在 $x \in A$，但 $x \overline{\in} B$，则 $\chi_A(x) = 1$ 且 $\chi_B(x) = 0$ 与条件矛盾，$\therefore$ $A \subset B$ 。

（Ⅳ） 若 $x \in A \cup B$，则 $x \in A$ 或 $x \in B$，且有 $\chi_{A \cup B}(x) = 1$，及 $\chi_A(x)$，$\chi_B(x)$ 中至少有一个等于1。即

$$x_{A\cup B}(x)=\max\{x_A(x),\ x_B(x)\}=1$$

若 $x\overline{\in}A\cup B$，则 $x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$，于是

$$x_{A\cup B}(x)=\max\{x_A(x),\ x_B(x)\}=0$$

所以，$\forall x\in X$，总有

$$x_{A\cup B}(x)=\max\{x_A(x),\ x_B(x)\}\ .$$

其余证明类同。

13. $A\times B=\{(1,\ a),\ (1,\ b),\ (1,\ c),\ (2,a),\ (2,b),$
$(2,\ c)\}$

$B\times C=\phi$

14. $X\times Y=\{(x,\ y);\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$

$X\times Y\times Z=\{(x,\ y,\ z);\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d,$
$-\infty<z<+\infty\}$

15. 用如下对应的方法可以得知 Z 和自然数集 N 对等：

N：	1	2	3	4	5	$\cdots 2n$	$2n+1$	$\cdots$
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
Z：	0	1	-1	2	-2	$\cdots n$	$-n$	$\cdots$

故 整数集 Z 为可列集。

16. 因 A 为无穷集，必有可列子集，不妨设

$$\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\}\subset A$$

取

$$A^*=A-\{a_1,\ a_3,\ \cdots,\ a_{2n+1},\ \cdots\}$$

作映射 f：$A\to A^*$，使得

$$f(x)=\begin{cases} a_{2k} & \text{当 } x=a_k \\ x & \text{当 } x\neq a_k \end{cases}$$

则 f 为双射，$A^*\sim A$ 且 $A-A^*=\{a_1, a_3, \cdots, a_{2n+1}, \cdots\}$ 为可列集。

17. 设 Q_n 是由所有 n 次整系数方程所组成的集合，则 $Q=\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$，建立 Q_n 和 $Z^{n+1}=Z\times\underbrace{Z\times\cdots\times Z}_{n+1个}$ 之间的一一对应：

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0)\leftrightarrow(a_0, a_1, \cdots, a_n)$$
$$\in Q_n \qquad\qquad \in Z^{n+1}$$

其中 $a_n\neq 0$，易知 Q_n 均为可列集 $(n=1, 2, \cdots)$

于是

$$Q=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} Q_n \quad \text{亦为可列集。}$$

注　整系数代数方程如果存在实根，就称其实根为**代数数**，一个实数如果它不是代数数就称它为**超越数**。显然代数数集是可列集，超越数集为不可列无穷集。

18. 设Q为R中有理点集，则 $\forall\alpha\in\Lambda$，$Q\cap I_\alpha$ 是非空的，取 $r_\alpha\in Q\cap I_\alpha$. 作映射$f$：$A\to Q$，使得

$$I_\alpha\mapsto r_\alpha$$

因为 $I_\alpha(\alpha\in\Lambda)$彼此不交，故 f 是A到Q的子集 $f(A)$ 上一个单射，从而A为至多可列集。

19. 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$。凡由$A$中 n 个元素所成子集的全体组成的集类记为 A_n，则

$$A^*=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n$$

$\forall\alpha\in A_n$，则α是由A中某 n 个元素组成的子集，不妨记

为 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，其中 $\alpha_k \in A \quad (k=1, 2, \cdots, n)$

作映射 $\underset{\in A_n}{\alpha} \longmapsto \underset{\in A^n}{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)}$

其中 $A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\text{个}}$ 为积集。映射为双射，且由A可列，

有A^n可列，从而 A_n 集亦可列，于是 A^* 为可列集。

20. 作映射f：$(0, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 且

$$f(x)=\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

易知 f 为双射，故由

$$(0, 1)\sim\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

即知 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 为不可列无穷集。

再作映射 g：$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, +\infty)$ 且

$$g(x)=\mathrm{tg}x$$

则 g 亦为双射，于是 $(-\infty, +\infty)$ 亦为不可列无穷集。

21.（证法一）记Q为 $(0, 1)$ 中有理数集，则Q可列，设

$$Q=\{q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots\}$$

又若从无理数集P中取出可列子集 P^*，记

$$P^*=\{p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots\}$$

作映射φ：$(0, 1)\to P$，使得

$$\varphi(x)=\begin{cases} p_{2n-1} & \text{当 } x\in P^*, \text{ 且 } x=p_n \text{ 时} \\ p_{2n} & \text{当 } x\in Q, \text{ 且 } x=q_n \text{ 时} \\ x & \text{当 } x\in(0, 1)-(P^*\cup Q) \text{ 时} \end{cases}$$

则φ是双射，所以有$(0, 1)\sim P$，即P为不可列无穷集。

（证法二）（反证法）若设P为可列集。因为

$$(0, 1)=Q\cup P \text{ 且 } Q\cap P=\phi$$

则推出（0，1）亦为可列集，导出矛盾，故P为不可列集。

*22. $\forall x\in(0, 1)$ 均可唯一地表示成无限小数的形式（若为有限小数(如0.32)，可改为无限循环小数(如0.3199…)），

$$x=0.\ x_1x_2x_3\cdots\in(0,\ 1)=B$$

作映射f：$B\to A$，使得

$$x\xrightarrow{f}(z^{(1)},\ z^{(2)})$$

其中 $z^{(1)}=0.\ z_1^{(1)}z_2^{(1)}\cdots$，　$z^{(2)}=0.\ z_1^{(2)}z_2^{(2)}\cdots$

且

$$z_n^{(1)}=x_{2n-1},\quad z_n^{(2)}=x_{2n}\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

易知f为双射，得$B\sim A$，所以 $A=\{(x,y);\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$ 为与(0，1)对等的不可列无穷集。

*23.（Ⅰ）由定义 $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$

$\Longleftrightarrow$ x属于 $A_n(n\geqslant1)$ 中的无穷多个

$\Longleftrightarrow$ $\forall n(\geqslant1)$，总有 $k_n\geqslant n$ 使得

$$x\in A_{k_n}$$

$\Longleftrightarrow$ $\forall n(\geqslant1)$，有

$$x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$$

$$\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$$

（Ⅱ）$$x\in\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$$

$\Longleftrightarrow$ $\exists n_0$，使 $x\in A_k$ $(k>n_0)$ 事实上，可取 n_0 为 A_n 中不含 x 点的有限个集中指标最大者。

$\Longleftrightarrow$ $\exists n_0$，使

$$x\in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k$$

$\Longleftrightarrow$

$$x\in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

即证得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \text{ 及 } \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

*24. (Ⅰ)由条件，$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调上升，有

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k=A_n \qquad (\forall n\geqslant 1)$$

于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k .$$

即

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\supset\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

另一方面，由上（下）限集定义可知恒有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\subset\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

所以证得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\lim_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

(Ⅱ) 利用对偶律便可证得。

*25. 由条件易知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n=A\cup B,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} E_n=A\cap B$$

若有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在，当且仅当有关系式

$$A\cap B=\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n\supset\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n=A\cup B$$

成立。而

$$A\cap B\supset A\cup B$$
$$\Longleftrightarrow A\subset A\cap B \text{ 且 } B\subset A\cap B$$
$$\Longleftrightarrow A\subset B \text{ 且 } B\subset A$$
$$\Longleftrightarrow A=B$$

所以集列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在极限的充要条件为 $A=B$ 。

*26. $\forall x\in A$，由条件 $\exists I_x\in G$，使得 $x\in I_x$，因为 x 为开区间 I_x 的内点，故 $\exists\delta>0$，使得 $V_\delta(x)\subset I_x$ 。不失一般性，可设 $V_\delta(x)$ 的端点均为有理数，则 $A\subset\bigcup\limits_{x\in A}V_\delta(x)$ 且由于一切以有理数为端点的开区间族的个数为可数个，而 $\{V_\delta(x)；\ x\in A\}$ 为它的子集族，因此 $\{V_\delta(x)；\ x\in A\}$ 中不同的区间最多为可数个，不妨设为：V_{δ_1}，V_{δ_2}，…，V_{δ_n}，…对每个 V_{δ_n} 总可找到相应的 $I_n\in G$，使 $V_{\delta_n}\subset I_n\in G$。记

$$G^*=\{I_n；\ n=1，\ 2，\ \cdots\}\subset G \text{ 为}G\text{之可数子集族。}$$

且

$$A\subset\bigcup_{x\in A}V_\delta(x)=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_{\delta_n}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n，\ G^*\text{为所求，证毕。}$$

§ 1.2 实直线与连续函数

1. $A'=\{e\}$，$\overline{A}=\{e，\left(1+\frac{1}{n}\right)^n，\ n=1，\ 2，\ \cdots\}$

$\mathring{A}=\phi$，$B'=\{0，\ 1\}$

$$\overline{B}=\left\{0,\ 1,\ \frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n};\ n=1,\ 2,\ \cdots\right\}$$

$$\overset{\circ}{B}=\phi$$

2. （Ⅰ）$\forall x\in A'$，由定义，总有

$$A\cap(V_\varepsilon(x)-\{x\})\neq\phi \qquad \forall\varepsilon>0$$

因 $A\subset B$，故有

$$B\cap(V_\varepsilon(x)-\{x\})\neq\phi \qquad \forall\varepsilon>0$$

即

$$x\in B'$$

所以

$$A'\subset B'$$

且有

$$\overline{A}=(A\cup A')\subset(B\cup B')=\overline{B}$$

（Ⅱ）因 $A'\subset(A\cup B)'$，$B'\subset(A\cup B)'$

故有

$$A'\cup B'\subset(A\cup B)'$$

反之，$\forall x\in(A\cup B)'$，即 $\forall\varepsilon>0$，总有

$$(A\cup B)\cap(V_\varepsilon(x)-\{x\})\neq\phi$$

即

$$A\cap(V_\varepsilon(x)-\{x\})\neq\phi \text{ 或者 } B\cap(V_\varepsilon(x)-\{x\})\neq\phi$$

亦即

$$x\in A' \quad 或 \quad x\in B'$$

故有

$$x\in A'\cup B'$$

从而

$$(A\cup B)'\subset A'\cup B'$$

综上所述有

$$(A\cup B)'=A'\cup B'$$

又由

$$\overline{A\cup B}=(A\cup B)'\cup(A\cup B)$$

$$=(A'\cup B')\cup(A\cup B)$$

$$=(A'\cup A)\cup(B'\cup B)=\overline{A}\cup\overline{B}$$

（Ⅲ） $\forall x\in\overline{(\overline{A})}$，易知 $\forall\varepsilon>0$，有

$$\overline{A}\cap V_\varepsilon(x)\neq\phi \quad (\text{见题 3})$$

任取 $y\in\overline{A}\cap V_\varepsilon(x)$，则

$$y\in\overline{A} \quad \text{且} \quad y\in V_\varepsilon(x)$$

由于 $V_\varepsilon(x)$ 为开集(见题 4)，故 $\exists\delta>0$ 使得

$$V_\delta(y)\subset V_\varepsilon(x) \quad \text{且} \quad A\cap V_\delta(y)\neq\phi$$

故有

$$A\cap V_\varepsilon(x)\neq\phi \quad (\forall\varepsilon>0)$$

即 $x\in\overline{A}$，于是 $\overline{(\overline{A})}\subset\overline{A}$

再由 $A\subset\overline{A}$，又有 $\overline{A}\subset\overline{(\overline{A})}$，所以证得

$$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$$

注 若利用 A' 或 $\overline{A}$ 为闭集及闭集的特征性质(即 $A=\overline{A}$)

则(Ⅲ)的证明可简化。

3. (Ⅰ)$\Longrightarrow$(Ⅱ) 设 $x_0\in\overline{A}=A\cup A'$，则或 $x_0\in A$ 或 $x_0\in A'$

若 $x_0\in A$，(Ⅱ)已成立

若 $x_0\overline{\in}A$，$x_0\in A'$，则 $\forall\varepsilon>0$，总有

$$A\cap(V_\varepsilon(x_0)-\{x_0\})=A\cap V_\varepsilon(x_0)\neq\phi,$$ (Ⅱ)亦成立。

(Ⅱ)$\Longrightarrow$(Ⅲ) 由(Ⅱ)知，$\forall n$，有

$$A\cap V_{\frac{1}{n}}(x_0)\neq\phi$$

故可取 $x_n\in A\cap V_{\frac{1}{n}}(x_0)\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$，则

$$x_n\in A\ \text{且}\ |x_n-x_0|<\frac{1}{n}$$

即有

$$x_n\to x_0\quad(n\to\infty)$$

(Ⅲ)$\Longrightarrow$(Ⅰ) 若有 $x_n\in A$，且 $x_n\to x_0$

当 $x_0\in A$ 时，(Ⅰ)已成立

当 $x_0\overline{\in}A$ 时，则 $x_0\neq x_n$，且 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n\geqslant N$ 时有 $|x_n-x_0|<\varepsilon$ 成立，故

$$A\cap(V_\varepsilon(x_0)-\{x_0\})\neq\phi$$

即 $x_0\in A'$ 所以 $x_0\in\overline{A}$ 证毕。

4. 设 $V(x;\ \varepsilon)$ 是R上任一邻域，$\forall y\in V(x;\ \varepsilon)$ 有

$$x-\varepsilon<y<x+\varepsilon$$

取 $\delta=\min\{y+\varepsilon-x,\ x+\varepsilon-y\}$，则必有

$$V(y,\ \delta)\subset V(x,\ \varepsilon)$$

即 y 为 $V(x,\ \varepsilon)$ 的内点，由 y 的任意性知 $V(x,\ \varepsilon)$ 为开集。

5. 设 $x_0\in(A')'$，则 $\forall\varepsilon>0$，有

$$y_0\in A'\cap(V_\varepsilon(x_0)-\{x_0\})$$

因为 y_0 为开集$V_\varepsilon(x_0)$的内点，且 $y_0\neq x_0$，故 $\exists\delta>0$，使得

$$V_\delta(y_0)\subset V_\varepsilon(x_0)-\{x_0\}$$

又因 $y_0\in A'$，所以

$$A\cap V_\delta(y_0)\neq\phi$$

再由

$$A\cap V_\delta(y_0)\subset A\cap(V_\varepsilon(x_0)-\{x_0\})$$

即知

$$A\cap(V_\varepsilon(x_0)-\{x_0\})\neq\phi$$

故有 $x_0\in A'$，即 $(A')'\subset A'$，说明 A' 为闭集，证毕。

注 题5也给出关系式 $(A')'\subset A'$ 在证明中常用到。

6.（I）由题意，即要证明

$$\overset{\circ}{A}=\cup\{G;\ G\text{ 为开集且 }G\subset A\}$$

因为$\overset{\circ}{A}$为开集且$\overset{\circ}{A}\subset A$，故

$$\overset{\circ}{A}\subset\cup\{G;\ G\text{为开集且 }G\subset A\}$$

又若取

$$x\in\cup\{G;\ G\text{为开集且 }G\subset A\}$$

则∃开集 $G_\lambda\subset A$，有 $x\in G_\lambda$，于是

$$\exists \varepsilon>0, \text{ 使 } V_\varepsilon(x)\subset G_\lambda\subset A$$

即

$$x\in \mathring{A}$$

由上便得

$$\mathring{A}=\cup\{G;\ G\text{为开集且 } G\subset A\}$$

（Ⅱ）只需证明

$$\overline{A}=\cap\{F;\ F\text{为闭集且 } A\subset F\}$$

因$\overline{A}$亦为包含A的闭集，于是

$$\overline{A}\supset\cap\{F;\ F\text{为闭集且 } A\subset F\}$$

再设F为任一包含A之闭集，即 $A\subset F$，则

$$\overline{A}\subset\overline{F}=F$$

所以

$$\overline{A}\subset\cap\{F;\ F\text{为闭集且 } A\subset F\}\quad \text{证毕。}$$

7．由条件G为开集，$G\cap A=\phi$

则

$$G^c\text{为闭集 且 } A\subset G^c$$

由闭包性质

$$\overline{A}\subset\overline{G}^c=G^c$$

于是

$$\overline{A}\cap G=\phi\quad \text{证毕。}$$

8．（Ⅰ）设A为R中闭集，令

$$A_n = \bigcup_{x \in A} V_{\frac{1}{n}}(x) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

显然A_n 为开集，且 $A \subset A_n$ $(\forall n)$，于是

$$A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

反之，若取 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$，假设 $x_0 \overline{\in} A$

则由于A为闭集，$\exists n_0$ 使得

$$V_{\frac{1}{n_0}}(x_0) \cap A = \phi$$

即

$$x_0 \overline{\in} A_{n_0} \text{ 与 } x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ 相矛盾}$$

故应有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$$

于是证得

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ 其中 } A_n \text{ 均为开集，证毕。}$$

（Ⅱ）设G为开集，则G^c为闭集，由（Ⅰ）知

$$G^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{其中 } A_n \text{ 均为开集}$$

于是

$$G = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

其中 A_n^c 均为闭集，证毕

注　本题属构造性证明。本题证得在R中任意开集均为F_σ集，任意闭集均为G_δ型集。

*9. 由聚点定义可知

$$x \in A - A' \Longleftrightarrow \exists \varepsilon_x > 0$$

使得

$$A\cap(V_{\varepsilon_x}(x)-\{x\})=\phi$$

且当 x，$y\in A-A'$ 且 $x\neq y$ 时，应有

$$V_{\varepsilon_x}(x)\cap V_{\varepsilon_y}(y)=\phi$$

反之亦是。记

$$G=\{V_{\varepsilon_x}(x);\ x\in A-A'\}$$

则

$$G\sim A-A'$$

但是G为R中两两互不相交开区间集故是至多可列的，所以 $A-A'$ 亦为至多可列集。

*10. 设 $M=\cup\{G\in\mathscr{F}\}$，$\forall x\in M$

则

$$\exists G\in\mathscr{F}，使得\ x\in G$$

因G为开集，$\exists\varepsilon_x>0$，使

$$V_\varepsilon(x)=(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)\subset G$$

于是可取以有理数为端点的开区间J_x，使

$$x\in J_x\subset(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)\subset G$$

易知

$$M=\cup\{J_x;\ x\in M\}$$

且集合 $\{J_x;\ x\in M\}$ 为可列集，故可将其记为

$$\{J_1,\ J_2,\ \cdots,\ J_n,\ \cdots\}$$

取$\mathscr{F}$中包含J_k的集，并记为G_k（$k\geqslant 1$），就有$\mathscr{F}$的可列子集$\{G_k;\ k=1,\ 2,\ \cdots\}$，且

$$M=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k \qquad \text{证毕。}$$

11. 证略。

12. 不妨设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调增加，记为 $x_n\nearrow$，且 a 为有限极限。

（Ⅰ）任取$\{x_n\}$的一个无穷子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，$\forall\varepsilon>0$，总$\exists N$，当 $n>N$ 时有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

因 $x_n\nearrow$，故 $x_n\leqslant a$ 且 $\forall n>N$ 有

$$0\leqslant a-x_n<\varepsilon$$

故当 $k>N$ 时（更有 $n_k>N$）有

$$0\leqslant a-x_{n_k}<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$。

（Ⅱ）设 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a<+\infty$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $k>N$ 时，有

$$-\varepsilon<a-x_{n_k}<\varepsilon$$

由单调性有

$$a-\varepsilon<x_{n_k}\leqslant x_{n_k+1}\leqslant\cdots\leqslant x_{n_{k+1}}\leqslant x_{n_{k+1}+1}\leqslant\cdots<a+\varepsilon$$

由此对 $\forall n>n_k$，均有

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{证毕。}$$

注　对单调减数列同样可以证明。当单调数列的子列趋于无穷时，易证原数列也趋于无穷。

13. 设 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，即 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $m, n>N$ 时，有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

若 $\{x_{n_k}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的任一子列，因 $n_k \geqslant k$，故当 $r, k>N$ 时，有

$$|x_{n_r} - x_{n_k}| < \varepsilon$$

即 $\{x_{n_k}\}$ 亦为 Cauchy 列。

14.（I）$\forall \varepsilon>0$，总可取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，对一切自然数 m，有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x_{n+m} - x_n \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^2} \\ &< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots \\ &+ \left(\frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\{x_n\}$ 收敛。

（II）由于 $|x_{n+p} - x_n|$

$$= \left|\frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \cdots + \frac{1}{\ln(n+p)}\right|$$

$$> \frac{p}{\ln(n+p)}$$

$$>\frac{p}{n+p}=\frac{1}{2}\quad(\text{当 } p=n \text{ 时})$$

故知 $\{x_n\}$ 为发散数列。

15. 设 $\varepsilon>0$，由于

$$0<\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}<\varepsilon$$

及

$$1-\varepsilon<\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}<1$$

对一切的 $n>\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$ 都成立，易知

$$\inf X=0 \text{ 及 } \sup X=1$$

16. 设 $a=\sup A$，$b=\inf A$

由定义 a 为 A 的最小上界，故 $\forall \varepsilon_n=\frac{1}{n}$，总 $\exists x_n\in A$ 有

$$a-\frac{1}{n}<x_n\leqslant a<a+\frac{1}{n}$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

同理可证存在 $\{y_n\}\subset A$，使得

$$\lim_{n\to\infty} y_n=b \quad \text{证毕。}$$

17. （I）设 $a=\sup\limits_{x\in A} f(x)$，$b=\sup\limits_{x\in A} g(x)$

有

$$f(x)\leqslant a,\ g(x)\leqslant b,\ \forall x\in A$$

所以

$$f(x)+g(x)\leqslant a+b,\ \forall x\in A$$

即 $a+b$ 是 $f(x)+g(x)$ 的上界，由上确界定义有

$$\sup_{x\in A}(f(x)+g(x))\leqslant a+b=\sup_{x\in A}f(x)+\sup_{x\in A}g(x)$$

（Ⅱ）记 $c=\inf_{x\in A}g(x)$，$d=\sup_{x\in A}(f(x)+g(x))$

即有

$$f(x)+c\leqslant d,\quad \forall x\in A$$

于是

$$f(x)\leqslant d-c,\quad \forall x\in A$$

故由上确界定义有

$$\sup_{x\in A}f(x)\leqslant d-c$$

整理便得

$$\sup_{x\in A}f(x)+\inf_{x\in A}g(x)\leqslant\sup_{x\in A}(f(x)+g(x))$$

（Ⅲ）由（Ⅱ）有

$$\sup_{x\in A}f(x)+\inf_{x\in A}(-f(x))\leqslant\sup_{x\in A}(f(x)-f(x))=0$$

故有

$$\inf_{x\in A}(-f(x))\leqslant-\sup_{x\in A}f(x)$$

又因为

$$-f(x)\geqslant-\sup_{x\in A}f(x)\quad\forall x\in A$$

由下确界定义便有

$$\inf(-f(x))\geqslant-\sup_{x\in A}f(x)$$

所以（Ⅲ）成立。

注　类似地可以推出下确界的运算法则：

$$\inf_{x\in A}(f+g)\geqslant\inf_{x\in A}(f(x))+\inf_{x\in A}(g(x))$$

和

$$\inf_{x\in A}(f+g)\leqslant\inf_{x\in A}(f(x))+\sup_{x\in A}(g(x))$$

*18. 由下确界定义，对 $\forall n$，$\exists x_n\in A$，$y_n\in B$，使得

$$(*)\qquad d(A,\ B)\leqslant|x_n-y_n|<d(A,\ B)+\frac{1}{n}$$

因A有界，故 $\{x_n\}$ 为有界点列，由收敛子列原理，必有子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，及 $x_0\in R$，使得

$$x_{n_k}\to x_0$$

又因A为闭集，则

$$x_0\in A$$

再由$\{x_n\}$的有界性及(*)式有

$$|y_{n_k}|\leqslant|x_{n_k}|+|y_{n_k}-x_{n_k}|$$

$$<\sup\{|x_n|\}+d(A,\ B)+\frac{1}{n_k}\quad\forall k$$

易见 $\{y_{n_k}\}$ 亦为有界数列，故存在收敛子列，设为

$$y_{n_{k_j}},\quad y_{n_{k_2}},\ \cdots,\quad y_{n_{k_j}},\ \cdots$$

有

$$y_{n_{k_j}}\to y_0\quad(j\to\infty)$$

由B之闭性，$y_0\in B$，且由(*)式有

$$|x_0-y_0|=\lim_{j\to\infty}|y_{n_{k_j}}-x_{n_{k_j}}|$$

$$=d(A,\ B)\quad\text{证毕。}$$

*19.（Ⅰ）（反证法）设 $[a, b]=F_1 \cup F_2$

其中 F_1，F_2 为非空闭集，且 $F_1 \cap F_2=\phi$

根据题18知 $\exists x_1 \in F_1$，$x_2 \in F_2$，使得

$$|x_1-x_2|=d(F_1, F_2)>0$$

取点 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，显然 $x \in [a, b]$，不妨设 $x \in F_1$

于是

$$\begin{aligned} d(F_1, F_2) &\leqslant |x-x_2| \\ &= \left| x_2-\frac{x_1+x_2}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2}|x_1-x_2| \\ &= \frac{1}{2}d(F_1, F_2) \end{aligned}$$

得到 $d(F_1, F_2) \leqslant 0$ 这与 $d(F_1, F_2)>0$ 矛盾，证毕。

（Ⅱ）（反证法）设 $(a, b)=G_1 \cup G_2$，

其中，G_1，G_2 为非空的开集，且 $G_1 \cap G_2=\phi$ 。

任取 $a_1 \in G_1$，$b_1 \in G_2$，设 $a_1<b_1$，作

$$F_1=[a_1, b_1]-G_2, \quad F_2=[a_1, b_1]-G_1$$

则 F_1，F_2 为不空的闭集，且

$$\begin{aligned} F_1 \cup F_2 &= [a_1, b_1]-(G_1 \cap G_2) \\ &= [a_1, b_1] \end{aligned}$$

又因 $F_1 \subset G_1$，$F_2 \subset G_2$，由 $G_1 \cap G_2=\phi$，有

$$F_1 \cap F_2=\phi$$

于是闭区间 $[a_1, b_1]$ 已表成两个非空不交的闭集的并集，与

(Ⅰ)矛盾，证毕。

(Ⅲ) 类似(Ⅰ)、(Ⅱ)证明。

注　本题可推出如下结果：

实直线R上除去全空间R及空集ϕ外，不再存在既开又闭的集合。

*20. 若 $S'=\phi$，则S已为闭集。现设 $S'\neq\phi$

设 $x_0\in S'$，由聚点的等价命题，

$$\exists y_n\in S \quad 且 \quad y_n\to x_0$$

注意到，每一 y_n 均为 $\{x_n\}$ 的某个子列的极限，于是

$$\exists x_{n_1} \text{ 使得 } |x_{n_1}-y_1|<1$$

$$\exists x_{n_2} \text{ 使得 } |x_{n_2}-y_2|<\frac{1}{2} \quad (n_2>n_1)$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\exists x_{n_k} \text{ 使得 } |x_{n_k}-y_k|<\frac{1}{k} \quad (n_k>n_{k-1})$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

则 $\{x_{n_k}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的子列，且

$$\begin{aligned}|x_{n_k}-x_0| &\leqslant |x_{n_k}-y_k|+|y_k-x_0|\\ &<\frac{1}{k}+|y_k-x_0|\\ &\to 0 \quad (\text{当 } k\to\infty)\end{aligned}$$

故 $x_0\in S$　即　S为闭集，证毕。

21. 因A为R中紧集，故A为R中有界闭集，从而 $A\cap F$ 亦为R中有界闭集，所以 $A\cap F$ 为R中紧集，证毕。

*22. “$\Longrightarrow$” 由 Heine-Borel 有限覆盖定理，因A为有界闭集，故A的任一无限子集 $B\subset A$，必有聚点 $x_0\in B'$

$\subset \overline{A}=A$ 。

"$\Longleftarrow$" 设A中任一无限子集都有聚点，且聚点均属于A，下证A为有界闭集（即紧集）。

（Ⅰ）先证有界性，若不然，则A含有点列 x_n，$|x_n|>n$ $(n=1, 2, \cdots)$，于是集 $S=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 虽是无穷集但无聚点在A中，与条件矛盾，所以A为有界集。

（Ⅱ）A的闭性是显然的，对于任意无穷子集$B\subset A$，由条件恒有 $B'\subset A$，故知 $A'\subset A$。

概上所述，A为R中紧集，证毕。

23. "$\Longrightarrow$" 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为A中任一点列，由条件A为有界闭集，故 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界点列。由定理，存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 且 $x_{n_k}\to x_0$ $(k\to\infty)$，则 $x_0\in\overline{A}=A$

"$\Longleftarrow$" 若 $x_0\in A'$，则 $\exists\{x_n\}\subset A$，且 $x_n\neq x_0$，使得 $x_n\to x_0$，由条件知存在 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in A$，故 $A'\subset A$，即A为闭集，与题22类似，A的任一无限子列都有收敛子列，则A必为有界集，因此，A为R中紧集。证毕。

24. 因A为有界集，故上确界存在，设 $\sup A=b$，且 $\exists\{x_n\}\subset A$，有 $x_n\to b$ 即

$$b\in\overline{A}=A \quad (\because A\text{为闭集})$$

所以

$$b=\sup A=\max\{x;\ x\in A\}$$

同理可证，$\exists a\in A$，有

$$a=\inf A=\min\{x;\ x\in A\}$$

25.（Ⅰ）因为 $u_1=[0,\ a)$

$$=(-1,\ a)\cap A$$

故 u_1 为 R 中开集 $(-1,\ a)$ 与 A 之交，由定义 u_1 为 A 中开集。

（Ⅱ）因 $(u_2)_A^c=A-u_2=(-1,\ a)\cap A$，所以 u_2 为 A 中闭集。

26.（Ⅰ）设 $\{G_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ 为 A 中开集族，由定义则存在 R 中开集族 $\{U_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ 使得

$$G_\lambda=A\cap U_\lambda\quad(\forall\lambda\in\Lambda)$$

于是

$$\bigcup_\lambda G_\lambda=\bigcup_\lambda(A\cap U_\lambda)$$

$$=A\cap(\bigcup_\lambda U_\lambda)$$

因为 $\bigcup_\lambda U_\lambda$ 为 R 中开集，故由定义即知为 $\bigcup_\lambda G_\lambda A$ 中之开集。

（Ⅱ）类似证明之，或用 De-Morgen 对偶律及（Ⅰ）推证之。

27. 若 F 为 A 中闭集

$\Longrightarrow F_A^c$ 为 A 中开集

$\Longrightarrow\exists R$ 中开集 G，使得

$$F_A^c=A\cap G$$

即

$$F=(A\cap G)_A^c$$
$$=A_A^c\cup G_A^c$$
$$=A-G$$
$$=A\cap G^c$$
$$=A\cap V$$

其中 $V=G^c$ 为R中闭集，反之亦易证明。

* 28.（Ⅰ）（用反证法）若设 $\bigcap\limits_{\lambda} F_\lambda=\phi$

则

$$A=A-\bigcap_{\lambda} F_\lambda$$

$$=\bigcup_{\lambda}(A-F_\lambda)$$

即 $\{A-F_\lambda\}$ 是A的一族开子集且覆盖了A，由于A是紧集，易知 $\{A-F_\lambda\}$ 中存在有限个成员 $A-F_{\lambda_1}$，$A-F_{\lambda_2}$，…，$A-F_{\lambda_n}$ 有

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}(A-F_{\lambda_i})$$

于是

$$\phi=A-\bigcup_{i=1}^{n}(A-F_{\lambda_i})$$

$$=\bigcap_{i=1}^{n}F_{\lambda_i}$$

与已知矛盾，所设不成立，即

$$\bigcap_{\lambda}F_\lambda\neq\phi$$

（Ⅱ）设 $A\subset R$，若 $\{F_\lambda\}$ 是A的任意一族闭子集，如果$\{F_\lambda\}$中任意有限个集的交集不空，就有 $\bigcap\limits_{\lambda}F_\lambda$ 不空，则A是紧集。事实上，设 $U=\{u_\lambda;\ \lambda\in I\}$ 是R中任意一个覆盖A的开集族，记

$$v_\lambda=u_\lambda\cap A$$

它是A中的开集，于是

$$U\cap A=\{v_\lambda=u_\lambda\cap A;\ \lambda\in I\}$$

是A中覆盖A的开集族，且 $\bigcup\limits_{\lambda\in I} v_\lambda = A$，则

$$\phi = A - \bigcup_{\lambda} v_\lambda$$

$$= \bigcap_{\lambda} (A - v_\lambda)$$

因为 $A - v_\lambda$ 为A中之闭集，由条件，闭集族 $\{A - v_\lambda;\ \lambda\in I\}$ 中至少存在一个有限子族 $\{A - v_{\lambda_i};\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，使得

$$\bigcap_{i=1}^{n} (A - v_{\lambda_i}) = \phi$$

则

$$A = A - \bigcap_{i=1}^{n} (A - v_{\lambda_i}).$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} v_{\lambda_i}$$

$$\subset \bigcup_{i=1}^{n} u_{\lambda_i}$$

即R中任一个覆盖A的开集族，总存在有限的子覆盖，故A为紧集，证毕。

29. 任取开区间 $A=(a,\ b)$，则

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} \phi & \text{若 } a<b\leqslant 0 \\ (-b,\ b) & \text{若 } a<0<b \\ (-b,\ -a)\cup(a,\ b) & \text{若 } 0\leqslant a<b \end{cases}$$

不论哪种情况 $f^{-1}(A)$ 都是开集。现设G为R中任一开集，可表为

$$G = \bigcup_{k=1}^{m} A_k \quad (m\text{为有限或}\infty)$$

其中 A_k 均为开区间，且 $A_i \cap A_j = \phi \quad (i\neq j)$，则由

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{k=1}^{m} f^{-1}(A_k)$$

即知$f^{-1}(G)$为开集，所以 $f(x)=|x|$ 是R上连续函数，证毕。

30.（证法一）由于

$$E_1=\{x\in E;\ f(x)\leqslant c\}$$

$$=\{x\in E;\ -\infty<f(x)\leqslant c\}$$

$$=f^{-1}((-\infty,\ c])$$

因 $f:\ E\to R$ 连续，$(-\infty,\ c]$ 为R中闭集，故E_1为E中之闭集。

同理，因 $E_2=f^{-1}((-\infty,\ c))$ 知其为E中之开集，证毕。

（证法二）$\forall x_0\in E_1'$，则 $\exists x_n\in E_1$，使得 $x_n\to x_0$，且由 $f(x_n)\leqslant c$ 及 f 的连续性知

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)\leqslant c$$

因此，$x_0\in E_1$，即 $E_1'\subset E_1$，故E_1为E中之闭集。

同理可证 $E_3=\{x\in E;\ f(x)\geqslant c\}$ 为闭集，再由

$$E_2=E-E_3$$

即知 $E_2=\{x\in E;\ f(x)<c\}$ 为E中开集，证毕。

31.“$\Longrightarrow$”由题30已证。

“$\Longleftarrow$”$\forall x_0\in E=[a,\ b]$，c为任意实数，由条件有

$\{x\in E;\ f(x)\geqslant f(x_0)+\varepsilon\}$和$\{x\in E;\ f(x)\leqslant f(x_0)-\varepsilon\}$

均为E中闭集。于是

$\{x\in E;\ f(x)<f(x_0)+\varepsilon\}$和$\{x\in E;\ f(x)>f(x_0)-\varepsilon\}$

均为E中开集，因此它们的交集

$$\{x\in E;\ f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon\}$$

也是E中开集，且x_0为其内点。故 $\exists\delta>0$，使得

$$E\cap V_\delta(x_0)\subset\{x\in E;\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\}$$

即是说，$\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，当 $x\in E\cap V_\delta(x_0)$ 时，总有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \quad \text{成立}$$

所以 f 在 x_0 点连续，由 x_0 点任意性知 f 在 E 上连续，证毕。

注　用反证法证也很简单，请读者自证。

32.（证法一）由条件，若 $x\in A$，有 $y=f(x)\in B$，且 $\forall x_0\in A$，g 在 $y_0=f(x_0)$ 处连续，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\varepsilon_1>0$，使当 $|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon_1$ 时，有

$$|g(f(x))-g(f(x_0))|<\varepsilon$$

又因 f 在x_0点连续，故对上面 ε_1，$\exists\delta>0$，使当 $x\in A$，且 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_1$$

从而当 $x\in A$，且 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)|<\varepsilon$$

即 $g\circ f$ 在 $x_0\in A$ 连续，由 x_0 任意性知 $g\circ f$ 在A上连续。

（证法二）设G为C中任一开集，由 g 连续，知

$$g^{-1}(G)\ \text{为}\ B\text{中开集}$$

又因 f 连续，故

$$f^{-1}(g^{-1}(G))\ \text{为}A\text{中开集}$$

易证

$$f^{-1}(g^{-1}(G))=(g\circ f)^{-1}(G)$$

故

$$(g\circ f)^{-1}(G) \text{ 为 } A \text{ 中开集}$$

所以 $g\circ f: A\to C$ 为连续，证毕。

33. 设 $|f'(x)|\leqslant M$，$\forall x\in R$，因为 $\forall x_1$，$x_2\in R$

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

其中 ξ 在 x_1，x_2 之间，故

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|$$

即是说，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2M}>0$，当 $|x_2-x_1|<\delta$ 时，有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$$

因此，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续，证毕。

34. 因 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在$[c,1]$上连续，从而一致连续，于是 $f(x)$ 在 $(c,1)$ 内也一致连续。

但是，在$(0,1)$内 f 不一致连续。事实上，若取

$$x_{1n}=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\quad x_{2n}=\frac{1}{2n\pi}$$

则

$$f(x_{1n})=1,\ f(x_{2n})=0$$

于是，当 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，不论怎样小的 $\delta>0$，总存在 x_{1n}，$x_{2n}\in(0,1)$，使当 $|x_{1n}-x_{2n}|<\delta$ 时，有

$$|f(x_{1n})-f(x_{2n})|=1>\varepsilon_0$$

故 f 在$(0,1)$内不一致连续。

35.（I）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}0 & \text{当 } x\in[0,\ 1)\\ \frac{1}{2} & \text{当 } x=1\end{cases}$$

于是

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{2}\nrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

即 $f_n(x)\to f(x)$ 但不一致收敛。

（Ⅱ）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0 \quad (x\in[0,\ 1])$

但是

$$\sup|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}\frac{nx}{1+n^2x^2}=\frac{1}{2}\nrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

故

$f_n(x)\to 0$ 但并不一致收敛。

36. 因为 $f_n(x)$ 在$[a,\ b]$上一致收敛于$f(x)$，故 $f(x)\in C[a,\ b]$ 且

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，对任意 $x\in[a,\ b]$均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

于是，由 $f(x)$，$f_n(x)$连续必可积，有

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,dx<(b-a)\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)dx，\text{ 证毕。}$$

注 若将积分上限 b 换成 x，则当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，有

$\left|\int_a^x f_n(x)dx-\int_a^x f(x)dx\right|<(b-a)\varepsilon$ 对 x 一致地成立。

即函数列 $\int_a^x f_n(x)dx$ 一致收敛到 $\int_a^x f(x)dx$

37. 因 $f_n'(x) \overset{\text{一致}}{\to} g(x)$，故 $g(x)$ 连续。由题36有

$$\int_a^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,dt$$

$$= \lim_{n\to\infty}[f_n(x) - f(a)]$$

$$= f(x) - f(a)$$

由于左边导数存在，故 $f'(x)$ 存在且 $f'(x) = g(x)$，证毕。

注 （1）利用题36(注)及下面关系式

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$$

易知 $f_n(x)$ 在$[a, b]$上也是一致收敛的。

（2）若把题36、37中 $f_n(x)$ 视为函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 的前n项部分和，就得到关于函数项级数的相应命题。

（Ⅰ）若$[a, b]$上级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 的每项 $u_k(x)$ 均连续，且 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 一致收敛于$f(x)$，则 $f(x) \in C[a, b]$，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

（Ⅱ）若在$[a, b]$上，$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 的每一项都有连续导数 $u_k'(x)$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ 一致收敛于 $g(x)$，而 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 收敛于 $f(x)$，则

$$f'(x)=g(x) \quad 即 \quad \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dx}u_k(x)$$

*38. （Ⅰ）因 $\inf S\leqslant\sup S$ 故恒有 $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$

（Ⅱ）因 $\overline{x}=\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n=\sup S$，$\underline{x}=\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=\inf S$.

由上确界定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists a\in S$ 使得

$$a>\overline{x}-\varepsilon$$

因 a 是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列的极限，因此有无限多个 n 使得

$$x_n>\overline{x}-\varepsilon$$

又因为对任意 $a\in S$，有

$$a<\overline{x}+\varepsilon$$

故不等式 $x_n\geqslant\overline{x}+\varepsilon$ 至多只能对有限个 n 成立，即对充分大的 n 有

$$x_n<\overline{x}+\varepsilon$$

同理利用下确界性质可证，对充分大的 n 恒有

$$x_n>\underline{x}-\varepsilon$$

而有无限多个 n 使得

$$x_n<\underline{x}+\varepsilon$$

注　条件(A)、(B)亦是数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上、下极限的特征性质。

（Ⅲ）“$\Longrightarrow$”设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$，则　$S=\{a\}$

于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

"$\Longleftarrow$" 若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a$

由(Ⅱ)知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$，有

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，证毕。

*39. 子列 $\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right\} \to 0$

$$\left\{\frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots\right\} \to 1$$

故子列极限所成集 $S = \{0,\ 1\}$，于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 0$$

该数列没有极限。

*40. (Ⅰ) 设

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n} \\ n - 2n^2\left(x - \frac{1}{2n}\right) & \text{当 } \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{当 } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

但

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

（Ⅱ）设 $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$　$(-1\leqslant x\leqslant 1)$

$(n=1,\ 2,\ \cdots)$

则

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0 \quad (x\in[-1,\ 1])$$

且

$$f'(x)\equiv 0$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}=\begin{cases}1 & \text{当 } x=0\\ 0 & \text{当 } 0<|x|\leqslant 1\end{cases}$$

§ 1.3 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分简介

1.（Ⅰ）由定义显然有 $m_*(\phi)=mE-m^*(E)=0$，再由外测度性质

$$m^*(E-A)\leqslant m^*(E)=mE$$

故

$$m_*(A)=mE-m^*(E-A)\geqslant 0$$

（Ⅱ）$\because$　$A_1\subset A_2$　$\therefore$　$E-A_1\supset E-A_2$

由外测度单调性有

$$m^*(E-A_1)\geqslant m^*(E-A_2)$$

故

$$m_*(A_1)\leqslant m_*(A_2)$$

（Ⅲ）因 $E=A\cup(E-A)$

由外测度次可加性，有

$$m^*(E)\leqslant m^*(A)+m^*(E-A)$$

而 $m^*(E)=\beta-\alpha<+\infty$，故

$$m^*(A)\geqslant m^*(E)-m^*(E-A)=m_*A，\text{证毕。}$$

*2. 设 $E=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，令 $F_k=E_k-E_{k+1}$，则

$$E_1-E=\bigcup_{k=1}F_k$$

且 F_k 是两两不相交的。于是

$$m(E_1-E)=\sum_{k=1}^{\infty}m(F_k)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k-E_{k+1})$$

但因 $E\subset E_1$，$E_{k+1}\subset E_k$ 所以

$$m(E_1)=m(E)+m(E_1-E)$$

$$m(E_k)=m(E_{k+1})+m(E_k-E_{k+1})$$

又因 $m(E_k)\leqslant m(E_1)<+\infty$，故得

$$m(E_1-E)=m(E_1)-m(E)$$

$$m(E_k-E_{k+1})=m(E_k)-m(E_{k+1})$$

因此

$$m(E_1)-m(E)=\sum_{k=1}^{\infty}(m(E_k)-m(E_{k+1}))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(m(E_k)-m(E_{k+1}))$$

$$=\lim_{n\to\infty}(m(E_1)-m(E_n))$$

$$=m(E_1)-\lim_{n\to\infty}m(E_n)$$

由 $m(E_1)<+\infty$ 即得 $m(E)=\lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)$ 证毕。

3. 若有整数 n_0，使 $m(E_{n_0})=\infty$，那么

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\geqslant m(E_{n_0})=\infty$$

对每个 $n\geqslant n_0$，均有 $m(E_n)=\infty$，故等式成立。

于是，只须考虑当 $m(E_n)<\infty$ $(n=1, 2, \cdots)$ 时的情况。由

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n=E_1\cup(E_2-E_1)\cup(E_3-E_2)\cup\cdots$$

是不相交可测集的并集，所以

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=m(E_1)+m(E_2-E_1)+m(E_3-E_2)+\cdots$$

$$=m(E_1)+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(m(E_{k+1})-m(E_k))$$

$$=\lim_{n\to\infty} m(E_{n+1})$$

证毕。

*4. 任取 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$，由外测度定义及下确界的意义知必存在开区间集列 $\{I_k^{(n)};\ k=1, 2, \cdots\}$ 满足条件

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)} \quad \text{且} \quad \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k^{(n)})<m^*A+\frac{1}{n}$$

其中 $m(I_k)$ 为区间 I_k 的长度。令

$$G_n=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)},\quad G=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

则由外测度次可列可加性

$$m(G_n)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k^{(n)})<m^*(A)+\frac{1}{n}$$

显然 G_n 为开集，G 为 G_δ 型集，且

$$A\subset G\subset G_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

故有

$$m^*(A)\leqslant m^*G\leqslant m^*G_n<m^*(A)+\frac{1}{n}$$

于是

$$mG=m^*G=m^*(A) \quad \text{证毕。}$$

注　本题亦被称为**等测覆盖定理**。

*5. 由条件A为有界可测集，故存在 $E=[\alpha,\ \beta]$，使得

$$A\subset E$$

设 $S=E-A$，由题 4，存在 G_δ 型集G，满足：

$$G\supset S \text{ 且 } m^*S=mG$$

不妨设

$$G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$$

其中 G_n 均为开集。令

$$\begin{aligned}F&=E\cap G^c\\&=E\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\right)^c\\&=E\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n^c\right)\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap G_n^c)\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\end{aligned}$$

其中 $F_n=E\cap G_n^c \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$ 均为闭集，故F为 F_σ 型集，且有

$$F=E\cap G^c=E-G\subset E-S\subset A$$

及

$$\begin{aligned}mF&=m(E\cap G^c)\\&=m(E-G)\\&\geqslant mE-mG\\&=mE-m^*S\\&=mE-m^*(E-A)\\&=m_*A=mA\end{aligned}$$

即 $mF\geqslant mA$ 但由 $F\subset A$，又有 $mF\leqslant mA$，所以

$$mF=mA$$

F即为所求，证毕。

注　本题又被称作**等测核心定理**，A为有界的条件可去掉，命题仍然成立。

6. 因 $m(E\Delta F)=0$，即知 $m(E-F)=m(F-E)=0$，而

$$\begin{aligned}E\cup F&=(E\Delta F)\cup(E\cap F)\\&=(E-F)\cup(F-E)\cup(E\cap F)\end{aligned}$$

显然 $E-F$，$F-E$，$E\cap F$两两互不相交，所以

$$\begin{aligned}m(E\cup F)&=m(E-F)+m(F-E)+m(E\cap F)\\&=m(E\cap F)\end{aligned}$$

若 $mE=\infty$，有

$$m(E\cap F)=m(E\cup F)=\infty$$

从而

$$mE=mF=m(E\cap F)=\infty$$

当 $mF=\infty$ 时，同样可证得上述结论。

若 $mE<+\infty$，$mF<+\infty$，

$$0=m(E-F)=m(E-(E\cap F))=mE-m(E\cap F)$$

有

$$mE=m(E\cap F)$$

同理可证 $mF=m(E\cap F)$，从而证得

$$mE=mF=m(E\cap F)$$

*7. 由题 5，$\exists F\in F_\sigma$ 型集，使得 $F\subset E$ 且 $mE=mF$.

设

$$F=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$$

其中 F_k 均为闭集，记

$$S_n=\bigcup_{k=1}^{n}F_k$$

则 S_n 为闭集且 $S_n\subset E$，由 S_n 的单调性有

$$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_n$$

由题 3 知

$$mE=mF=\lim_{n\to\infty}mS_n$$

于是，$\forall\varepsilon>0$ $\exists N$，使得当 $n>N$ 时，有

$$mE-mS_n<\varepsilon$$

而 $S_n \subset E$，$mS_n < +\infty$，故证得

$$m(E - S_n) < \varepsilon$$

8. 由 $A(f \geqslant c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A\left(f > c - \frac{1}{n}\right)$ 即知 $A(f \geqslant c)$ 为可测集。再由

$$A(f = c) = A(f \geqslant c) - A(f > c);$$

$$A(f \leqslant c) = A - A(f > c);$$

$$A(f < c) = A - A(f \geqslant c);$$

可知 $A(f = c)$，$A(f \leqslant c)$，$A(f < c)$ 均为可测集。

9. （1）由 $E(f + k > c) = E(f > c - k)$

即得 $f(x) + k$ 的可测性。

（2）当 $k = 0$ 易知 $kf(x)$ 是可测的。当 $k \neq 0$ 时，由

$$E(kf > c) = \begin{cases} E\left(f > \frac{c}{k}\right) & (k > 0) \\ E\left(f < \frac{c}{k}\right) & (k < 0) \end{cases}$$

即得 $kf(x)$ 的可测性。

（3）由

$$E(|f| > c) = \begin{cases} E & (c < 0) \\ E(f > c) \cup E(f < -c) & (c \geqslant 0) \end{cases}$$

知 $|f(x)|$ 是一可测函数。

（4）由

$$E(f^2 > c) = \begin{cases} E & (c < 0) \\ E(|f| > \sqrt{c}) & (c \geqslant 0) \end{cases}$$

知 $f^2(x)$ 是一可测函数。

（5）因 $f(x) \neq 0$，故

$$E\left(\frac{1}{f}>c\right)=\begin{cases} E(f>0) & c=0 \\ E(f>0)\cap E\left(f<\frac{1}{c}\right) & c>0 \\ E(f>0)\cup E\left(f<\frac{1}{c}\right) & c<0 \end{cases}$$

故 $\frac{1}{f(x)}$ 为可测函数。

10. 设 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是全体有理数的集合，则

$$E(f>g)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E(f>r_n)\cap E(g<r_n))$$

事实上，若 $x_0\in E(f>g)$，则

$$f(x_0)>g(x_0)$$

故 $\exists n_0$，使得

$$x_0\in E(f>r_{n_0})\cap E(g<r_{n_0})$$

从而

$$E(f>g)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(E(f>r_n)\cap E(g<r_n))$$

反之，$\forall n$ 均有

$$E(f>r_n)\cap E(g<r_n)\subset E(f>g)$$

所以

$$E(f>g)\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}(E(f>r_n)\cap E(g<r_n))$$

证毕。

注　由此及题 9 (1) 知 $f(x)+g(x)$ （即两可测函数之和）也为可测函数。

11. 由 $E(M(x)>c)=E(f(x)>c)\cup E(g(x)>c)$

及

$$E(m(x)>c)=E(f(x)>c)\cap E(g(x)>c)$$

即知 $M(x)$，$m(x)$ 均为E上可测函数。

12. 由 $E_k(f(x)>c)=\{x\in E_k;\ f(x)>c\}$ 可测 $(k=1,\ 2,\ \cdots)$

即知

$$E(f(x)>c)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k(f(x)>c)$$

可测，故 $f(x)$ 为E上可测函数。

13. 记 $I=[0,\ 1]$，则

$$I(f(x)>0)=E-\{0\}$$

因为 $E-\{0\}$ 不可测，故 $f(x)$ 在 $I=[0,\ 1]$上不可测，但是 $|f(x)|=x$ 是$[0,\ 1]$上的连续函数，是可测函数。

14. 设 $E_0=E(f\neq g)$，$E_1=E(f=g)$

由条件 $mE_0=0$，$E_1=E-E_0$ 可测，而$\forall c$

$$\{x\in E_1;\ f(x)>c\}=E_1\cap E(f(x)>c)$$

故 $f(x)$为可测集E_1上的可测函数，而在E_1上 $f(x)=g(x)$，所以 $g(x)$ 亦为 E_1 上可测函数。又 $g(x)$ 也为零测集 E_0 上可测函数，由题 12 即知，$g(x)$ 为$E_0\cup E_1=E$ 上的可测函数，证毕。

*15. 由于

$$E(\sup_n f_n(x)>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)>c)$$

事实上，

$$\forall x_0\in E(\sup f_n(x)>c),$$

有

$$\sup_n f_n(x_0) > c$$

记 $\varepsilon = \sup_n f_n(x_0) - c$，则 $\forall \delta \in (0, \varepsilon)$，由上确界定义 $\exists N$，使得

$$f_N(x_0) > \sup f_n(x_0) - \delta > \sup f_n(x_0) - \varepsilon = c$$

所以有

$$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$$

反之，$\forall n$ 均有

$$E(f_n(x) > c) \subset E(\sup_n f_n(x) > c)$$

于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c) \subset E(\sup_n f_n(x) > c)$$

故有

$$E(\sup f_n(x) > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$$

为可测集，从而 $\sup_n f_n(x)$ 为 E 上可测函数。

同理可证 $\inf_n f_n(x)$ 为 E 上可测函数，证毕。

16. 因 $R(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有界可测，故 $R(x)$ 为 (L) 可积，若记 E_1 为 $(0, 1)$ 中有理点集，E_2 为 $(0, 1)$ 中无理点集，则 $E_1 \cup E_2 = (0, 1)$ 且 $E_1 \cap E_2 = \phi$，于是

$$(L)\int_E R(x)\,dx = \int_{E_1} R(x)\,dx + \int_{E_2} R(x)\,dx$$

$$= \int_{E_1} R(x)\,dx$$

注意到 $mE_1 = 0$，故

$$(L)\int_E R(x)\,dx = \int_{E_1} R(x)\,dx = 0$$

17. 若取

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & x\in E(f\geqslant 0)\\ -1 & x\in E(f<0)\end{cases}$$

则

$$0=\int_E f(x)\varphi(x)\,dx=\int_E |f(x)|\,dx$$

故

$$f(x)=0 \quad \text{a.e.}E$$

18. $\because E_n$ 可测，故 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 可测，且若令

$$F_1=E_1,\ F_2=E_2-E_1,\ \cdots,\ F_n=E_n-E_{n-1},\ \cdots$$

则

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,\ \text{且}\ F_i\cap F_j=\phi \quad (i\neq j)$$

于是

$$\int_E f(x)\,dx=\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{F_n} f(x)\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{F_k} f(x)\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\bigcup_{k=1}^{n} F_k} f(x)\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\,dx$$

证毕。

19. 因 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 (0，1) 上连续，故为可测函数，令

$$\{f(x)\}_N=\begin{cases} N & \text{当 } x\in\left(0,\ \frac{1}{N}\right) \\ \frac{1}{x} & \text{当 } x\in\left(\frac{1}{N},\ 1\right) \end{cases}$$

有

$$(L)\int_{(0,1)}\frac{1}{x}dx=\lim_{N\to\infty}\int_{(0,1)}\left\{\frac{1}{x}\right\}_N dx$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[\int_{(0,\frac{1}{N})}Ndx+\int_{(\frac{1}{N},1)}\frac{1}{x}dx\right]$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(1-\ln\frac{1}{N}\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}(1+\ln N)=+\infty$$

故 $\frac{1}{x}$ 在(0，1)上是(L)不可积，其(L)积分值为$+\infty$。

20. 因 $f(x)=x^3$ a.e.[0，1] 故 $f(x)$ 是(L)可积的,且

$$(L)\int_{(0,1)}f(x)dx=(L)\int_0^1 x^3dx=(R)\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$$

但显然由定义即知 $f(x)$ 在[0，1]上(R)不可积。

21. 因 $f_n(x)=nx/1+n^2x^2$ 是 [0，1]上非负可测函数，且

$$\frac{nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2}\ \text{及}\ \lim_{n\to\infty}f_n(x)=0\quad(\forall x\in[0,\ 1])$$

故由 Lebesgue 有界控制收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}dx=(L)\int_0^1 0\,dx=0\ .$$

22. 因 $f_n(x)=n\sqrt{x}/1+n^2x^2$ 是(0，1)上连续函数，故为非负可测函数列。又由 $1+n^2x^2\geqslant 2nx$，即知

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

取 $F(x)=1/2\sqrt{x}$ 是(0，1)上非负无界可测函数，由于

$$(L)\int_{(0,1)}F(x)dx=\lim_{N\to\infty}(L)\int_0^1\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}}\right\}_N dx$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[\int_0^{\frac{1}{4N^2}}N dx+\int_{\frac{1}{4N^2}}^1\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right]$$

$$=1$$

即 $F(x)$ 是(0，1)上 (L)可积的，由 Lebesgue 控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}dx=(L)\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}dx$$

$$=(L)\int_0^1 0\,dx$$

$$=0$$

*23．因为

$$f(x)=\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}$$

$$=(x^p+x^{p+1}+\cdots)\ln\frac{1}{x}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{p+n-1}\ln\frac{1}{x}$$

令

$$f_n(x)=x^{p+n-1}\ln\frac{1}{x}$$

则 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 且 $f_n(x)$ 均为(0，1)上非负可测函数。

由 Levi 定理级数形式即有

$$(L)\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_0^1 f_n(x)dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^{n+p-1} \ln \frac{1}{x} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^2}$$

故

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} dx = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+2)^2} + \cdots \quad (p > -1)$$

证毕。

*24. 由(R)积分定义，有

$$(R) \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \to +\infty} (R) \int_a^A f(x) dx < +\infty$$

对任一有限区间(a, A)，因 $f(x)$ 有界，(R)可积，故知

$$(L) \int_{(a, A)} f(x) dx = (R) \int_a^A f(x) dx$$

于是

$$(L) \int_{(a, +\infty)} f(x) dx = \lim_{A \to +\infty} (L) \int_a^A f(x) dx$$

$$= \lim_{A \to +\infty} (R) \int_a^A f(x) dx$$

$$= (R) \int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty$$

即 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$上(L)可积且与其相应的(R)积分相等。

*25. 因 $|f(x)|$ 为(R)可积，由题24即知 $|f(x)|$ 在$(a, +\infty)$上(L)可积，且积分值相等。于是

$$(L) \int_{(a, +\infty)} f^+(x) dx \leqslant (L) \int_{(a, +\infty)} |f(x)| dx$$

$$= (R) \int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

及

$$(L)\int_{(a,+\infty)} f^-(x)\,dx \leqslant (L)\int_{(a,+\infty)} |f(x)|\,dx$$
$$= (R)\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$$

因此

$$(L)\int_{(a,+\infty)} f^+(x)\,dx = (R)\int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx$$

及

$$(L)\int_{(a,+\infty)} f^-(x)\,dx = (R)\int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx$$

所以

$$(L)\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = (L)\int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx - (L)\int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx$$
$$= (R)\int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx - (R)\int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx$$
$$= (R)\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

证毕。

注　若仅仅有 $f(x)$ 在$(a, +\infty)$上(R)可积，不能得到上面结论，例如，由数学分析方法可知

$$(R)\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^n \frac{\sin x}{n\pi + x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

但是

$$(L)\int_{(0,+\infty)} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = (R)\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$$

即 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ 在$(0, +\infty)$上(L)不可积，故 $\frac{\sin x}{x}$ 在$(0, +\infty)$上也必(L)不可积。

§ 2.1 拓扑空间

1. 易验证$\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_3$都是X的拓扑，而$\mathscr{T}_2$不是X的拓扑。后者，因为 $\{w, x\}, \{w, y\}\in\mathscr{T}_2$，
但

$$\{w, x\}\cup\{w, y\}=\{w, x, y\}\notin\mathscr{T}_2$$

2. $\mathscr{T}\subset\mathscr{X}\subset\mathscr{D}$

3. (Ⅰ) $(X, \mathscr{T})$中的全体闭集为

$$\phi, X, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \{c,d\}, \{d\}, \{c\}$$

(Ⅱ) $\{a\}^\circ=\{a\}$, $\{a\}'=\{c, d\}$, $\overline{\{a\}}=\{a, c, d\}$;

$$\{a,b\}^\circ=\{a,b\},\ \{a,b\}'=\{c,d\},\ \overline{\{a,b\}}=X,$$

(Ⅲ) $X'=\{c, d\}$

4. 显然 $\phi, X\in\mathscr{T}$；设 $\{[0, \alpha_\lambda);\ \lambda\in I,\ 0<\alpha_\lambda\leqslant 1\}\subset\mathscr{T}$，记 $\alpha=\sup_{\lambda\in I}\alpha_\lambda$，则 $\bigcup_{\lambda\in I}[0, \alpha_\lambda)=[0, \alpha)\in\mathscr{T}$ (∵ 显然 $0<\alpha\leqslant 1$)；$\{[0, \alpha_1), [0, \alpha_2), \cdots[0, \alpha_k)\}$，其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in(0, 1]$。记 $\alpha=\min\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$，显然$0<\alpha\leqslant 1$。因此

$$\bigcap_{i=1}^{k}[0, \alpha_2)=[0, \alpha)\in\mathscr{T}$$

所以$\mathscr{T}$为 $X=[0, 1)$ 上的一个拓扑。即 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间。

5. ∵ $\phi, X\in\mathscr{T}$，若 $\{G_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}\subset\mathscr{T}$，则由

$$G^c=(\bigcup_\lambda G_\lambda)^c=\bigcap_\lambda G_\lambda^c$$

知G^c为有限集，因此，$\bigcup_\lambda G_\lambda\in\mathscr{T}$，若 $\{G_1, G_2, \cdots, G_k\}\subset\mathscr{T}$，

由

$$G^c=(\bigcap_{i=1}^{k}G_i)^c=\bigcup_{i=1}^{k}G_i^c$$

知 G^c 为有限集，因此 $\bigcap_{i=1}^{k}G_i\in\mathscr{T}$。

由上知$\mathscr{T}$满足拓扑公理，即$(X,\ \mathscr{T})$是拓扑空间。

6. 因 ϕ，X 属于X的每个拓扑$\mathscr{L}$，故当然是$\mathscr{L}_C$的成员；若 $\{G_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}\subset\mathscr{L}_C$，则 $\{G_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}\subset\mathscr{L}$ 对每个包含有子集类$\mathscr{C}$的拓扑$\mathscr{L}$都成立。故 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\in\mathscr{L}$ 对每个包含$\mathscr{C}$的拓扑$\mathscr{L}$都成立。

所以

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\in\mathscr{L}_C$$

同理可证：若 G_1，…，$G_n\in\mathscr{L}_C$，必有 $\bigcap_{i=1}^{n}G_i\in\mathscr{L}_C$，因此，$\mathscr{L}_C$ 是X 的拓扑。显然 $\mathscr{C}\subset\mathscr{L}_C$，也即$\mathscr{C}$中成员都是$(X,\ \mathscr{L}_C)$中的开集。

若 $\mathscr{L}_0$ 是使$\mathscr{C}$中成员都成为开集的X的拓扑，易知 $\mathscr{L}_0\supset\mathscr{L}_C$，也即 $\mathscr{L}_C$ 是X的使$\mathscr{C}$中成员都成为开集的最弱的拓扑。

7. $\because\ x\in\mathring{A}\Longleftrightarrow$存在开集 G_x，使得 $x\in G_x\subset A$；

因此

$$A\subset\bigcup_{x\in\mathring{A}}G_x$$

又 $\because\ \forall y\in G_x$，有 $y\in G_x\subset A$，故 $y\in\mathring{A}$，也即 $G_x\subset\mathring{A}$。

从而

$$\mathring{A}\supset\bigcup_{x\in\mathring{A}}G_x$$

因此

$$\overset{\circ}{A}=\bigcup_{x\in\overset{\circ}{A}} G_x\in\mathscr{x}$$

即 $\overset{\circ}{A}$总是开集。

显然 $\overset{\circ}{A}\subset A$，若 $G\in\mathscr{x}$，且 $G\subset A$，则 $\forall x\in G$，x都是A的内点，也即 $G\subset\overset{\circ}{A}$。故，$\overset{\circ}{A}$是包含于$A$的最大的开集。

$\because$ $x\in(\overline{A})^c\Longleftrightarrow x\overline{\in}\overline{A}\Longleftrightarrow$存在开集 G_x，使得

$$x\in G_x \quad 且 \quad G_x\cap A=\phi$$

显然

$$(\overline{A})^c=\bigcup_{x\in(\overline{A})^c} G_x$$

因此，$(\overline{A})^c$为开集，故$\overline{A}$总是闭集。

若F为闭集，且 $F\supset A$，易知(见题8(Ⅱ))，$\overline{F}\supset\overline{A}$. 另一方面，$x\overline{\in}F$，即 $x\in F^c$，而 $F^c\in\mathscr{x}$，故存在开集 G_x，使得 $x\in G_x\subset F^c$。因此，$G_x\cap F=\phi$，$x\overline{\in}F'$，也即对闭集F，恒有 $\overline{F}=F$。由上知 $F\supset\overline{A}$，从而知$\overline{A}$为包含A的最小的闭集。

8. (证法1) (Ⅰ) $x\in\overline{A}$，当 $x\in A$ 时，$A\cap V(x)\neq\phi$ 自然成立；当 $x\in A'$ 时，$A\cap(V(x)-\{x\})\neq\phi$，$\forall V(x)$，从而有 $A\cap V(x)\neq\phi$，$\forall V(x)$。因此，$x\in\overline{A}\Longrightarrow A\cap V(x)\neq\phi$，$\forall V(x)$。

反之，若 $A\cap V(x)\neq\phi$，$\forall V(x)$。因为

$$A\cap V(x)=(A\cap(V(x)-\{x\}))\cup(A\cap\{x\})\neq\phi,\quad\forall V(x)$$

显然必有 $x\in A'$ 或 $x\in A$，即 $x\in\overline{A}$。

(Ⅱ) 设$A\subset B$，$x\in\overline{A}$，由(Ⅰ) $\forall V(x)$ 有

$$B\cap V(x)\supset A\cap V(x)\neq\phi$$

故 $x\in\overline{B}$。因此，$\overline{A}\subset\overline{B}$

（Ⅲ）由题 7 知，$\overline{A}$ 恒为闭集，而且闭集的闭包就是其本身，故 $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$。

（Ⅳ）由（Ⅱ）知：因 $A\subset A\cup B$，故 $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$，同理有 $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$。因此，$\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$。

另一方面，由于$\overline{A}$、$\overline{B}$都是闭集，故 $\overline{A}\cup\overline{B}$是闭集，而 $A\cup B\subset\overline{A}\cup\overline{B}$，从而有 $\overline{A\cup B}\subset\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\overline{A}\cup\overline{B}$，因此

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}\ .$$

（证法 2） 先证 $(A\cup B)'=A'\cup B'$

事实上，$x\in(A\cup B)'\Longleftrightarrow\forall V(x)$，有 $(A\cup B)\cap(V(x)-\{x\})\neq\phi$，即

$$(A\cap(V(x)-\{x\}))\cup(B\cap(V(x)-\{x\}))\neq\phi$$

因此，$A\cap(V(x)-\{x\})\neq\phi$ 或 $B\cap(V(x)-\{x\})\neq\phi$，

$\forall V(x)$；

也即

$$x\in A' \text{ 或 } x\in B'$$

因此，

$$x\in A'\cup B'$$

又由 $(A\cup B)'\cup(A\cup B)=(A'\cup B')\cup(A\cup B)$
$=(A\cup A')\cup(B\cup B')$ 知

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

（证法 3） 由（Ⅰ），$x\in\overline{A}\Longleftrightarrow\forall V(x)$ 有 $A\cap V(x)\neq\phi$.

因此 $x\in\overline{A\cup B}\Longleftrightarrow\forall V(x)$ 有

$$\phi\neq(A\cup B)\cap V(x)=(A\cap V(x))\cup(B\cap V(x))$$

$$\Longleftrightarrow A\cap V(x)\neq\phi,\ \text{或}\ B\cap V(x)\neq\phi,\ \forall V(x)$$

$$\Longleftrightarrow x\in\overline{A}\ \text{或}\ x\in\overline{B}$$

$$\Longleftrightarrow x\in\overline{A}\cup\overline{B}$$

(∀) $x\in\overline{A\cap B}$

$$\Longleftrightarrow\forall V(x)\ \text{有}\ (A\cap B)\cap V(x)\neq\phi$$

$$\Longleftrightarrow\forall V(x)\ \text{有}\ (A\cap V(x))\cap(B\cap V(x))\neq\phi$$

$$\Longrightarrow\forall V(x)\ \text{有}\ A\cap V(x)\neq\phi,\ \text{且}\ B\cap V(x)\neq\phi$$

$$\Longleftrightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}$$

因此

$$\overline{A\cap B}\cap\overline{A}\cap\overline{B}$$

还有其它证法，请读者自行去证。

设 $A=[0,\ 1)$，$B=(1,\ 2)$为R的子集，显然

$$\overline{A\cap B}=\overline{\phi}=\phi,\ \subset\!\!\!\neq\ \overline{A}\cap\overline{B}=[0,\ 1]\cap[1,\ 2]=\{1\}$$

因此，一般情况下，$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$中的“$\subset$”不能改成“$=$”。

9. 因在R上赋予平凡拓扑$\mathcal{T}=\{\phi,\ R\}$，因此，任一点$x\in R$的邻域只有一个$V(x)=R$，故对任意点列$\{x_n\}\subset R$，存在自然数M(可任意的)，必有

$$x_n\in V(x)=R\quad\forall n>M$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

10. （证法 1） 设 $(X, \mathscr{x})$ 是 Hausdorff 空间，任意点 $x_0 \in X$，对 $x \in X$，若 $x \neq x_0$，必有开集 G_x 及 $V(x_0)$ 使

$$x \in G_x, \text{ 且 } G_x \cap V(x_0) = \phi$$

因此，由

$$\{x_0\}^c = \bigcup_{x \neq x_0} G_x$$

知 $\{x_0\}$ 为闭集。

（证法 2） 设 x，$x_0 \in X$，$x \neq x_0$，由于空间的可分离性，有邻域 $V(x)$，$V(x_0)$ 使得 $V(x) \cap V(x_0) = \phi$，

故

$$\{x_0\} \cap (V(x) - \{x\}) = \phi$$

因此，若 $x \neq x_0$，则 $x \overline{\in} \{x_0\}'$，从而 $\{x_0\} = \{x_0\}$，所以单点集$\{x_0\}$总是$(X, \mathscr{x})$中的闭集。

*11. 由题10知，必要性是显然的。现证充分性。

设 $\forall x \in X$，显然 x 的一切闭邻域的交也是 $\{x\}$，且对任意 $y \in X$，若 $y \neq x$，则必有 x 的闭邻域 $V(x)$ 使得

$$y \overline{\in} V(x), \quad y \in (V(x))^c$$

故有 x 的邻域 $V(x)$ 及 y 的邻域 $(V(x))^c$，使得

$$V(x) \cap (V(x))^c = \phi$$

因此，$(X, \mathscr{x})$是 Hausdorff 空间。

12. 若 $x_0 \in (A')'$，则对任何 x_0 的开邻域 $V(x_0)$ 有

$$A' \cap (V(x_0) - \{x_0\}) \neq \phi$$

故存在

$$y\in A'\cap(V(x_0)-\{x_0\})$$

由于空间的可分离性及$V(x_0)$是开集，故存在y的邻域G_y，使得 $y\in G_y\subset V(x_0)-\{x_0\}$，因此

$$\phi\neq A\cap(G_y-\{y\})\subset A\cap(V(x_0)-\{x_0\})$$

从而

$$x_0\in A'$$

即 A' 是闭集。

（证法 2）若 $x_0\in A'$，则必有x_0的开邻域$V_1(x_0)$使得

$$A\cap(V_1(x_0)-\{x_0\})=\phi$$

由于$\{x_0\}$为闭集，故由于空间可分离性，知 $V_1(x_0)-\{x_0\}$ 为开集，所以，$\forall x\in V_1(x_0)-\{x_0\}$ 有 $x\in A'$，从而 $V_1(x_0)\cap A'=\phi$ 所以

$$V_1(x_0)\subset(A')^c$$

易知 $(A')^c$ 为开集（因为其中的点都为其内点，从而其为一族开集之并），故 A' 为闭集。

13. “$\Longrightarrow$”若F：$X\to Y$连续，A为Y中闭集，故 $A^c=Y-A$ 是Y中开集，从而$F^{-1}(A^c)$为X中开集。由于 $F^{-1}(A^c)=X-F^{-1}(A)=(F^{-1}(A))^c$，因此，$F^{-1}(A)$ 为X中的闭集。

“$\Longleftarrow$”若Y中任一闭集A的原象$F^{-1}(A)$为X中的闭集，则Y中任一开集G，$F^{-1}(G^c)=F^{-1}(Y-G)$为X中闭集。由于 $F^{-1}(G^c)=X-F^{-1}(G)=(F^{-1}(G))^c$，可知 $F^{-1}(G)$为X中开集，因此，F是连续的。

14. 因 $F(4)=3$，而 3 的邻域只有$\{2,3,4\}$与X．又

$$F^{-1}(\{2,3,4\})=X,\ F^{-1}(X)=X$$

它们显然都包含 4 的邻域：{2，3，4} 与 X．所以，F在 4 连续。

又因 $F(3)=2$，而 2 的最小邻域为{ 2 }，其原象为 $F^{-1}(\{2\})=\{1,3)$，它不包含有 3 的任何邻域，因此，F在 3 不连续。

15. “$\Longrightarrow$”设F连续，由题 13 知对任意$A\subset X$，$F^{-1}\overline{(F(A))}$ 为X中闭集，而因

$$A\subset F^{-1}(F(A))\subset F^{-1}(\overline{F(A)})$$

从而

$$\overline{A}\subset\overline{F^{-1}(\overline{F(A)})}=F^{-1}(\overline{F(A)})$$

因此

$$F(\overline{A})\subset F(F^{-1}(\overline{F(A)}))\subset\overline{F(A)}$$

“$\Longleftarrow$”设 $\forall A\subset X$，有 $F(\overline{A})\subset\overline{F(A)}$，若 B为Y中闭集，由于 $F(F^{-1}(B))\subset B$，所以

$$\overline{F(F^{-}(B))}\subset\overline{B}=B$$

根据条件 $F(\overline{F^{-1}(B)})\subset\overline{F(F^{-1}(B))}\subset B$，所以

$$\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(B)$$

因此，$F^{-1}(B)$为X中闭集，由题 13 知F是连续的。

16. “$\Longrightarrow$”设F连续，$\forall B\subset Y$，由题 13 知 $F^{-1}(\overline{B})$是 X 闭集，由于

$$F^{-1}(B)\subset F^{-1}(\overline{B})$$

因此

$$\overline{F^{-1}(B)} \subset F^{-1}(\overline{B})$$

"$\Longleftarrow$" 设 $\forall B \subset Y$，有 $\overline{F^{-1}(B)} \subset F^{-1}(\overline{B})$，则对 Y 中的任一闭集 B，有

$$\overline{F^{-1}(B)} \subset F^{-1}(B)$$

显然有

$$F^{-1}(B) = \overline{F^{-1}(B)}$$

也即 $F^{-1}(B)$ 为 X 中的闭集，因此，由题13知 F 是连续映射。

17. 若 A 为 $(X, \mathscr{x})$ 中闭集，则 A^c 为开集，即 $A^c \in \mathscr{x}$，因 $\mathscr{x} \subset \mathscr{y}$，故 $A^c \in \mathscr{y}$，亦即 A 也为 $(X, \mathscr{y})$ 中的闭集。

18. "$\Longrightarrow$" 设 $\mathscr{y} \subset \mathscr{x}$，则任何 $G \in \mathscr{y}$，有 $G \in \mathscr{x}$，即 $I^{-1}(G) = G \in \mathscr{x}$，也即恒同映射 I：$(X, \mathscr{x}) \to (X, \mathscr{y})$ 是连续的。

"$\Longleftarrow$" 设 I：$(X, \mathscr{x}) \to (Y, \mathscr{y})$ 是连续的恒同映射。则 $\forall G \in \mathscr{y}$，$I^{-1}(G) = G \in \mathscr{x}$，也即 $\mathscr{y} \subset \mathscr{x}$。

19. 设 X，Y 分别有拓扑 $\mathscr{x}$，$\mathscr{y}$，$\forall G \in \mathscr{y}$

$$F^{-1}(G) = \begin{cases} \phi, & \text{当 } y_0 \overline{\in} G \\ X, & \text{当 } y_0 \in G \end{cases}$$

因此，$F^{-1}(G) \in \mathscr{x}$。所以，$F$ 是连续的。

20. 设 A 为 $(X, \mathscr{y})$ 中的紧集，若 $\mathscr{B} \subset \mathscr{x}$，且 $\mathscr{B}$ 覆盖 A，由于 $\mathscr{x} \subset \mathscr{y}$，故 $\mathscr{B}$ 也是 A 的 $(X, \mathscr{y})$ 中的一个开覆盖，由于 A 是 $(X, \mathscr{y})$ 中的紧集，必有有限个 $\mathscr{B}$ 的成员覆盖 A，也即 A 的 $(X, \mathscr{x})$ 中的任一开覆盖都有有限子覆盖。因此，A 也是 $(X, \mathscr{x})$ 中的紧集。

*21. 令 h：$X \to Y$，$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in A^c = X - A \end{cases}$

显然由已知条件，$f=h|_A$，$g=h|_B$，因此，只须证 h 是连续映射就行了。

设 D 为 X 中的任一子集，则

$$h(\overline{D})=h(\overline{(D\cap A)\cup(D\cap B)})$$

$$=h(\overline{(\overline{D}\cap A)}\cup\overline{(\overline{D}\cap B)})$$

$$\subset f(\overline{\overline{D}\cap A})\cup g(\overline{\overline{D}\cap B})$$

由于 $\overline{\overline{D}\cap A}$，$\overline{\overline{D}\cap B}$ 都为闭集，由 f，g 的连续性及题 15 知

$$h(\overline{D})\subset f(\overline{\overline{D}\cap A})\cup g(\overline{\overline{D}\cap B})$$

$$\subset\overline{f(\overline{D}\cap A)}\cup\overline{g(\overline{D}\cap B)}$$

$$=\overline{f(D\cap A)\cup g(D\cap B)}$$

$$=\overline{h(D\cap A)\cup h(D\cap B)}$$

$$=\overline{h((D\cap A)\cup(D\cap B))}=\overline{h(D)}$$

再由题15知 h：$X\to Y$ 是连续的。

注　同样可以证明：把 A，B 改成都为 X 中的开集，相应的命题也成立。

但若 A，B 都不是闭集(或开集)，命题就可能不成立。例如取 $X=Y=R$ 且赋予普通的拓扑(即一维欧氏空间的拓扑)，设 $A=Q$，$B=R-Q$（其中 Q 为有理数集），

$$f(x)=0\quad\forall x\in A$$

$$g(x)=1\quad\forall x\in B$$

则相应的 h：$R\to R$ 就不是连续的。

22.（I）任意 $x\in X$ 的任一邻域 $V(x)$，有开集 $G\in\mathscr{T}$，使得 $x\in G\subset V(x)$，从而

$$F(x)\in F(G)\subset F(V(x))$$

由于F是开映射，故 $F(G)\in\mathscr{Y}$，因此，$F(V(x))$为 $F(x)$ 的邻域。

反之，若对 $x\in X$ 的任一邻域$V(x)$，$F(V(x))$为$F(x)$的邻域，设 $G\in\mathscr{X}$，$\forall x\in G$，则G为 x 的邻域，所以$F(G)$为 $F(x)$ 的邻域。因而有开集 $V_x\in\mathscr{Y}$，使得 $F(x)\in V_x\subset F(G)$ 显然

$$F(G)=\bigcup_{x\in G}V_x$$

它是$(Y,\mathscr{Y})$中开集的并，所以$F(G)$为开集，即$F(G)\in\mathscr{Y}$，也即F是开映射。

（Ⅱ）“$\Longrightarrow$” 设可逆映射F：$X\to Y$ 是同胚映射，显然由 F^{-1}：$Y\to X$ 也是同胚映射。因此，F必是连续的开映射。

“$\Longleftarrow$” 若可逆映射是连续的开映射，则只须证 F^{-1}：$Y\to X$是连续的。但因 $(F^{-1})^{-1}(D)=F(D)$，所以，$\forall D\in\mathscr{X}$，$(F^{-1})^{-1}(D)=F(D)$ 恒为$\mathscr{Y}$中成员，也即 F^{-1} 是连续的。故F是同胚映射。

23.（Ⅰ）设 $x=F^{-1}(y)$，则对任意 x 的开邻域$V(x)$，由上题（Ⅰ）知，$F(V(x))$为 y 的开邻域。因此，由于 $y_n\to y=F(x)$，存在 k，使得 $n>k$ 时，$y_n\in F(V(x))$，因而

$$F^{-1}(y_n)=x_n\in V(x)\quad\forall n>k$$

也即

$$F^{-1}(y_n)=x_n\to x=F^{-1}(y)$$

（Ⅱ）设 $\{G_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}(\subset\mathscr{X})$为$F^{-1}(B)$ 的开覆盖，则 $\{F(G_\lambda);\ \lambda\in\Lambda\}(\subset\mathscr{Y})$ 为 B的开覆盖。由于B为$(Y,\mathscr{Y})$

中的紧集，因此，有有限子覆盖：

$$F(G_1),\ F(G_2),\ \cdots,\ F(G_k)$$

显然(由于F的可逆性)

$$G_1,\ G_2,\ \cdots,\ G_k$$

就是$F^{-1}(B)$的一个有限子覆盖。因此，$F^{-1}(B)$是$(X,\ \mathscr{T})$中的紧集。

24.（Ⅰ）$\forall x_0 \in A$，则 $\forall y \in A$，$y \neq x_0$由空间的分离性，存在开邻域 $V_y(x_0)$ 及 $V(y)$ 使得

$$V_y(x_0) \cap V(y) = \phi$$

显然上述所有 $V(y)$ 所组成的集类 $\{V(y);\ y \in A\}$ 为A的开覆盖。因此，有有限子覆盖

$$V(y_1),\ \cdots,\ V(y_k)$$

令

$$V(x_0) = \bigcap_{i=1}^{k} V_{y_i}(x_0)$$

显然 $V(x_0)$仍为 x_0 的开邻域，且

$$\phi = V(x_0) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} V(y_i)\right) \supset V(x_0) \cap A$$

因此

$$V(x_0) \subset A^c$$

所以

A^c为开集，亦即A为闭集。

（Ⅱ）设 $\{G_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$为紧集$A$的闭子集 B的任一开覆盖，由(Ⅰ)知A为闭集，因此，其闭子集B也必为原空间中的闭

集，故B^c为开集。显然$\{B^c, G_\lambda; \lambda\in\Lambda\}$为紧集$A$的开覆盖，所以有限子覆盖，不妨设为

$$B^c, G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \cdots, G_{\lambda_k}$$

由

$$A=B\cup(A-B)\subset(\bigcup_{i=1}^{k}G_{\lambda_i})\cup B^c$$

知

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{k}G_{\lambda_i}$$

因此，G_{λ_1}，…，G_{λ_k}为B的有限子覆盖，可知B为紧集。

（Ⅲ）由（Ⅰ）知紧集为闭集，所以，任意一族紧集的交在Hausdorff 空间中必为闭集，再由（Ⅱ）知此交集作为紧集的闭子集必为紧集。

（Ⅳ）设 A_i $(i=1, 2; \cdots, k)$都为紧集，记

$$B=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$$

若$\{G_\lambda; \lambda\in\Lambda\}$为$B$的任一开覆盖，则它当然也是每个$A_i$，$(i=1, 2, \cdots k)$的开覆盖。因此，可从$\{G_\lambda\}$中取出有限个成员覆盖$A_i$ $(i=1, \cdots, k)$。由此易知有$\{G_\lambda\}$中有限个成员覆盖B，所以B是紧集。

25. 假定$A'=\phi$，则$\forall x\in X$，存在开邻域$V(x)$，使得

$$(V(x)-\{x\})\cap A=\phi$$

显然上述$V(x)$的全体$\{V(x); x\in X\}$为紧集X的开覆盖，因此，有有限子覆盖设为

$$V(x_1), V(x_2), \cdots, V(x_k)$$

由于

$$A\subset X=\bigcup_{i=1}^{k}V(x_i)$$

且

$$A\cap(V(x_i)-\{x_i\})=\phi\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

则易知A中至多有k个点，这就与A为无限集相矛盾。故紧空间中任一无限子集都有聚点。

26. 显然只须证对任意开邻域$V(x)$，不属于$V(x)$的项x_n只有有限个，也即$(A\cap V(x))_A^c$是有限集，其中A是点列$\{x_n\}$组成的集。

事实上，若$(A\cap V(x))_A^c$恒为无限集，即$\{x_n\}$有无穷子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$使得$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\cap V(x)=\phi$，那末由25题知$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$必有聚点$y$，且由上式知此聚点$y\neq x$，这就与$A=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$只有唯一聚点$x$相矛盾。

*27.（Ⅰ）因R中非空开集A，其点都为其内点，也即$\forall x\in A$，存在开区间$(x-\delta_x,\ x+\delta_x)$，使得

$$V_{\delta_x}(x)=(x-\delta_x,\ x+\delta_x)\subset A$$

因此

$$A=\bigcup_{x\in A}(x-\delta_x,\ x+\delta_x)$$

其中$(x-\delta_x,\ x+\delta_x)\in\mathscr{B}$。所以，$R$中一切开区间组成的集类$\mathscr{B}$为$R$的拓扑基。

（Ⅱ）若$\mathscr{R}\subset\widetilde{\mathscr{R}}\subset\mathscr{X}$，且$\mathscr{R}$为$(X,\ \mathscr{X})$的拓扑基。因此，$\mathscr{X}$中的任一成员$G$，若$G\neq\phi$，$G$可由$\mathscr{R}$的某些成员的并表示，由于$\mathscr{R}$的成员都是$\widetilde{\mathscr{R}}$的成员，因而$G$也可由$\widetilde{\mathscr{R}}$中的某些

成员的并表示。所以$\widetilde{\mathscr{B}}$也是$(X, \mathscr{T})$的拓扑基。

*28. 因 $\mathscr{D}=\{A; A\subset X\}$，所以，$X$的任一单点集 $\{x\}\in\mathscr{D}$，且由任意子集 $A(\subset X)$ 有

$$A=\bigcup_{x\in A}\{x\}$$

知 $\mathscr{B}=\{x\}; x\in X\}$为$(x, \mathscr{D})$的拓扑基

*29. 设 $\mathscr{B}_i$ $(i=1, 2)$ 为$(X, \mathscr{T}_i)$ $(i=1, 2)$的拓扑基。

若 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$，则 $B\in\mathscr{B}_1\subset\mathscr{T}_2$，因此，$B\in\mathscr{T}_2$，所以$B$必为 $\mathscr{B}_2$ 中某些成员之并。

反之，若每个 $B\in\mathscr{B}_1$ 都是 $\mathscr{B}_2$ 中某些成员的并，则每个非空的 $G\in\mathscr{T}_1$，它是$\mathscr{B}_1$ 的某些成员的并，显然它也是$\mathscr{B}_2$ 的某些成员的并，也即必有 $G\in\mathscr{T}_2$，因此，$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$ 。

*30. “$\Longrightarrow$” 由已知条件，若 $\mathscr{B}$为X的拓扑，那末$\mathscr{B}$是$\mathscr{B}$的拓扑基。所以，（Ⅰ）自然成立。

又若B_1，$B_2\in\mathscr{B}$，因 $\mathscr{B}\subset\widetilde{\mathscr{B}}$，故 $B_1\cap B_2\in\widetilde{\mathscr{B}}$，即 $B_1\cap B_2$ 是$\mathscr{B}$的某些成员的并。对 $x\in B_1\cap B_2$，必有 $B_3\in\mathscr{B}$ 使得

$$x\in B_3\subset B_1\cap B_2$$

“$\Longleftarrow$” 设$\mathscr{B}$满足（Ⅰ）、（Ⅱ），由$\widetilde{\mathscr{B}}$的假设 $\phi\in\widetilde{\mathscr{B}}$，又由（Ⅰ）知 $X\in\widetilde{\mathscr{B}}$，即拓扑公理（1）成立。

设 $\{G_\lambda; \lambda\in\Lambda\}\subset\widetilde{\mathscr{B}}$，则每个 G_λ 是$\mathscr{B}$的一些成员的并。因此，$\bigcup_\lambda G_\lambda$ 也必为$\mathscr{B}$的某些成员的并，也即 $\bigcup_\lambda G_\lambda\in\widetilde{\mathscr{B}}$，故拓扑公理（2）成立。

设 G_1，$G_2\in\widetilde{\mathscr{B}}$，则存在$\{B_{1\lambda};\ \lambda\in\Lambda\}$，$\{B_{2\mu};\ \mu\in I\}\subset\mathscr{B}$ 使得

$$G_1=\bigcup_{\lambda}B_{1\lambda};\quad G_2=\bigcup_{\mu}B_{2\mu}$$

因此

$$G_1\cap G_2=(\bigcup_{\lambda}B_{1\lambda})\cap(\bigcup_{\mu}B_{2\mu})$$

$$=\bigcup_{\lambda,\mu}(B_{1\lambda}\cap B_{2\mu})$$

而由条件(Ⅱ)知$B_{1\lambda}\cap B_{2\mu}$是$\mathscr{B}$的某些成员的并，因而$G_1\cap G_2$也为$\mathscr{B}$的一些成员的并，也即 $G_1\cap G_2\in\widetilde{\mathscr{B}}$，所以$\widetilde{\mathscr{B}}$满足拓扑公理(3)。

由上知$\widetilde{\mathscr{B}}$为X的拓扑。

*31. "$\Longrightarrow$" 假设$\widetilde{\mathscr{B}}=\mathscr{X}$，故$\widetilde{\mathscr{B}}\supset\mathscr{X}$，显然其等价于条件(Ⅰ)；又∵ $\widetilde{\mathscr{B}}=\mathscr{X}$ 必有 $\widetilde{\mathscr{B}}\subset\mathscr{X}$，而它等价于条件(Ⅱ)。

"$\Longleftarrow$" 设(Ⅰ)，(Ⅱ)成立，$A\in\mathscr{X}$，由(Ⅰ)知A必为$\widetilde{\mathscr{B}}$中某些成员的并，也即必为$\widetilde{\mathscr{B}}$的成员，所以，$A\in\widetilde{\mathscr{B}}$，从而有 $\mathscr{X}\subset\widetilde{\mathscr{B}}$。

完全类似，由(Ⅱ)可知有 $\widetilde{\mathscr{B}}\subset\mathscr{X}$，因此

$$\mathscr{X}=\widetilde{\mathscr{B}}$$

§ 2.2 度量空间及其例子

1. $d(x_1,x_n)\leqslant d(x_1,x_2)+d(x_2,x_n)$

$$\leqslant d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+d(x_3,x_n)\leqslant\cdots$$

$$\leqslant d(x_1,\ x_2)+d(x_2,\ x_3)+d(x_3,\ x_4)+\cdots$$
$$+d(x_{n-1},\ x_n)$$

2.（Ⅰ）由上题：

$$d(x,\ y)\leqslant d(x,\ z)+d(z,\ w)+d(w,\ y)$$

$$\therefore\quad d(x,\ y)-d(z,\ w)\leqslant d(x,\ z)+d(w,\ y)$$
$$\doteqdot d(x,\ z)+d(y,\ w)\qquad(\text{Ⅰ})$$

同理由

$$d(z,\ w)\leqslant d(z,\ x)+d(x,\ y)+d(y,\ w)$$

$$d(z,\ w)-d(x,\ y)\leqslant d(z,\ x)+d(y,\ w)\qquad(\text{Ⅱ})$$

由（Ⅰ）（Ⅱ）有

$$|d(x,\ y)-d(z,\ w)|\leqslant d(x,\ z)+d(y,\ w)$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）中令 $w=y$ 即得，或直接用三角不等式

$$d(x,\ y)\leqslant d(x,\ z)+d(z,\ y)$$

有

$$d(x,\ y)-d(z,\ y)\leqslant d(x,\ z)$$

同理由

$$d(z,y)\leqslant d(z,x)+d(x,y)=d(x,z)+d(x,y)$$

有

$$d(z,\ y)-d(x,\ y)\leqslant d(x,\ z)$$

从而有

$$|d(x,\ y)-d(z,\ y)|\leqslant d(x,\ z)$$

3. $\forall x,\ y,\ z\in R$，有

$$d(x,\ y)=\sqrt{|x-y|}\leqslant\sqrt{|x-z|+|z-y|}$$

$$\leqslant\sqrt{(\sqrt{|x-z|}+\sqrt{|z-y|})^2}$$

$$=\sqrt{|x-z|}+\sqrt{|z-y|}=d(x,\ z)+d(z,\ y)$$

所以，$d(x,\ y)=\sqrt{|x-y|}$ 满足三角不等式，显然又满足严格正性与对称性。故 $d(x,\ y)=\sqrt{|x-y|}$ 是 R上的一个度量。

4. 若 $d(x,\ y)=|f(x)-f(y)|$ 是R上的度量，故

$$d(x,\ y)=0\iff x=y;\ \text{即}\ f(x)=f(y)\iff x=y$$

也即 $f(x)$ 是R到 $f(R)$ 上的一对一的映射，由于 $f:\ R\to R$ 是连续的，它必为严格单调的。

反之，若 $f(x)$ 为R上严格单调的连续函数，显然

$d(x,\ y)=|f(x)-f(y)|=0\iff x=y;\ d(x,\ y)\geqslant 0$，

$d(x,\ y)=d(y,x);\ d(x,\ y)=|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(z)|$

$+|f(z)-f(y)|=d(x,z)+d(z,y)$。因此，$d$是$R$上的度量。

5. $d(x,\ y)=|f(x)-f(y)|$ 由题 4 知显然满足三角不等式及对称性，非负性，而 $d(x,\ y)$为 R 上的度量，必满足：

$d(x,\ y)=|f(x)-f(y)|=0\iff x=y$；也即 $f:\ R\to R$是单射，为 $d(x,\ y)=|f(x)-f(y)|$ 是R上度量的充要条件。

6. 设 $z=\{\zeta_n\}\in l$，由于

$$|\xi_n-\eta_n|\leqslant|\xi_n-\zeta_n|+|\zeta_n-\eta_n|$$

$$\leqslant\sup_n|\xi_n-\zeta_n|+\sup_n|\zeta_n-\eta_n|$$

知

$$\sup_n|\xi_n-\eta_n|\leqslant\sup_n|\xi_n-\zeta_n|+\sup_n|\zeta_n-\eta_n|$$

即

$$d_\infty(x,\ y)\leqslant d\ (x,\ z)+d_\infty(z,\ y)$$

因此，

d_∞ 满足三角不等式，而严格正性对称性 d_∞ 是显然成立的。故 d_∞ 是 l^∞ 上的度量。

7. 由于 $x,\ y\in l^\infty$ 时有常数 $M_x,\ M_y>0$ 使得

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n|\xi_n-\eta_n|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\right)(\sup_n|\xi_n|+\sup_n|\eta_n|)$$

$$=(M_x+M_y)\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n<+\infty$$

所以，$d:\ l^\infty\times l^\infty\to R$，且对任意$x,\ y,z\in l^\infty$，设 $z=\{\zeta_n\}$，有

$$d(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n|\xi_n-\eta_n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(|\xi_n-\zeta_n|+|\zeta_n-\eta_n|)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n|\xi_n-\zeta_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n|\zeta_n-\eta_n|$$

$$=d(x,\ z)+d(z,\ y)$$

知 d 满足三角不等式，又显然满足严格正性及对称性。因此，d 是 l^∞ 上的度量。

8. ρ 显然满足度量公理(1)、(2)，只须证也满足三角不等式。由于 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$，$f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}>0$，故可知 $f(t)$ 是$(0,\ +\infty)$上的严格增函数。从而由

$$\rho(x,\ y)=\frac{d(x,\ y)}{1+d(x,\ y)}\leqslant\frac{d(x,\ z)+d(z,\ y)}{1+d(x,\ z)+d(z,\ y)}$$

$$=\frac{d(x,\ z)}{1+d(x,z)+d(z,y)}+\frac{d(z,\ y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$\leqslant\frac{d(x,\ z)}{1+d(x,\ z)}+\frac{d(z,\ y)}{1+d(z,\ y)}=\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y)$$

知 ρ 满足三角不等式。

9. 由 f 是满足 $f(0)=0$，$f(u+v)\leqslant f(u)+f(v)\ \forall u$，$v\in[0,\ +\infty)$的严格增函数。

因此

$$\rho(x,\ y)=f(d(x,\ y))\geqslant 0$$

且

$$\rho(x,y)=0\Longleftrightarrow d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$$

显然

$$\rho(x,\ y)=\rho(y,\ x)$$

又

$$\rho(x,\ y)=f(d(x,y))\leqslant f(d(x,z)+d(z,\ y))$$

$$\leqslant f(d(x,\ z))+f(d(z,\ y))$$

$$=\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y)$$

所以，$\rho(x,\ y)$是X上的度量。

10. 由于 d 是X上的度量，因此，$\rho(x,\ y)=[d(x,\ y)]^{\alpha}$ 显然满足严格正性及对称性。下证 ρ 满足三角不等式，由于函数 $y=f(x)=x^{\alpha}$，在$[0,\ +\infty)$上严格增函数，且满足

$$f(u+v)\leqslant f(u)+f(v)\quad \forall u,\ v\in[0,\ +\infty)$$

事实上，令 $\varphi(t)=t^{\alpha}+(1-t)^{\alpha}\quad t\in[0,\ 1]$，

$$\varphi'(t)=\alpha t^{\alpha-1}-\alpha(1-t)^{\alpha-1}$$

$$\varphi''(t)=\alpha(\alpha-1)[t^{\alpha-2}+(1-t)^{\alpha-2}]<0,\quad t\in[0,1]$$

$$\varphi(0)=\varphi(1)=1$$

易知

$$\varphi(t)\geqslant\varphi(0)=\varphi(1)=1,\quad \forall t\in[0,1]$$

也即

$$t^{\alpha}+(1-t)^{\alpha}\geqslant 1\quad t\in[0,1],\ 0<\alpha<1$$

从而对 $u,\ v\geqslant 0$，就有

$$(u+v)^{\alpha}\leqslant u^{\alpha}+v^{\alpha}$$

由题 9 知 $\rho(x,\ y)=[d(x,\ y)]^{\alpha}$ 满足三角不等式。

11. 若 $\int_a^b|x(t)|^p dt=0$ 或 $\int_a^b|y(t)|^q dt=0$，易知 $x(t)\,y(t)\overset{\text{a.e.}}{=}0$，从而不等式自然成立。

设 $\int_a^b|x(t)|^p dt>0$，$\int_a^b|y(t)|^q dt>0$，令

$$A=\frac{|x(t)|}{\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{1/p}},\quad B=\frac{|y(t)|}{\left(\int_a^b|y(t)|^q dt\right)^{1/q}}$$

由杨格不等式得

$$AB=\frac{|x(t)\,y(t)|}{\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{1/p}\cdot\left(\int_a^b|y(t)|^q dt\right)^{1/q}}$$

$$\leqslant\frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}=\frac{1}{p}\cdot\frac{|x(t)|^p}{\int_a^b|x(t)|^p dt}$$

$$+\frac{1}{q}\cdot\frac{|y(t)|^q}{\int_a^b|y(t)|^q dt},\quad \forall t\in[a,\ b]$$

两边积分得

$$\frac{\int_a^b|x(t)\ y(t)|dt}{\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b|y(t)|^q dt\right)^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

故积分形式的 Hölder 不等式成立。

若 $p=1$，Minkowski 不等式显然成立。因为

$$\int_a^b|x(t)\pm y(t)|dt\leqslant\int_a^b(|x(t)|+|y(t)|)dt$$

$$=\int_a^b|x(t)|dt+\int_a^b|y(t)|dt$$

设 $p>1$，则 $x,\ y\in L^p[a,\ b]$ 时，

$$\int_a^b|x(t)\pm y(t)|^p dt\leqslant\int_a^b|x(t)\pm y(t)|^{p-1}(|x(t)|+|y(t)|)dt$$

$$=\int_a^b|x(t)||x(t)\pm y(t)|^{p-1}dt$$

$$+\int_a^b|y(t)|\cdot|x(t)\pm y(t)|^{p-1}dt$$

$$\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b|x(t)\pm y(t)|^{(p-1)q}dt\right)^{1/q}$$

$$+\left(\int_a^b|y(t)|^p dt\right)^{1/p}\cdot\left(\int_a^b|x(t)\pm y(t)|^{(p-1)q}dt\right)^{1/q}$$

$$=\left[\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{1/p}\right.$$

$$\left.+\left(\int_a^b|y(t)|^p dt\right)^{1/p}\right]\left(\int_a^b|x(t)\pm y(t)|^p dt\right)^{1/q}$$

由此，$\left(\text{因 }\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ 有

$$\left(\int_a^b |x(t)\pm y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$
$$+\left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

12. 提示：（Ⅰ） 可用 $p=2$ 的 Hölder 不等式；或其他方法证明。

（Ⅱ） 可用 $p=2$ 的 Hölder 积分形式不等式或其他方法（有多种方法）证明。

13. $d(x,\ y)\geqslant 0$及 $x=y$ 时，$d(x,\ y)=0$ 是显然的。若 $d(x,\ y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|dt=0$，由于 x、y 都是$[a,\ b]$上连续函数，因此，必有 $x(t)\equiv y(t)$，$t\in[a,\ b]$。所以，d是严格正的。又 $d(x,\ y)=d(y,\ x)$ 显然成立，且显然有

$$\int_a^b |x(t)-y(t)|dt\leqslant\int_a^b |x(t)-z(t)|\,dt+\int_a^b |z(t)-y(t)|dt\ ,$$

也即 $d(x,\ y)\leqslant d(x,\ z)+d(z,\ y)$，$\forall x,\ y,\ z\in C[a,\ b]$。所以，$d$ 是 $C[a,\ b]$上的一个度量。

14. $d(f,\ g)\geqslant 0$，及当 $f=g$ 时有 $d(f,\ g)=0$，$d(f,\ g)=d(g,\ f)$ 都是显然的，而又由最大模原理知，在 $|z|\leqslant 1$ 上解析函数 $f(z)$ 在边界 $|z|=1$ 上 $|f(z)|$ 达到最大值，从而 $d(f,g)=\max\limits_{|z|=1}|f(z)-g(z)|=0\Longrightarrow f(z)\equiv g(z)$

$\forall z\in\{z;\ |z|\leqslant 1\}$. 因而，只须再证 d 满足三角不等式。由不等式

$$|f(z)-g(z)|\leqslant|f(z)-h(z)|+|h(z)-g(z)|$$
$$\leqslant\max_{|z|=1}|f(z)-h(z)|+\max_{|z|=1}|h(z)-g(z)|$$

对任一 $z\in\{z;\ |z|=1\}$ 成立，推知

$$\max_{|z|=1}|f(z)-g(z)|\leqslant\max_{|z|=1}|f(z)-h(z)|+\max_{|z|=1}|h(z)-g(z)|$$

所以

$$d(f,\ g)\leqslant d(f,\ h)+d(h,\ g)$$

成立。故$(X,\ d)$是度量空间。

15. 与$C[a,\ b]$上度量 $d(x,\ y)=\max_{t\in[a,\ b]}|x(t)-y(t)|$ 的验证几乎完全一样。略

16. $d(x,\ y)$ 显然满足严格正性与对称性。又对 $x,\ y,\ z\in X$，若 $x=y$，三角不等式自然成立；若 $x\neq y$，则必有 $x\neq z$ 或 $y\neq z$，故此时有

$$d(x,\ y)=1\leqslant d(x,\ z)+d(z,\ y)$$

因此，d 满足三角不等式，也即 d 是 X 上的度量。

在此空间中，任一半径小于等于 1 的开球 $V_r(x)=\{x\}$ $(0<r\leqslant1)$ 都是单点集，也即$(X,\ d)$中单点集都是开集，从而任一子集都是开集，而它的余集也是开集。故离散度量空间 $(X,\ d)$ 中每个子集都既是开集，又是闭集。

17. 任何不同的点对 $x,\ y$，必有 $d(x,\ y)=2r>0$，从而开球 $V_r(x)$，$V_r(y)$ 互不相交。因为若有

$$z\in V_r(x)\cap V_r(y)$$

则

$$d(z,\ x)<r,\ \ d(z,\ y)<r$$

又

$$d(x,\ y)=2r\leqslant d(x,\ z)+d(z,\ y)<r+r=2r$$

就产生矛盾。

18. $x_0 \in A$，子空间(A, d)中开球为

$$\{x \in A;\ d(x, x_0) < r\} = A \cap \{x \in X;\ d(x, x_0) < r\}$$

$$= A \cap V_r(x_0)$$

因此，(A, d)中开集必为A与(X, d)中开集的交，从而(A, d)的拓扑就是(X, d)的拓扑诱导的拓扑。

19. $A = \{x\}$，则 $\mathrm{dia}A = 0$ 是显然的，反之若 $A \neq \phi$，$\mathrm{dia}A = 0$，则A必为单点集。事实上，假定有 $x, y \in A$，且 $x \neq y$，那末 $\mathrm{dia}A = \sup\{d(x_1, x_2);\ x_1, x_2 \in A\} \geqslant d(x, y) > 0$，这与 $\mathrm{dia}A = 0$ 矛盾。

20. 设 $\mathrm{dia}A = a$，$\mathrm{dia}B = b$，$x, y \in A \cup B$，若 $x, y \in A$（或 $x, y \in B$），则 $d(x, y) \leqslant a$（或 b）；若x, y属于不同的集中，例如 $x \in A$，$y \in B$，取定点 $x_0 \in A$，$y_0 \in B$，则 $d(x, y)$

$$\leqslant d(x, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y) \leqslant a + d(x_0, y_0) + b$$

因此，$\forall x, y \in A \cup B$，恒有

$$d(x, y) \leqslant a + b + d(x_0, y_0)$$

所以

$$\mathrm{dia}(A \cup B) \leqslant a + b + d(x_0, y_0) < +\infty$$

即A，B都是有界集，$A \cup B$也必是有界集。

21. 下面分别只证各个 d 都满足三角不等式。因为严格正性与对称性都是显然的。

（1）设 $z = (z_1, z_2)$，$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$，则有

$$d(x, y) \leqslant d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1) + d_2(x_2, z_2)$$

$$+d_2(z_2,\ y_2)=d(x,\ z)+d(z,\ y)$$

（2）设 $d(x,\ y)=\max\{d_1(x_1,\ y_1),\ d_2(x_2,\ y_2)\}$

因

$$d_1(x_1,\ y_1)\leqslant d_1(x_1,\ z_1)+d_1(z_1,\ y_1)$$

$$\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

$$d_2(x_2,\ y_2)\leqslant d_2(x_2,\ z_2)+d_2(z_2,\ y_2)$$

$$\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

故

$$d(x,\ y)\leqslant d(x,\ z)+d(z,\ y)$$

（3）设 $d(x,y)=([d_1(x_1,y_1)]^p+[d_2(x_2,y_2)]^p)^{1/p}$，$(p>1)$ 则

$$d(x,\ y)\leqslant([d_1(x_1,z_1)+d_1(z_1,y_1)]^p+[d_2(x_2,z_2)$$

$$+d_2(z_2,\ y_2)]^p)^{1/p}\leqslant([d_1(x_1,\ z_1))]^p$$

$$+[d_2(x_2,\ z_2)]^p)^{1/p}+([d_1(z_1,\ y_1)]^p$$

$$+[d_2(z_2,\ y_2)]^p)^{1/p}=d(x,\ z)+d(z,\ y)$$

特别，$p=2$，即 $d(x,y)=\sqrt{[d_1(x_1,y_1)]^2+[d_2(x_2,y_2)]^2}$ 是上述 d 的特例。

22.（1）设 $1\leqslant p<q<+\infty$，$x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^p$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<+\infty$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$，从而 $x\in c$，且存在 k，使得 $n>k$ 时都有

$$|\xi_n|\leqslant 1,\ |\xi_n|^q\leqslant|\xi_n|^p$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^q\leqslant\sum_{n=1}^{N}|\xi_n|^q+\sum_{n=N+1}^{\infty}|\xi_n|^p<+\infty$$

因此，$x\in l^q$，也即 $l^p\subset l^q$。显然 $l^q\subset c\subset l^\infty$。于是，当 $1<p<q<+\infty$ 时，必有

$$l^1\subset l^p\subset l^q\subset c\subset l$$

（2）$p>1$ 时，$x=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right\}\in l^p$，但 $x\in l^1$，故 $l^1\subsetneq l^p$。同样 $x=\left\{\frac{1}{n^{1/p}}\right\}_{n=1}^{\infty}\in l^q$，但 $x\in l^p$，故 $l^p\subsetneq l^q$。$x=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}\in c$，但 $x\in l^q$，故 $l^q\subsetneq c$；$x=\{(-1)^n\}\in l$，但 $x\in c$，故 $c\subsetneq l$。

23. 显然 $C[a,b]\subsetneq L[a,b]\subsetneq L^p[a,b]$。下证：当 $1<p_2<p_1<+\infty$ 时，有 $L^p[a,b]\subsetneq L^p[a,b]\subsetneq L[a,b]$。

设 $x(t)\in L^p[a,b]$，$E=\{t\in[a,b];\ |x(t)|\leqslant 1\}$

$$\int_a^b|x(t)|^{p_2}dt=\int_E|x(t)|^{p_2}dt+\int_{[a,b]-E}|x(t)|^{p_2}dt$$

$$\leqslant m(E)+\int_{[a,b]-E}|x(t)|^{p_1}\,dt$$

$$\leqslant m(E)+\int_a^b|x(t)|^{p_1}\,dt<+\infty$$

因此，$x(t)\in L^{p_2}[a,b]$，即 $L^{p_1}[a,b]\subset L^{p_2}[a,b]$。

设 $x(t)=(t-a)^{-\frac{1}{p_1}}$，显然 $x\in L^{p_2}[a,b]$，但 $x\in L^{p_1}[a,b]$，所以 $L^{p_1}[a,b]\subsetneq L^{p_2}[a,b]$。

同理，$x(t)=(t-a)^{-\frac{1}{p_2}}\in L[a,b]$，但 $x\in L^{p_2}[a,b]$，且仿上可证，$L^{p_1}[a,b]\subset L[a,b]$，故有 $L^{p_2}[a,b]\subsetneq L[a,b]$。

24. 令$f(p)=(\xi^p+\eta^p)^{1/p}$ $(\xi\geqslant 0,\ \eta\geqslant 0)$，易知当$\xi>0,\ \eta>0$ 时，$f'(p)=\frac{f(p)}{p^2}[\xi^p\ln\xi^p+\eta^p\ln\eta^p-(\xi^p+\eta^p)\ln(\xi^p+\eta^p)]\cdot\frac{1}{\xi^p+\eta^p}<0$。当 $\xi=0$ 或 $\eta=0$ 时，显然 $f(p)\geqslant f(q)\ \forall\ 1\leqslant p<q<+\infty$。因此，$f(p)$ 对 $(\xi\geqslant 0,\ \eta\geqslant 0$ 时）p 而言是减函数。由此可知

$$d_p(x,\ y)\geqslant d_q(x,\ y)\ \forall\ 1\leqslant p<q<+\infty$$

成立。

注　显然，对 R^n 与 l^1 中也有类似结果，即

（Ⅰ）若 $x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)$，$y=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_n)\in R^n$，设

$$d_p(x,\ y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{1/p}$$

则

$$d_p(x,\ y)\geqslant d_q(x,\ y)\quad\forall\ 1\leqslant p<q<+\infty$$

（Ⅱ）对l^1中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^1$，记

$$d_p(x,\ y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{1/p}\quad(1\leqslant p<q<+\infty)$$

则

$$d_p(x,\ y)\geqslant d_q(x,\ y)\quad\forall\ 1\leqslant p<q<+\infty$$

成立，（见§ 2.2 题22）

由此，不难知道又提供了题22中 $l^1\subset l^p\subset l^q$ 的其它证法。

25. d 显然满足度量公理（1）、（2），而又对任 $P(D)$、$Q(D)$，$S(D)\in X(n)$，记 $S(D)=\sum_{i=0}^{n}s_iD^i$，有

$$d(P(D),\ Q(D))=\sum_{i=0}^{n}|p_i-q_i|\leqslant\sum_{i=0}^{n}(|p_i-s_i|+|s_i-q_i|)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}|p_i-s_i|+\sum_{i=0}^{n}|s_i-q_i|$$

$$=d(P(D),\ S(D))+d(S(D),\ Q(D))$$

因此，$(X(n),\ d)$为度量空间。

26. 显然 $\rho(x_1,\ x_2)\geqslant 0\quad \forall x_1,\ x_2\in X$；$\rho(x_1,\ x_2)=d(F(x_1),\ F(x_2))=0$，由于$F$是单射，可知 $x_1=x_2$；从而 $\rho(x_1,\ x_2)=0\Longleftrightarrow x_1=x_2$ 也自然成立，又

$$\rho(x_1,x_2)=d(F(x_1),F(x_2))\leqslant d(F(x_1),F(x_3))$$

$$+d(F(x_3),F(x_2))=\rho(x_1,x_3)+\rho(x_3,x_2)$$

因此，ρ是X上的度量。

27. 由(Ⅰ)知 $\rho(x,\ y)\geqslant 0\quad \forall x,y\in X$；且“$\rho(x,\ y)=0\Longleftrightarrow x=y$”。

因

$$\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x,\ x)+\rho(y,\ x)=\rho(y,x)$$

$$\rho(y,\ x)\leqslant\rho(y,\ y)+\rho(x,\ y)=\rho(x,y)$$

知ρ满足对称性(2)：$\rho(x,\ y)=\rho(y,\ x)$。因此，又由(Ⅱ)知ρ满足三角不等式：

$$\rho(x,\ y)\leqslant\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y)$$

故ρ为X上的度量。

§ 2.3 度量空间中的有关拓扑概念

1. 设 $y\in V[x_0,r]$。则 $d(x_0,\ y)>r$，易验证 $V(y,\varepsilon)$

(其中 $\varepsilon=d(x_0,\ y)-r>0$) 与 $V[x_0,\ r]$ 不相交，也即 $V(y,\ \varepsilon)\subset X-V[x_0,\ r]$。因此 $X-V[x_0,\ r]$中的点都是 $X-V[x_0,\ r]$ 的内点。所以 $V[x_0,\ r]$ 的余集是开集，也即闭球 $V[x_0,\ r]$ 是闭集。

由于开球 $V(x_0,\ r)$ 与 $X-V[x_0,\ r]$ 都是开集，而球面 $S(x_0,\ r)=X-(V(x_0,\ r)\cup(X-V[x_0,\ r]))$，因此球面是闭集。

在一般的度量空间中，$V[x_0,r]$未必是 $V(x_0,r)$ 的闭包，球面 $S(x_0,\ r)$也未必是非空的集。

例如，设 $(X,\ d)$ 是离散度量空间(X非单点集)，则当 $x_0\in X,\ 1\geqslant r>0$ 时，$V(x_0,\ r)=\{x_0\}$ 是单点集，而 $V[x_0,\ 1]=X$，且 $V(x_0,\ 1)=\{x_0\}$ 是闭集（也是开集），故 $V[x_0,1]\supset\overline{V(x_0,1)}=V(x_0,\ 1)=\{x_0\}$，又显然 $S(x_0,r)=\phi$ $\forall r\in(0,\ 1)$。上述严格包含关系成立。

2. 显然 $r=d(x,\ y)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|x(t)-y(t)|$

$$=\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|\sin t-\cos t|=\sqrt{2}\max_{t\in[0,\ 2\pi]}\left|\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\sqrt{2}$$

3. $\overset{\circ}{\Gamma}=\phi$，$\overline{\Gamma}=\Gamma\cup\{(0,\ y)\in R^2;\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$.

$$\mathrm{dia}\Gamma=\frac{2}{\pi}\sqrt{\pi^2+1}$$

4. (I) 设 $\mathrm{dia}\,\overline{A}=a$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\tilde{x},\ \tilde{y}\in\overline{A}$，使得

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<d(\tilde{x},\ \tilde{y})\leqslant a \qquad (1)$$

由于 $\tilde{x},\ \tilde{y}\in\overline{A}=A\cup A'$，必存在 $x_0,\ y_0\in A$，使得

$$d(x_0,\ \tilde{x})<\frac{\varepsilon}{4},\ d(y_0,\ \tilde{y})<\frac{\varepsilon}{4}$$

由 §2.2的题 2，$|d(x_0, y_0)-d(\tilde{x}, \tilde{y})|\leqslant d(x_0,\tilde{x})+d(y_0,\tilde{y})$ $<\varepsilon/2$，即

$$d(\tilde{x}, \tilde{y})-\frac{\varepsilon}{2}<d(x_0, y_0)<d(\tilde{x}, \tilde{y})+\frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

由(1)、(2)知

$$a\geqslant d(x_0, y_0)>a-\varepsilon,\ x_0, y_0\in A$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知 $\mathrm{dia}A=a=\mathrm{dia}\overline{A}$.

(Ⅱ) $d(x, A)=\inf\{d(x,y);\ y\in A\}$，设 $d(x, \overline{A})=b$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\tilde{y}\in\overline{A}$，使得

$$b\leqslant d(x, \tilde{y})<b+\frac{\varepsilon}{2}\ . \quad (3)$$

又由 $\tilde{y}\in\overline{A}$，必存在 $y_0\in A$，使得

$$d(y_0, \tilde{y})<\frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

由于

$$d(x, y_0)\leqslant d(x, \tilde{y})+d(y_0, \tilde{y})$$

$$b\leqslant d(x, y_0)<b+\varepsilon,\ y_0\in A$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，知 $b=d(x, A)=d(x, \overline{A})$。

注 上面只对A为有界集的情形进行了讨论，若A为无界集，则结论自然成立的。

另用定理2.3.1亦可来证之。

设 $\mathrm{dia}\overline{A}=a<+\infty$，则 $\exists x_n, y_n\in\overline{A}$，使得

$$a-\frac{1}{n}<d(x_n, y_n)\leqslant a \quad (*)$$

又 $\exists x_n', y_n'\in A$，使得 $d(x_n, x_n')<\frac{1}{n}$，$d(y_n, y_n')<\frac{1}{n}$

从而由

$$|d(x'_n, y'_n) - d(x_n, y_n)| \leqslant d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) < \frac{2}{n}$$

及(*)得

$$a - \frac{3}{n} < d(x'_n, y'_n) \leqslant a \quad \forall n = 1, 2, \cdots$$

令 $n \to \infty$ 得 $a = \lim d(x'_n, y'_n) \leqslant \mathrm{dia}A$ $(\because x'_n, y''_n \in A)$

又显然

$$\mathrm{dia}\overline{A} = a \geqslant \mathrm{dia}A$$

故得

$$\mathrm{dia}\overline{A} = \mathrm{dia}A = a$$

同样可用点列及数列极限的形式来证明

$$d(x, \overline{A}) = d(x, A)$$

5. $V(x_0, 1) = \{x \in C[-1, 1]; \max_{t \in [-1, 1]} |x(t) - t^2| < 1\}$,

$$V(x_0, 1) = \{x \in C[-1, 1]; \max_{t \in [-1, 1]} |x(t) - t^2| \leqslant 1\},$$

前者与后者几何上分别可用图形表示之。

6. 设 x_1, $x_2 \in X$, 则

$$d(x_1, y) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, y) \quad \forall y \in A$$

因此,

$$d(x_1, A) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, A) \qquad (1)$$

同样有

$$d(x_2, A) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_1, A) \qquad (2)$$

故由(1)、(2)得

$$|d(x_1, A)-d(x_2, A)|\leqslant d(x_1, x_2)$$

由此，知 $F(x)=d(x, A)$ 是X上 Lipschitz 连续的，当然是一致连续的，故必为连续泛函。

7. $x, y\in C[a,b]$，$d(Kx,Ky)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t(x(\tau)\right.$

$$\left.-y(\tau))d\tau\right|\leqslant\int_a^b|x(\tau)-y(\tau)|d\tau$$

$$\leqslant(b-a)\max_{a\leqslant\tau\leqslant b}|x(\tau)-y(\tau)|=(b-a)d(x, y)$$

因此，K：$C[a, b]\to C[a, b]$ 是一致连续的。

8. R^n，R^m中分别有欧几里德度量

$$d(x, x_0)=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\xi_i^{(0)}|^2\right)^{1/2},$$

$$\rho(y, y_0)=\left(\sum_{i=1}^{m}|\eta_i-\eta_i^{(0)}|^2\right)^{1/2}$$

其中 $x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)^T$，$y=(\eta_1, \cdots, \eta_m)^T$，$x_0=(\xi_1^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)})^T$，$y_0=(\eta_1^{(0)}, \cdots, \eta_m^{(0)})^T$。

若 $y=F(x)=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n}\\ & & \vdots & \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$，

$y_0=F(x_0)$，则

$$[\rho(y, y_0)]^2=\sum_{i=1}^{m}|\eta_i-\eta_i^{(0)}|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}f_{ij}\xi_j-\sum_{j=1}^{n}f_{ij}\xi_j^{(0)}\right|^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\Big|\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(\xi_j-\xi_j^{(0)})\Big|^2 \quad (\text{用 } p=2 \text{ 的}$$

Hölder 不等式)

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}|f_{ij}|^2\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j-\xi_j^{(0)}|^2\Big)$$

$$=C^2\cdot[d(x,\ x_0)]^2$$

其中 $C^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|f_{ij}|^2$ 是由F决定的常数，由此，知

$$\rho(F(x),\ F(x_0))\leqslant Cd(x,\ x_0),\ \forall x,\ x_0\in R^n$$

因此，F是 Lipschitz 连续的（当然是一致连续的，是连续映射)。

9. 设 $x,\ x_0\in L^2[a,\ b]$，则 $\forall t\in[a,\ b]$ 有

$$\begin{aligned}
&|Fx(t)-Fx_0(t)|\\
&\quad=\Big|\int_a^t(x^2(\tau)-x_0^2(\tau))d\tau\Big|\\
&\quad\leqslant\int_a^t(|x(\tau)|+|x_0(\tau)|)(|x(\tau)-x_0(\tau)|)d\tau\\
&\quad\leqslant\Big[\int_a^t(|x(\tau)|+|x_0(\tau)|)^2d\tau\Big]^{1/2}\\
&\quad\cdot\Big[\int_a^t|x(\tau)-x_0(\tau)|^2d\tau\Big]^{1/2}\\
&\quad\leqslant\Big[\int_a^b(|x(\tau)|+|x_0(\tau)|)^2d\tau\Big]^{1/2}d(x,\ x_0)\\
&\quad\leqslant\sqrt{2}\cdot\Big[\int_a^b(|x(\tau)|^2+|x_0(\tau)|^2)d\tau\Big]^{1/2}d(x,\ x_0)
\end{aligned}$$

因此

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|Fx(t)-Fx_0(t)|=\rho(Fx,\ Fx_0)$$

$$\leqslant\sqrt{2}\left[\int_a^b(|x(\tau)|^2+|x_0(\tau)|^2)d\tau\right]^{1/2}d(x,\ x_0)$$

由于当 $d(x,\ x_0)\to 0$ 时，由 $\left(\int_a^b|x(\tau)|^2d\tau\right)^{1/2}\leqslant$ $\left(\int_a^b|x_0(\tau)|^2d\tau\right)^{1/2}+\left(\int_a^b|x(t)-x_0(t)|^2dt\right)^{1/2}$ 可知，$\left[\int_a^b(|x(\tau)|^2+|x_0(\tau)|^2)d\tau\right]^{1/2}$ 为有界变量。因此，当 $d(x,\ x_0)\to 0$ 时，有 $\rho(Fx,\ Fx_0)\to 0$，即F在 $L^2[a,\ b]$ 上每一点x_0处都连续，所以，F是连续映射。注意，F不是一致连续的。

10. 取 $x_0(t)\equiv 0$，$x_n(t)=\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi(t-a)}{b-a}$，显然，$x_n,\ x_0\in C^{(1)}[a,\ b]$，且 $d(x_n,\ x_0)\to 0$，但是当 n 足够大时

$$d(Dx_n,\ Dx_0)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n'(t)-x_0'(t)|$$

$$=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\frac{2\pi}{b-a}\cos\frac{2n\pi(t-a)}{b-a}\right|=\frac{2\pi}{b-a}$$

故 $d(Dx_n,\ Dx_0)\not\to 0$ （当 $n\to\infty$ 时），也即 $D:\ C^{(1)}[a,\ b]\to C[a,\ b]$ 是不连续的。

11. 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$，即 $d(x_n,\ x)\to 0\quad(n\to\infty)$，故

$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，使得当 $n>K$ 时，恒有

$$d(x_n,\ x)<\varepsilon,$$

设 $\{x_{n_k}\}$为$\{x_n\}$的任一子列，当 $k>N$ 时，必有 $n_k>N$，从而也有

$$d(x_{n_k},\ x)<\varepsilon$$

因此，$\{x_{n_k}\}$ 也收敛，且都收敛于同一极限 x。

反过来，$\{x_n\}$的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛，作为 $\{x_n\}$ 的特殊子列：x_2，x_3，x_4，…，x_{n+1}，…它当然收敛，设其极限为 x，则显然 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

12. 由定义，度量空间$(X,\ d)$中，点列$\{x_n\}$收敛于 x，即 $d(x_n,\ x)\to 0$ 的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，使得当 $n>K$ 时，恒有 $d(x_n,\ x)<\varepsilon$，也即

$$x_n\in V(x,\ \varepsilon)$$

而 x 的每一邻域 $V(x)$，必存在 $\varepsilon>0$，使得

$$V(x,\ \varepsilon)\subset V(x);$$

从而当 $n>K$ 时，必有 $x_n\in V(x,\ \varepsilon)\subset V(x)$. 因此，必要性成立。

再证充分性：由于 $V(x,\ \varepsilon)$ 都为 x 的邻域，故存在N，使得当 $n>N$ 时，$x_n\in V(x,\ \varepsilon)$，即当 $n>N$ 时，恒有 $d(x_n,\ x)<\varepsilon$。由极限定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。

13. 设A为$(X,\ d)$中的闭集，令

$$A_n=\bigcup_{x\in A}V\left(x,\ \frac{1}{n}\right)$$

其中 $V\left(x,\ \frac{1}{n}\right)$是以 x 为圆心，$\frac{1}{n}$ 为半径的开球，显然A_n是开集。易验证

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n \qquad (1)$$

事实上，显然 $A\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，又若$y\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，则对任意

n，$y\in A_n$，从而 $d(y,\ A)\leqslant\frac{1}{n}$ 。

令 $n\to\infty$，$d(y,A)=0$，由于$A=\overline{A}$，故$y\in A$，即$A\supset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，因此，（1）成立。

设A为$(X,\ d)$中的开集，则 $B=A^c$ 为闭集，由上可知存在可列多个开集 B_n，使得

$$B(=A^c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$$

由 De-Morgen 公式，得

$$A(=B^c)=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n^c$$

显然 B_n^c 是闭集，即开集A是可列个闭集 B_n^c 之并。

14. 设 A，B 都是闭集，且 $A\cap B=\phi$。由于 $A\subset B^c$，故 $x\in A$，必有 $\delta_x>0$，使得

$$V(x,\ \delta_x)\subset B^c\ (\because B^c\text{为开集})$$

从而

$$A\subset\bigcup_{x\in A}V(x,\ \delta_x)\subset B^c$$

$$A\subset\bigcup_{x\in A}V\left(x,\ \frac{1}{2}\delta_x\right)\subset\overline{\bigcup_{x\in A}V\left(x,\ \tfrac{1}{2}\delta_x\right)}\subset\bigcup_{x\in A}V(x,\delta_x)\subset B^c$$

令

$$G=\bigcup_{x\in A}V\left(x,\ \frac{1}{2}\delta_x\right),\ \ V=\left(\overline{\bigcup_{x\in A}V\left(x,\ \tfrac{1}{2}\delta_x\right)}\right)^c$$

显然G，V都是开集，且 $A\subset G$，$B\subset V$，$G\cap V=\phi$。

另法证　由题 6 知 $F(x)=d(x,\ A)$ 是连续泛函，令

$$G=\{x\in X;\ d(x,\ A)<d(x,\ B)\}$$

显然

$$G=\{x\in X;\ d(x,A)-d(x,B)<0\}$$

$$=F^{-1}((-\infty,\ 0))$$

其中 $F(x)=d(x,\ A)-d(x,\ B)$ 是X上的连续泛函。因此，G是开集，且由于 $x\in A$，$d(x,\ A)=0<d(x,\ B)\neq 0$ （$\because B$为闭集），故$A\subset G$。

令 $$V=\{x\in X;\ d(x,\ B)<d(x,\ A)\}$$

同理可知V是开集，且 $B\subset V$，显然 $G\cap V=\phi$。

15. 由于

$$\{x\in X;\ f(x)<\lambda\}=f^{-1}((-\infty,\ \lambda))$$

$$\{x\in X;\ f(x)>\lambda\}=f^{-1}((\lambda,\ +\infty))$$

因此，必要性是显然的。

下证充分性。设对任意实数λ，$f^{-1}((-\infty,\ \lambda))$，$f^{-1}((\lambda,\ +\infty))$都为开集。则由于

$$f^{-1}((\lambda,\ \mu))=f^{-1}((-\infty,\ \mu))\cap f^{-1}((\lambda,\ +\infty))$$

故对任意开区间$(\lambda,\ \mu)$，$f^{-1}((\lambda,\ \mu))$都为开集。又因R中任一开集G都是(至多可列个)互不相交的开区间G_α之并：$G=\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha$，又由于

$$f^{-1}(G)=f^{-1}(\bigcup G_\alpha)=\bigcup f^{-1}(G_\alpha)$$

从而知$f^{-1}(G)$恒为$(X,\ d)$中开集。所以，$f:\ X\to R$是连续泛函。

注　上面证法对拓扑空间的情形也适用。

下面的证法，只适用于度量空间。

"$\Longrightarrow$" 设 $f: X\to R$ 连续。若 $x_0\in f^{-1}((-\infty, \lambda))$ 则 $f(x_0)<\lambda$，故必存在 $\delta>0$，使得当 $x\in X$，$x\in V(x_0, \delta)$ 时必有

$$f(x)\in V(f(x_0), \lambda-f(x_0))=(2f(x_0)-\lambda, \lambda)$$

即

$$2f(x_0)-\lambda<f(x)<f(x_0)+\lambda-f(x_0)=\lambda$$

所以

$$V(x_0, \delta)\subset f^{-1}((-\infty, \lambda))$$

故 $f^{-1}((-\infty, \lambda))$ 的点都为其内点。因此，任何实数 λ，$f^{-1}((-\infty, \lambda))$都是开集。同理可证，$f^{-1}((\lambda, +\infty))$都是开集。

"$\Longleftarrow$"设$x_0\in X$，对任给 $\varepsilon>0$，由假设 $f^{-1}((f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon))$是开集，显然 $x_0\in f^{-1}((f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon))$，故有 $\delta>0$，使得 $V(x_0, \delta)\subset f^{-1}((f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon))$。因此，$f$ 在 x_0 点连续。由于 x_0 的任意性，f 是连续函数。

16. 由题15，$f: (X, d)\to R$ 连续 $\Longleftrightarrow$ $\forall\lambda\in R$，$f^{-1}((-\infty, \lambda))$与 $f^{-1}((\lambda, +\infty))$ 都是开集 $\Longleftrightarrow$ $f^{-1}([\lambda, +\infty))$ 与 $f^{-1}((-\infty, \lambda])$ (对任何 $\lambda\in R$) 都是闭集。其中 $f^{-1}((-\infty, \lambda])=\{x\in X; f(x)\leqslant\lambda\}$ 为 $f^{-1}((\lambda, +\infty))$的余集；$f^{-1}([\lambda, +\infty))=\{x\in X; f(x)\geqslant\lambda\}$ 为 $f^{-1}((-\infty, \lambda)$的余集。

注　当然亦可有类似上题第一证法，或第二证法。

17. 由于 $F(x)$ 是初等函数，故 $F(x)$ 是连续的；易知

$F^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$，$x\in(-1, 1)=X$，且 $F^{-1}: X\to R$ 也

是连续的。所以，$F: R\to X$ 是同胚映射。

18. （证法一） 由于 $f-g: X\to R$ 是连续泛函，因此

$$A=\{x\in X;\ f(x)=g(x)\}=(f-g)^{-1}(\{0\})$$

$$B=\{x\in X:\ f(x)\leqslant g(x)\}=(f-g)^{-1}((-\infty,\ 0])$$

作为R中闭集$\{0\}$与 $(-\infty,\ 0]$ 的原象集，都是X中的闭集。

（证法二） 设 $x_0\in A'$，则存在 $x_n\in A$，使得 $x_n\to x_0$。由于 f，g 的连续性，则有 $f(x_n)=g(x_n)$。令 $n\to\infty$ 得

$$f(x_0)=g(x_0)$$

因此，$x_0\in A$，即 $A'\subset A$。故，A是闭集，同理可证，B也是闭集。

*19. 设G为 $(X,\ d)$ 中开集，即 $x\in G$，存在 $\delta>0$，使得：当 $d(y,\ x)<\delta$ 时，恒 $y\in G$。

因为 $\rho(y,\ x)=\dfrac{d(y,\ x)}{1+d(y,\ x)}$，故 $d(x,\ y)=\dfrac{\rho(x,\ y)}{1-\rho(x,\ y)}$

当 $\rho(y,\ x)<\min\left\{\dfrac{\delta}{2},\ \dfrac{1}{2}\right\}$ 时，必有 $d(x,\ y)<\delta$，从而有 $y\in G$，亦即

$$\left\{y;\ \rho(y,x)<\frac{1}{2}\min\{\delta,\ 1\}\right\}\subset\{y;\ d(y,\ x)<\delta\}\subset G$$

所以$(X,\ d)$中开集G，必也为$(X,\ \rho)$中开集。

反之，若G为 $(X,\ \rho)$中开集，即 $x\in G$，必有 $\delta>0$，使得 $\{y;\ \rho(y,\ x)<\delta\}\subset G$，显然

$$\{y;\ d(y,\ x)<\delta\}\subset\{y;\ \rho(y,\ x)<\delta\}\subset G$$

故可知G也必为$(X,\ d)$中开集。因此，$(X,\ d)$的拓扑$\mathscr{T}_d$与 $(X,\ \rho)$ 的拓扑$\mathscr{T}_\rho$是相同的。也即d与ρ是X上的拓扑等价

度量。

20. 若(X, d_1)与(X, d_2)的度量拓扑$\mathscr{T}_{d_1}$与$\mathscr{T}_{d_2}$是相同的，即d_1与d_2是X上拓扑等价度量，则显然恒等映射I：$(X, d_1)\to(X, d_2)$是同胚映射。

反之，I：$(X, d_1)\to(X, d_2)$是同胚映射，则(X, d_1)与(X, d_2)中开集是完全一致的，即$\mathscr{T}_{d_1}=\mathscr{T}_{d_2}$，因此，$d_1$与$d_2$必为等价度量。

21. 由于存在常数$\mu_2\geqslant\mu_1>0$满足

$$\mu_1 d_1(x,y)\leqslant d_2(x,y)\leqslant\mu_2 d_1(x,y)\quad\forall x,y\in X$$

故恒等映射I：$(X, d_1)\to(X, d_2)$，由于满足

$$d_2(Ix,Iy)=d_2(x,y)\leqslant\mu_2 d_1(x,y)\quad\forall x,y\in X$$

知I为 Lipschitz 连续的，且逆映射I^{-1}：$(X,d_2)\to(X,d_1)$也是 Lipschitz 连续的：

$$d_1(I^{-1}x,\ I^{-1}y)=d_1(x,\ y)\leqslant\frac{1}{\mu_1}d_2(x,y)\quad\forall x,\ y\in X$$

故I是同胚映射。因此，d_1与d_2是X上的等价度量。

22. 先证$f(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^p\right)^{1/p}$，(其中$t_i\geqslant0$)是$[1,\ +\infty)$上的减函数，事实上

$$\frac{df}{dp}=f(p)\left[-\frac{1}{p^2}\ln\sum_{i=1}^{n}t_i^p+\frac{1}{p}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i^p\ln t_i}{\sum_{i=1}^{n}t_i^p}\right]$$

$$=\frac{f(p)}{p^2\sum_{i=1}^{n}t_i^p}\left[\sum_{i=1}^{n}t_i^p\ln t_i^p-\sum_{i=1}^{n}t_i^p\cdot\ln\sum_{i=1}^{n}t_i^p\right]\leqslant0$$

因此，

$$d_1(x,\ y)\geqslant d_p(x,\ y),\ (p>1)\quad \forall x,\ y\in R^n$$

又显然

$$d_p(x,\ y)\geqslant d_\infty(x,\ y),\ (p>1)\quad \forall x,\ y\in R^n$$

$$nd_\infty(x,\ y)\geqslant d_1(x,\ y),\ \forall x,\ y\in R^n$$

由上三个不等式及题21知 d_1 与 d_∞，d_p 与 d_∞ 都是等价度量，从而 d_1 与 d_p 是等价度量，$p=2$ 时 d_p 与 d_1、d 等也都是等价度量。

23. 证法完全类似于题22。略。

24. 由于 $d(x,\ y)$ 是连续泛函，因此，$G(y)\in Y$，即 $G(X)$ 是 $(Y,\ \rho)$ 是子空间。因为，

$$\forall\ y_1,y_2\in X,\ |G(y_1)-G(y_2)|=|d(x,y_1)-d(x,y_2)|$$

易验证

$$\rho(G(y_1),\ G(y_2))=\max_{x\in X}|G(y_1)-G(y_2)|=d(y_1,\ y_2)$$

因此，G：$X\to G(X)$ 是等距映射。

25. (Ⅰ) 若 $x\in M$，$\forall\varepsilon>0$，$A\cap V_\varepsilon(x)\neq\phi$，必有 $x\in\overline{A}$，故 $M\subset\overline{A}$。

(Ⅱ) $\because\ x\in\overline{A}\Longleftrightarrow\exists y_n\in A$，使得 $y_n\to x$，因此，若 $\forall x\in M$，$\exists y_n\in A$，使得 $y_n\to x$，则 $x\in\overline{A}$，即 $M\subset\overline{A}$

(Ⅲ) 因A在B中稠密，故 $\overline{A}\supset B$；B在M中稠密，故 $\overline{B}\supset M$，从而$\overline{A}=\overline{\overline{A}}\supset\overline{B}\supset M$，即$A$在$M$中稠密。

26. 首先，由于 $Q^n=\{r=(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n);\ \ r_i\in Q,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 为R^n 中全体有理点集，它是 R^n 中的稠密的可列集，因此，R^n是可分空间。

令 $M=\{r=(r_1,\cdots,r_n,\ 0,\ 0\cdots);\ n\in N,\ r_i\in Q,\ i=1,2,\ \cdots,\ n\}$，易知$M$为 l^p 的可列子集。下证 $\overline{M}=l^p$ 。

设 $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n\cdots)\in l_p$，$\forall\varepsilon>0$，存在$N(\varepsilon)$，使得

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

由于$(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_N)\in R^N$，必有 $(r_1,\ \cdots,\ r_N)\in Q^N$，使得

$$\sum_{i=1}^{N}|\xi_i-r_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

从而有 $y=(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_N,\ 0,\ \cdots)\in M$ 使得

$$d_p(x,\ y)=\left(\sum_{i=1}^{N}|\xi_i-r_i|^p+\sum_{i=N+1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p}$$

$$<\left(\frac{\varepsilon^p}{2}+\frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{1/p}=\varepsilon$$

因此，$\overline{M}=l^p$ 。

*27. 令 $K=\{x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\ \cdots);\ \xi_i$ 或为0，或为1$\}$，显然，$K\subset l^\infty$ 。先证：K为不可列集。

由于[0，1]中点都可表示成二进小数，且约定类似于 $x=0.10100\cdots=0.10011\cdots$有两种表示式时，规定取后一种，那么[0，1]中点的二进小数的表示是唯一的。记这些二进小数全体所成之集为A，则$A\sim$[0，1]，因此，A是不可列集。

令 T：$A\to K$，$a=0$，$\xi_1\xi_2\cdots\xi_n\cdots\in A$

$$T(a)=x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots)\in K$$

则 T：$A\to T(A)\ (\subset K)$ 是可逆映射。因此，$A\sim T(A)$。即K有不可列子集$T(A)$，所以，K为不可列集。

显然，K中任意两个不同元素 $x\neq y$，有

$$d_\infty(x,\ y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i|=1$$

再证 l^∞ 是不可分的。事实上，假定 l^∞ 可分，那末必有可列子集 $B=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots\}$，使得 $\overline{B}=l^\infty$，作集类 $\left\{V\left(x,\ \frac{1}{3}\right);\ x\in K\right\}$，它是不可列的，且是互不相交的

$\left(\because\ x,\ y\in K,\ 若\ x\neq y,\ 如\ z\in V\left(x,\ \frac{1}{3}\right)\cap V\left(y,\ \frac{1}{3}\right),\right.$

那末有 $1=d\ (x,\ y)\leqslant d_\infty(x,\ z)+d_\infty(z,\ y)<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\left.矛盾\right)$。但是必有 $B\cap V\left(x,\ \frac{1}{3}\right)\neq\phi,\ \forall x\in K$，从而知$B$必有不可列个点，这与$B$为可列集矛盾．所以，$l^\infty$ 是不可分的。

28. 令 $G:\ C[0,\ 1]\to C[0,\ b-a]$，$Gx(t)=x\left(\frac{t}{b-a}\right)$。

$$F:\ C[0,\ b-a]\to C[a,\ b],\ Fx(t)=x(t-a)$$

易验证，G，F都是等距映射，从而 $C[0,\ 1]$与 $C[0,\ b-a]$及 $C[0,\ b-a]$与 $C[a,\ b]$都是等距的。因此，$C[0,1]$与$C[a,\ b]$也是等距的。

注 亦可令 $Fx(t)=x\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$，易验证$F:\ C[0,\ 1]\to C[a,\ b]$是等距映射。

29. 事实上，设 $d(x_1,\ x_2)=\begin{cases}0,\ x_1=x_2\\ 1,\ x_1\neq x_2\end{cases}\quad x_1,\ x_2\in X$

因此，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta=\frac{1}{2}>0$，使得当 $x_1,\ x_2\in X$，只要 $d(x_1,x_2)<\delta$ 时，恒有 $\rho(F(x_1),\ F(x_2))<\varepsilon$（注意，这是因为 $d(x_1,x_2)<\delta=\frac{1}{2}$时，$x_1=x_2$，从而 $\rho(F(x_1),F(x_2))=0$

$<\varepsilon$)。因此，F是一致连续的。

30. 若 $x_k\to x_0$，即 $\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(0)}|^2\right)^{1/2}\to 0$ $(k\to\infty)$，故必有 $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_i^{(k)}=\xi_i^{(0)}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

反之，亦显然。

31. 因 $d(x_k,\ x_0)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x_k(t)-x_0(t)|\to 0$，由定理1.2.10知等价于$\{x_k(t)\}$ 在$[a,\ b]$上一致收敛于 $x_0(t)$。

*32. （Ⅰ）因 $$\begin{aligned}&|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)|\\&\leqslant|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|\\&\leqslant k_1d(x,\ y)+k_2d(x,\ y)\\&=(k_1+k_2)d(x,\ y)\quad\forall x,\ y\in X\end{aligned}$$

故当 $f,\ g\in Y$ 时，$f+g\in Y$.

类似地，由于 $|\alpha f(x)-\alpha f(y)|\leqslant|\alpha|kd(x,\ y)$，易知 $\alpha\in R,\ f\in Y$，必有 $\alpha f\in Y$。

（Ⅱ）σ 显然满足度量公理（2），设$f,\ g,\ h\in Y$，由于若

$$|f(x)-h(x)-f(y)+h(y)|\leqslant k_1d(x,y)\quad\forall x,y\in X$$

$$|h(x)-g(x)-h(y)+g(y)|\leqslant k_2d(x,y)\quad\forall x,y\in X$$

成立，必有

$$\begin{aligned}&|f(x)-g(x)-f(y)+g(y)|\\&\leqslant|f(x)-h(x)-f(y)+h(y)+h(x)\\&\qquad-h(y)-g(x)+g(y)|\\&\leqslant|f(x)-h(x)-f(y)+h(y)|+|h(x)\end{aligned}$$

$$-g(x)-h(y)+g(y)|$$

$$\leqslant(k_1+k_2)d(x,\ y)\quad\forall x,\ y\in X$$

由此可知 $\sigma(f,\ g)\leqslant\sigma(f,\ h)+\sigma(h,\ g)$。

又 $\sigma(f,\ g)\geqslant 0$ 显然成立；$f=g\in Y$，$\sigma(f,g)=0$ 成立。

但 $\sigma(f,\ g)=0$，未必 $f=g$。事实上，设 $f\in Y$，令 $g(x)=f(x)+c$（c 为非零常数），显然 $f\neq g$，$g\in Y$，但

$$\sigma(f,\ g)=\inf\{k;\ |f(x)-g(x)-f(y)+g(y)|$$

$$\leqslant kd(x,\ y),\ x,\ y\in X\}=0$$

即 $\sigma(f,\ g)$不是严格正的。因此，σ 不是 Y 上的度量（称为 Y 上的**拟度量**）。

（Ⅲ）$\because\ \sigma(f,\ g)=\inf\{k;\ |f(x)-g(x)-f(y)+g(y)|$

$$\leqslant kd(x,\ y)\quad\forall x,\ y\in X\}$$

$$=\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-g(x)-f(y)+g(y)|}{d(x,\ y)}$$

故 $\sigma(f,g)=0\Longleftrightarrow f(x)-g(x)=f(y)-g(y)=f(x_0)-g(y_0)$ $\forall x,\ y\in X$。当 $f,\ g\in Y_0$ 时，$\sigma(f,\ g)=0\Longleftrightarrow f(x)\equiv g(x)$ $\forall x\in X$，即 $f=g$。因此，σ 在 Y_0 上是严格正的，由（2）知 σ 为 Y_0 上的度量。

33. $\because d(f_n,f)=\max\limits_{a<t<b}|f_n(t)-f(t)|\to 0$，$|t_n-t_0|\to 0$，

又 $f,\ f_n\in C[a,\ b]$，由于

$$|f_n(t_n)-f(t_0)|\leqslant|f_n(t_n)-f(t_n)|+|f(t_n)-f(t_0)|$$

$$\leqslant d(f_n,\ f)+|f(t_n)-f(t_0)|$$

易知 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t_n)=f(t_0)$。

34. $x_n, x \in X$，因 $(x_n, x_n) \to (x, x) \Longleftrightarrow d(x_n, x) \to 0$

又由

$$d((x_n, f(x_n)), (x, f(x))) = d(x_n, x) + d(f(x_n), f(x)) \qquad (*)$$

及 $f: X \to X$ 是连续映射，故 $(x_n, x_n) \to (x, x)$ 时必有 $d(x_n, x) \to 0$，从而 $d(f(x_n), f(x)) \to 0$，故

$$d((x_n, f(x_n)), (x, f(x))) \to 0$$

所以，$g: \Delta \to \mathrm{Graph}(f)$ 是连续映射。

又显然 g 是单射且是满射，故 $g: \Delta \to \mathrm{Graph}(f)$ 是可逆的。

$\because g^{-1}(x, f(x)) = (x, x)$。由于(*)式，可知当 $d((x_n, f(x_n)), (x, f(x))) \to 0 \Longleftrightarrow d(x_n, x) \to 0$，$d(f(x_n), f(x)) \to 0$，从而当 $(x_n, f(x_n)) \to (x, f(x))$ 时必有，$d((x_n, x_n), (x, x)) = 2d(x_n, x) \to 0$，即 g^{-1} 也是连续映射。

*35. 由于 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$ 知

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant \frac{1}{2}|x_n(t) - x_{n-1}(t)|$$

$$\leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^n}|x_1(t) - x_0(t)|$$

$$= \frac{1}{2^n}|f(t) - g(t)|$$

故

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \frac{1}{2^n} d(f, g) \quad \forall n = 1, 2, 3, \cdots$$

当 $m > n$ 时，$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2})$

$$+\cdots+d(x_{n+1},\ x_n)\leqslant\left(\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-2}}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)d(f,\ g)$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}d(f,\ g)$$

即

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_m(t)-x_n(t)|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}d(f,\ g)\quad(*)$$

由此可知 $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}(t\in[a,\ b])$ 为 Cauchy 数列，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$ $(t\in[a,\ b])$ 存在。

又由于 $x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_1+x_0)+\frac{1}{2}(x_2+x_1)$

$+\cdots+\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})$ 可知

$$x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n=x_1+\frac{1}{2}x_0=g+\frac{1}{2}f$$

故

$$\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}x_n(t)=g(t)+\frac{1}{2}f(t)$$

即

$$\lim_{n\to\infty}x_n(t)=\frac{1}{3}(f(t)+2g(t))\quad t\in[a,\ b]$$

由(*)，令 $m\to\infty$ 得

$$d\left(x_n,\ \frac{1}{3}(f+2g)\right)\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}d(f,\ g)\quad\forall n$$

故

$$d\left(x_n,\ \frac{1}{3}(f+2g)\right)\to0\quad(n\Rightarrow\infty)$$

36. 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t^2}{t^2+(1-nt)^2}=0\quad t\in[0,\ 1]$，

但 $d(g_n,\ 0)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\dfrac{t^2}{t^2+(1-nt)^2}\right|=1\nrightarrow 0$，事实上，因为

$$g_n'(t)=\frac{1}{[t^2+(1-nt)^2]^2}\Big[2t(t^2+(1-nt)^2)$$

$$-t^2(2t-2n(1-nt))\Big]=\frac{2t(1-nt)}{[t^2+(1-nt)^2]^2}$$

故在(0，1)内有唯一驻点 $t=\dfrac{1}{n}$，且为最大点。故

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|g_n(t)|=g_n\left(\frac{1}{n}\right)=1$$

37. $d_1(g_n,\ 0)=\int_0^1|g_n(t)|dt=\int_0^1\dfrac{t^2}{t^2+(1-nt)^2}dt$，由 Lebesgue 控制收敛定理（$\because\ g_n(t)\to 0\quad \forall t\in[0,\ 1]$，且 $|g_n(t)|\leqslant 1$.），知 $d_1(g_n,\ 0)\to 0\quad (n\to\infty)$。

38. 设A为X的可列稠密子集，$\forall y_0\in Y$，则存在 $\{x_n\}\subset A$，使得 $d(x_n,\ x_0)\to 0$，其中 $x_0=F^{-1}(y_0)$，从而，由于 $\rho(F(x_n),\ F(x_0))=\rho(F(x_n),\ y_0)\to 0$，即存在 $F(A)$ 的点列 $\{F(x_n)\}$收敛于y_0，而$F(A)$为Y中可列子集，故易知 $\overline{F(A)}=Y$，所以$(Y,\ \rho)$也为可分的。

39. 略

40. 设 $x_0\in\overline{A}$，则存在 $x_k=(\xi_1^{(k)},\ \cdots,\ \xi_n^{(k)},\cdots)\in A$，使得

$$d(x_k,\ x_0)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(k)}=\xi_i^{(0)}|^2\right)^{1/2}\to 0$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\xi_i^{(k)}=\xi_i^{(0)}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots)$$

因

$$|\xi_i^{(k)}| \leqslant \frac{1}{i} \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

故

$$|\xi_i^{(0)}| \leqslant \frac{1}{i} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots)$$

因此，$x_0=(\xi_1^{(0)},\ \cdots,\ \xi_n^{(0)},\ \cdots)\in A$，故$A$为$l^2$中的闭集。

注　易知A作为$l^p(1<p\leqslant+\infty)$中的子集，也是l^p中的闭集。

§ 2.4　度量空间的完备性

1. 设$\{x_n\}$为$(X,\ d)$中 Cauchy 列，对 $\varepsilon=1$，存在N，使得 $m,\ n>N$ 时恒有

$$d(x_m,\ x_n)<\varepsilon=1$$

记

$$M_1=\max\{d(x_i,\ x_{N+1});\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$$

令

$$M=\max\{1,\ M_1\}$$

则对任意正整数 i，j 恒有

$$d(x_i,\ x_j)\leqslant d(x_i,\ x_{N+1})+d(x_{N+1},\ x_j)\leqslant 2M$$

因此，

$$\mathrm{dia}\{x_n\}\leqslant 2M$$

所以，$\{x_n\}$是有界的。

2. 若$\{x_n\}$为 Cauchy 列，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使得当 $m,\ n>N$时，恒有

$$d(x_m, x_n)<\varepsilon \qquad (1)$$

对子列 $\{x_{n_k}\}$，当 $k, r>N$ 时，($\because n_k, n_r>N$)恒有

$$d(x_{n_k}, x_{n_r})<\varepsilon$$

所以，$\{x_{n_k}\}$ 也为 Cauchy 列

如果 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 的某子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$，则存在 $N_1(\geqslant N)$，使得当 $k>N_1$ 时

$$d(x_{n_k}, x_0)<\varepsilon$$

从而由(1)知，当 $n, k>N_1$ 时，恒有

$$d(x_n, x_0)\leqslant d(x_n, x_{n_k})+d(x_{n_k}, x_0)<2\varepsilon$$

所以，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1$，使得 $n>N_1$ 时，恒有

$$d(x_n, x_0)<2\varepsilon$$

因此，$\{x_n\}$ 也收敛，且有相同极限 x_0。

3. 设 G：$(X, d)\to(Y, \rho)$是等距映射，(X, d)是完备的，设$\{y_n\}$为(Y, ρ)中的 Cauchy 列，则存在$x_n\in X$，使得 $y_n=G(x_n)$。由于$\rho(y_m, y_n)=\rho(G(x_m), G(x_n))=d(x_m, x_n)$，知$\{x_n\}$为$(X, d)$中 Cauchy 列，由于$(X, d)$完备，故存在 $x_0\in X$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。从而由于

$$\rho(y_n, G(x_0))=\rho(G(x_n), G(x_0))=d(x_n, x_0)\to 0$$

知$\{y_n\}$也收敛，从而(Y, ρ)也是完备度量空间。

同理可证，(Y, ρ)完备，(X, d)也完备。

4. 设$\{x_n\}$为(X, d)中 Cauchy 列。由于F是X到Y中的一致连续映射，故 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得，$x', x''\in X$，当 $d(x', x'')<\delta$ 时恒有 $\rho(F(x'), F(x''))<\varepsilon$。由于$\{x_n\}$为

Cauchy 列，对 $\delta>0$，$\exists N$，使得当 m，$n>N$ 时恒有

$$d(x_m,\ x_n)<\delta$$

从而恒有

$$\rho(F(x_m),\ F(x_n))<\varepsilon \quad \forall m,\ n>N$$

因此，$\{F(x_n)\}$为$(Y,\ \rho)$中的 Cauchy 列。

5. 设 (X,d_1) 完备，$\{x_n\}$为$(X,\ d_2)$中的 Cauchy 列，由于 $\mu_1 d_1(x_m,\ x_n)\leqslant d_2(x_m,\ x_n)$，知$\{x_n\}$也为$(X,\ d_1)$中的 Cauchy 列，且由 $(X,\ d_1)$ 之完备性，存在 $x_0\in X$，使得

$$d_1(x_n,\ x_0)\to 0 \quad (\text{当 } n\to\infty)$$

由于

$$d_2(x_n,\ x_0)\leqslant\mu_2 d_1(x_n,\ x_0)$$

知

$$d_2(x_n,\ x_0)\to 0 \quad (n\to\infty \text{ 时})$$

所以$(X,\ d_2)$中的 Cauchy 列都收敛，也即 $(X,\ d_2)$ 完备。

同理可证：当 $(X,\ d_2)$ 是完备空间时，$(X,\ d_1)$ 也是完备的。

6. 设 $x_n=(\xi_1^{(n)},\ \xi_2^{(n)},\ \cdots,\ \xi_k^{(n)},\ \cdots)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 是l^∞ 中 Cauchy 列，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使得当 m，$n>N$ 时恒有

$$d_\infty(x_m,\ x_n)=\sup_k|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}|<\varepsilon \qquad (1)$$

显然对每一 k，$\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 都是 Cauchy 数列，所以有 $\xi_k^{(0)}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k^{(0)} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

令

$$x_0=(\xi_1^{(0)},\ \xi_2^{(0)},\ \cdots,\ \xi_k^{(0)},\ \cdots)$$

由(1) $|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}|<\varepsilon \quad \forall m,\ n>N$

固定 n，令 $m\to\infty$ 得

$$|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|\leqslant\varepsilon \quad \forall n>N,\ k=1,2,3,\cdots$$

故

$$\sup_k|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}|\leqslant\varepsilon \quad \forall n>N \qquad (2)$$

由此 $\sup_k|\xi_k^{(0)}|\leqslant\varepsilon+\sup_k|\xi_k^{(n)}|<+\infty$

因此，$x_0\in l^\infty$。

因(2)即 $d_\infty(x_n,\ x_0)\leqslant\varepsilon \quad \forall n>N$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}d_\infty(x_n,\ x_0)=0$$

因此，l^∞ 是完备的度量空间。

7. 易知$(M,\ d)$是度量空间，是 l^∞ 的子空间。

设 $x_n=\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ 0,\ 0,\ \cdots\right)$，易知 $\{x_n\}$ 为M中的一个 Cauchy 列。事实上，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\left(\geqslant\frac{1}{\varepsilon}\right)$，当 $m,\ n>N$ 时恒有 $d(x_m,\ x_n)<\varepsilon$ 。

但是，显然 $\{x_n\}$不收敛于M中任何元素，也即$(M,\ d)$是不完备的。

其完备化空间就是 c_0，只须证（Ⅰ）M在 c_0 中稠密的；（Ⅱ）c_0 是收敛于 0 的收敛数列全体，它是 l^∞ 的完备子空间。

设 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)\in c_0$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使得 $n>N$ 时恒有 $|\xi_n|<\varepsilon/2$，令 $x_\varepsilon=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N, 0, 0, \cdots)$，则 $x_\varepsilon\in M$，且

$$d(x_\varepsilon, x)=\sup_{i>n}|\xi_i|<\varepsilon$$

所以，M在 c_0 中是稠密的。

再证 c_0 是完备的，只须证 c_0 为 l^∞ 的闭子空间。

设 $x_0=(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)}, \cdots)\in\bar{c}_0$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_k\in c_0$，使得 $d(x_0, x_k)<\varepsilon$，记 $x_k=(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)}, \cdots)$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n^{(k)}=0$$

存在N，使得 $n>N$ 时恒有 $|\xi_n^{(k)}|<\varepsilon$。

由于 $d(x_0, x_k)=\sup_i|\xi_i^{(0)}-\xi_i^{(k)}|<\varepsilon$，所以 $n>N$ 时，$|\xi_n^{(0)}|\leqslant|\xi_n^{(k)}|+|\xi_n^{(k)}-\xi_n^{(0)}|<2\varepsilon$.因此，$\lim_{n\to\infty}\xi_n^{(0)}=0$，也即 $x_0\in c_0$，故 $\bar{c}_0=c_0$，证毕。

8. 设$\{x_n\}$为离散度量空间(X,d)中的任一 Cauchy 列，则对 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，存在N，使得 $m, n>N$ 时

$$d(x_m, x_n)<\frac{1}{2}$$

由此知，$m,n>N$ 时，$d(x_m,x_n)=0$，即 $x_n=x_{N+1}\quad\forall n>N$。

因此，$\lim_{n\to\infty}x_n=x_{N+1}$。也即离散度量空间中的柯西列，就是除前面有限项外，它是常点列，必都收敛。因此，离散度量空间是完备的。

9. 由于 l^∞ 为完备空间，所以，要证 c 为完备空间，只须证 c 为 l^∞ 的闭集。

设 $x_0=(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)}, \cdots)\in\bar{c}$，故 $\forall\varepsilon>0$，存在 $x_\varepsilon\in c$，记 $x_\varepsilon=(\xi_1^{(\varepsilon)}, \xi_2^{(\varepsilon)}, \cdots, \xi_n^{(\varepsilon)}, \cdots)$，使得 $d(x_\varepsilon, x_0)<\frac{\varepsilon}{3}$ 即

$$\sup_n|\xi_n^{(\varepsilon)}-\xi_n^{(0)}|<\frac{\varepsilon}{3}$$

又由于 $\{\xi_n^{(\varepsilon)}\}_{n=1}^{\infty}$ 为收敛数列，故存在N，使得当 $m, n>N$ 时恒有 $|\xi_m^{(\varepsilon)}-\xi_n^{(\varepsilon)}|<\frac{\varepsilon}{3}$，故有

$$\begin{aligned}|\xi_m^{(0)}-\xi_n^{(0)}|&\leqslant|\xi_m^{(0)}-\xi_m^{(\varepsilon)}|+|\xi_m^{(\varepsilon)}-\xi_n^{(\varepsilon)}|\\&\quad+|\xi_n^{(\varepsilon)}-\xi_n^{(0)}|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\quad\forall m, n>N\end{aligned}$$

因此，$\{\xi_n^{(0)}\}$ 是 Cauchy 数列，也即收敛数列，所以，$x_0\in c$。因此，c 为 l^∞ 的闭集。

再证 c 是可分的。记 $M=\{x=(\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots)$；$\exists N_x$ 使得 $\xi_n=\xi_{N_x}\ \forall n>N_x$，且 $\xi_n\in Q\ \forall n\}$ 易知 $M\sim\bigcup_{n=1}Q^n$（其中Q是有理数集，故M为可列集。下证 $\overline{M}=c$。

设 $x_0=(\xi_1^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)}, \cdots)\in c$，且 $\lim_{n\to}\xi_n^{(0)}=a$，则 $\forall\varepsilon>0$，存在N，使得 $n>N$ 时，恒有 $|\xi_n^{(0)}-a|<\varepsilon/2$。

设 $r\in Q$，满足 $|a-r|<\frac{\varepsilon}{2}$，取 $r_i\in Q$，使得

$$|\xi_i^{(0)}-r_i|<\varepsilon\quad(i=1, 2, \cdots, N)$$

则 $x=(r_1, r_2, \cdots, r_N, r, r, \cdots)\in M$，且显然 $d(x, x_0)<\varepsilon$。因此，M在 c 中稠密，并由M的可列性，知 c 是可分的。

10. 当 $m>n$ 时，$x_m(t)-x_n(t)=\begin{cases}(n-m)t, & t\in\left[0,\ \frac{1}{m}\right)\\ 1-nt, & t\in\left[\frac{1}{m},\ \frac{1}{n}\right]\\ 0, & t\in\left(\frac{1}{n},\ 1\right]\end{cases}$

$$d(x_m,\ x_n)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_m(t)-x_n(t)|=1-\frac{n}{m}$$

显然 $n,\ m\to\infty$ 时，$d(x_m,\ x_n)\nrightarrow 0$，所以，$\{x_n\}$在$C[a,\ b]$中不是 Cauchy 列。

又当 $m>n$ 时，

$$d_1(x_m,\ x_n)=\int_0^1|x_m(t)-x_n(t)|dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\to 0 \quad (\text{当 } m,\ n\to\infty \text{ 时}),$$

故 $\{x_n\}$在$L[a,\ b]$中是 Cauchy 列。

11. 由 §2.2题 4 知：$d(x,\ y)=|\operatorname{arc\,tg}x-\operatorname{arc\,tg}y|$ 是R上的度量。但$(R,\ d)$是不完备的。例如：取

$$x_n=n,\ d(x_m,\ x_n)=|\operatorname{arc\,tg}m-\operatorname{arc\,tg}n|$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}n=\frac{\pi}{2}$ 知 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ 在$(R,\ d)$中是 Cauchy 列，但其在$(R,\ d)$中不收敛，也即不存在 $x\in R$，使得

$$d(x_n,\ x)=|\operatorname{arc\,tg}n-\operatorname{arc\,tg}x|\to 0 \quad (\text{当 } n\to+\infty \text{ 时})$$

另一方面，显然恒等映射 $I:\ R\to(R,\ d)$，是连续的（$\because\ d(Ix,\ Iy)=d(x,y)=|\operatorname{arc\,tg}x-\operatorname{arc\,tg}y|\leqslant|x-y|$）且 $I^{-1}:\ (R,\ d)\to R$ 也是连续的。即若 $|\operatorname{arc\,tg}x_n-\operatorname{arc\,tg}x_0|=d(x_n,x_0)\to 0$，必有 $x_n\to x_0$。故R与(R,d)是同胚的度量空间，

但R是完备的，而(R, d)是不完备的，因此，度量空间的完备性不是拓扑性质。

12. 只要证Y为完备空间$C[a, b]$的闭子空间。事实上，若$x_0 \in \overline{Y}$，则存在$x_n \in Y$，使得

$$d(x_n, x_0) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x_0(t)| \to 0$$

故$x_0 \in C[a, b]$，且$\because x_n(a) = x_n(b)$可知$x_0(a) = x_0(b)$也即$x_0 \in Y$，所以Y是闭集。

13. 取$x_n \in A_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$。由于$A_n \supset A_{n+1} \forall_n$及$\mathrm{dia}A_n \to 0$，知$m>n$时，$x_m, x_n \in A_n$，从而有

$$d(x_m, x_n) \leqslant \mathrm{dia}A_n \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

所以，$\{x_n\}$是完备度量空间(X, d)中的 Cauchy 序列，由此可知，存在$x_0 \in X$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$。

又由A_n都为闭集，从而显然有$x_0 \in A_n \quad \forall n$，也即

$$\{x_0\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

若$\exists y_0 (\neq x_0)$，使得$y_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，则$x_0, y_0 \in A_n \quad \forall n$，从而有

$$0 < d(x_0, y_0) \leqslant \mathrm{dia}A_n \quad \forall n$$

但与$\mathrm{dia}A_n \to 0$相矛盾。因此，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{x_0\}$。

注　若$\mathrm{dia}A_n \nrightarrow 0$，则结论未必成立。

例如，设 $Y = \left\{x_n;\ x_n = \left(0, \cdots, 0, \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\text{第}n\text{项}}, 0, \cdots\right) \in l^2\right\}$

作为l^2的子空间，由于$m \neq n$时

$$d(x_m,\ x_n)=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2+\left(\frac{m+1}{m}\right)^2}>\sqrt{2}$$

由此易验证Y是完备度量空间。

考虑Y中闭球列：$V_n=\left\{x\in Y;\ d(x,\ x_n)\leqslant\sqrt{2}\frac{n+1}{n}\right\}$，易验证

$$V_n\supset V_{n+1}$$

但是

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n=\phi$$

因此，尽管该题类似于经典分析中的区间套定理，但对一般的度量空间，不能机械地把经典分析的结论、方法随便地搬过来。

14. 若$(X,\ d)$完备，设$\{x_{1n}\}$、$\{x_{2n}\}$分别为$(X_1,\ d_1)$与$(X_2,\ d_2)$中 Cauchy 列，记 $x_n=(x_{1n},\ x_{2n})$，则由

$$x(x_m,\ x_n)=[d_1^p(x_{1m},\ x_{1n})+d_2^p(x_{2m},\ x_{2n})]^{1/p}$$

知$\{x_n\}$为(X,d)中的 Cauchy 列，因此，存在 $x_0=(x_{10},\ x_{20})\in X$ 使得 $d(x_n,x_0)=[d_1^p(x_{1n},x_{10})+d_2^p(x_{2n},x_{20})]^{1/p}\to 0$ （当$n\to\infty$时）。因此，$d_1(x_{1n},\ x_{10})\to 0$，$d_2(x_{2n},\ x_{20})\to 0$，$x_{10}\in X_1$，$x_{20}\in X_2$，所以，$(X_1,\ d_1)$与$(X_2,\ d_2)$都是完备的。

反之，若$(X_1,\ d_1)$与(X_2,d_2)都完备，仿上可证(X,d)也完备。

15. 若$(X,\ d)$完备，设$\{x_n\}$为$(X,\ \rho)$中 Cauchy 列，

知 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\rho(x_m,\ x_n)=\lim\limits_{m,n\to\infty}\dfrac{d(x_m,\ x_n)}{1+d(x_m,\ x_n)}=0$，显然必有

$$\lim_{m,\,n\to\infty} d(x_m,\ x_n)=\lim_{m,\,n\to\infty}\frac{\rho(x_m,\ x_n)}{1-\rho(x_m,\ x_n)}=0$$

且由$(X,\ d)$的完备性，存在 $x_0\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,\ x_0)=0$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\ x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{d(x_n,\ x_0)}{1+d(x_n,\ x_0)}=0$$

因此，$(X,\ \rho)$也完备。

反之，若$(X,\ \rho)$完备，仿上可证$(X,\ d)$也完备。

16. 显然 d 满足度量公理(1)、(2)，而公理(3)

$$d(x,\ y)\leqslant d(x,\ z)+d(z,\ y)$$

当 $x=y\in N$ 时，显然成立；当 $x\neq y$ 时，若 $x=z$ 或 $z=y$ 时也成立。若 $x\neq y$，$x\neq z$，$y\neq z$ 时，由于有

$$\delta+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leqslant 2\delta+\frac{1}{x}+\frac{2}{z}+\frac{1}{y}$$

可知(3)也成立。所以，$(N,\ d)$是度量空间。

当 $\delta=0$ 时，由于

$$d(m,\ n)=\frac{1}{m}+\frac{1}{n},\ m\neq n$$

知$\{n\}$为$(N,\ d)$中 Cauchy 列，但它不收敛于N中任一点，所以，$(N,\ d)$是不完备的。

当 $\delta>0$ 时，若 $\{x_n\}$ 为 $(N,\ d)$中 Cauchy 列，则对 $\varepsilon=\delta>0$，存在k，使得 $m>n>k$ 时恒有

$$\delta>d(x_m,\ x_n)=\begin{cases}\delta+\dfrac{1}{x_m}+\dfrac{1}{x_n}, & x_m\neq x_n\\ 0, & x_m=x_n\end{cases}$$

知 $x_m=x_n \quad \forall m, n>k$，也即此时 (N, d) 中的 Cauchy 列 $\{x_n\}$必是本质上的常点列（即除有限项外，其余一切项都相同的点列）。所以，$\{x_n\}$必收敛，因此，(N, d)是完备的。

17. R中的单点集 $A=\{x\} \quad x\in R$，显然 $\overset{\circ}{\overline{A}}=\phi$，故整数集 Z是可列个单点集的并，是R中的第一纲集。

但 Z在空间(Z, d) $(d(x, y)=|x-y|)$ 中，易知其任一柯西列，必为本质上的常点列，也即 (Z, d) 是完备的。因此，由 Baire 纲定理知，Z在(Z, d)中是第二纲的。注意，在 (Z, d)中，$x\in Z$，开球 $V(x, 1)=\{x\}$。即$\{x\}$是开集。

*18. 必要性见题13，现证充分性。

设$\{x_n\}$为 Cauchy 列，因此，$\forall k$，$\exists n_k$，使得当 $m, n>n_k-1$ 时恒有 $d(x_m, x_n)<\frac{1}{2^{k+1}}$，且不妨设 $n_k<n_{k+1}$，令

$$A_k=V\left[x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right]$$

易验证：$A_k\supset A_{k+1}$，且显然A_k是非空的闭集，而 $\mathrm{dia}A_k\to 0$ $(k\to+\infty)$，由条件知存在 $x_0\in X$，使得

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k=\{x_0\}$$

下证：$d(x_k, x_0)\to 0$。

因为 $x_0\in A_k \quad \forall k$，故 $d(x_{n_k}, x_0)<\frac{1}{2^k} \quad \forall k$. 所以，

$\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_0)=0$，又因 $n>n_k-1$ 时，$d(x_n, x_{n_k})<\frac{1}{2^{k+1}}$

故 $d(x_n, x_0)\leqslant d(x_n, x_{n_k})+d(x_{n_k}, x_0)<\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}$ 可知 $d(x_n, x_0)\to 0 \quad (n\to\infty)$。

19. 必要性显然成立（参见题 2）。充分性参见题 18 的解答。

*20. $\sigma(f,\ g)\geqslant 0$，$\sigma(f,\ f)=0$，$\sigma(f,\ g)=\sigma(g,\ f)$ 等显然成立。由 $\sigma(f,\ g)=0$ 即 $\rho(f(x),g(x))=0\quad \forall x\in X$，则 $f=g$. 又对 f，g，$h\in Z$，由于

$$\rho(f(x),g(x))\leqslant\rho(f(x),h(x))+\rho(h(x),g(x))\quad \forall x\in X$$

知

$$\rho(f(x),\ g(x))\leqslant\sigma(f,\ h)+\sigma(h,\ g)\quad \forall x\in X$$

故

$$\sigma(f,\ g)\leqslant\sigma(f,\ h)+\sigma(h,\ g)$$

因此，$(Z,\ \sigma)$为度量空间。

设$\{f_n\}$为$(Z,\ \sigma)$中 Cauchy 列，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使得当 $m,\ n>N$ 时，恒有

$$\sigma(f_m,f_n)=\sup\{\rho(f_m(x),\ f_n(x));\ x\in X\}<\frac{\varepsilon}{3}\quad (1)$$

可知对每 $x\in X$，$\{f_n(x)\}$ 是$(Y,\ \rho)$中 Cauchy 列，由Y完备，故 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$存在(属于$Y$)。记

$$f_0(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\quad x\in X\qquad (2)$$

下证：$f_0\in Z$，且 $\sigma(f_n,\ f_0)\to 0$

由(1)，$\rho(f_m(x),\ f_n(x))<\varepsilon/3$，$m,\ n>N$，$x\in X$. 固定 n，令$m\to\infty$ 得

$$\rho(f_n(x),\ f_0(x))\leqslant\varepsilon/3\quad n>N,\ x\in X\qquad (3)$$

因 f_n: $X\to Y$ 一致连续，故存在 $\delta>0$，使得 x_1，$x\in X$，当 $d(x_1,\ x)<\delta$ 时恒有

$$\rho(f_n(x_1),\ f_n(x))<\varepsilon/3 \qquad (4)$$

由(3)，(4)即得

$$\begin{aligned}\rho(f_0(x_1),\ f_0(x))&\leqslant\rho(f_0(x_1),\ f_n(x_1))\\&\quad+\rho(f_n(x_1),\ f_n(x))\\&\quad+\rho(f_n(x),\ f_0(x))<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

故 $f_0\in Z$，又由(3)可得 $\sigma(f_n,\ f_0)<\varepsilon\quad\forall n>N$，即

$$\sigma(f_n,\ f_0)\to 0\quad(n\to\infty)$$

因此，$(Z,\ \sigma)$是完备的度量空间。

注　本题是 $C[a,\ b]$的完备性的推广。

21. 因 $|d(x_m,y_m)-d(x_n,y_n)|\leqslant d(x_m,\ x_n)+d(y_m,\ y_n)$

可知 $\{d(x_n,\ y_n)\}$是 Cauchy 数列，故结论显然成立。

22. 由 §2.3题40知 A 为 l^2 中闭集。现只须证 $\overset{\circ}{A}=\phi$.

若有 $x_0=(\xi_1^{(0)},\ \cdots,\ \xi_n^{(0)},\cdots)\in\overset{\circ}{A}$，则 $\exists\delta>0$，使得

$$V(x_0,\ \delta)\subset A$$

设自然数$N>\frac{1}{\delta}$，即 $\delta>\frac{1}{N}$，显然 $x_1=(\xi_1^{(0)},\cdots,\xi_{N-1}^{(0)},\ \xi_N^{(0)}-\frac{\delta}{2},\xi_{N+1}^{(0)},\cdots)$ 及 $x_2=(\xi_1^{(0)},\cdots,\xi_{N-1}^{(0)},\ \xi_N^{(0)}+\frac{\delta}{2},\ \xi_{N+1}^{(0)},\cdots)$

$\in V(x_0,\ \delta)\subset A$，故必有

$$\frac{1}{N}\geqslant\left|\xi_N^{(0)}\pm\frac{\delta}{2}\right|\ \text{与}\ \frac{1}{N}\geqslant|\xi_N^{(0)}|$$

得

$$\frac{\delta}{2}\leqslant|\xi_N^{(0)}|+|\xi_N^{(0)}\pm\frac{\delta}{2}|\leqslant\frac{2}{N}\qquad\forall N>\frac{1}{\delta}$$

故

$$\delta=0$$

与

$$\delta>0$$

相矛盾，因此，$\overset{\circ}{A}=\phi$.

§ 2.5 压缩映射原理

1. 当 $x\geqslant 1$ 时，$Tx=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\geqslant 1$，所以，$T: X\to X$，且由 $\forall x, y\in[1, +\infty)$，

$$|Tx-Ty|=\left|\frac{1}{2}(x-y)-\frac{1}{xy}(x-y)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{xy}\right||x-y|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$$

知 $T: X\to X$ 是压缩映射。

2. 显然 $f: [0, 1]\to[0, 1]$，且 $x, y\in[0, 1]$恒有

$$|f(x)-f(y)|=\frac{1}{4}|x^3-y^3|\leqslant\frac{3}{4}|x-y|$$

所以，$f: [0, 1]\to[0, 1]$ 是压缩映射，$[0, 1]$是完备空间。故存在唯一 $\xi\in[0,1]$，使$f(\xi)=\xi$. 即 ξ 为方程 $x^3+4x-2=0$ 之实根。

令

$$x_0=0,\ x_1=f(x_0)=\frac{1}{2}$$

$$x_{n+1}=f(x_n)=\frac{1}{4}(2-x_n^5)\quad(n=1, 2, \cdots)$$

可得根 ξ 的近似值x_n，且有误差估计

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}|x_1-x_0|=2\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

3. $\because f(x)=x^3+x-1 \in C[0,1]$，且 $f(0)<0$，$f(1)>0$ 故存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$。且 $x\in[0,1]$ 显然满足

$$1\leqslant f'(x)=3x^2+1\leqslant 4$$

令

$$g(x)=x-\frac{1}{4}f(x)$$

易验证：g：$[0,1]\to[0,1]$，且由于 $g'(x)=1-\frac{1}{4}f'(x)$，

$$0\leqslant g'(x)\leqslant\frac{3}{4},\ x\in[0,1]$$

由中值公式，x，$y\in[0,1]$，有

$$|g(x)-g(y)|\leqslant|g'(\eta)||x-y|$$

$$\leqslant\frac{3}{4}|x-y| \quad (\eta \text{ 在}x,\ y\text{之间})$$

因此，g 是压缩映射。

$$x_0=0,\ x_1=g(x_0)=-\frac{1}{4}f(0)=\frac{1}{4}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{1}{4}f(x_n)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x_n-\frac{1}{4}x_n^3 \quad (n=1,2,\cdots)$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$，$\xi$ 为 $x^3+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内的实根。且误差估计为

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}|x_1-x_0|=\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

4. 设 $F(x)=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$,

$x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)^T\in R^3$，且定义度量

$$d_\infty\ (x,\ y)=\max_{1\leqslant i\leqslant 3}|\xi_i-\eta_i|$$

则 $(R^3,\ d_\infty)$是完备的。

由于

$$\begin{aligned}d_\infty(F(x),\ F(y))=\max\Big\{&\Big|\frac{1}{6}(\xi_1-\eta_1)-\frac{1}{6}(\xi_2-\eta_2)\\&+\frac{1}{5}(\xi_3-\eta_3)\Big|,\ \Big|\frac{1}{6}(\xi_1-\eta_1)\\&+\frac{1}{5}(\xi_2-\eta_2)+\frac{1}{2}(\xi_3-\eta_3)\Big|,\\&\Big|-\frac{1}{6}(\xi_1-\eta_1)+\frac{1}{3}(\xi_2-\eta_2)\\&-\frac{1}{3}(\xi_3-\eta_3)\Big|\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\leqslant\max\Big\{&\frac{1}{6}|\xi_1-\eta_1|+\frac{1}{6}|\xi_2-\eta_2|\\&+\frac{1}{5}|\xi_3-\eta_3|,\ \frac{1}{6}|\xi_1-\eta_1|\\&+\frac{1}{5}|\xi_2-\eta_2|+\frac{1}{2}|\xi_3-\eta_3|,\\&\frac{1}{6}|\xi_1-\eta_1|+\frac{1}{3}|\xi_2-\eta_2|\\&+\frac{1}{3}|\xi_3-\eta_3|\Big\}\end{aligned}$$

$$\leqslant\frac{13}{15}\max\{|\xi_1-\eta_1|,\ |\xi_2-\eta_2|,$$

$$|\xi_3-\eta_3|\}=\frac{13}{15}d_\infty(x,\ y)$$

所以F是压缩映射。由 Banach 压缩映射原理，存在唯一不动点 $x^*\in R^3$，使得 $x^*=F(x^*)$。

取 $x_0=(0,\ 0,\ 0)^T,\ x_1=(4,\ -1,\ 2)^T,\ \cdots,$

$$x_{n+1}=F(x_n)=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}x_n+\begin{pmatrix}4\\ -1\\ 2\end{pmatrix},\ \cdots$$

即得一列收敛于 x^* 的近似解。由于

$$d_\infty(x_0,\ x_1)=d_\infty(x_0,\ F(x_0))=4$$

故有误差估计

$$d_\infty(x_n,\ x^*)\leqslant\frac{k^n}{1-k}d_\infty(x_0,\ F(x_0))$$

$$=4\cdot\frac{\left(\frac{13}{15}\right)^n}{1-\frac{13}{15}}=30\cdot\left(\frac{13}{15}\right)^n$$

注　如取度量 $d(x,\ y)=\left(\sum_{i=1}^{3}|\xi_i-\eta_i|^2\right)^{1/2}$，易验证

$$d(F(x),\ F(y))=\left\{\left[\frac{1}{6}(\xi_1-\eta_1)-\frac{1}{6}(\xi_2-\eta_2)+\frac{1}{5}(\xi_3-\eta_3)\right]^2+\left[\frac{1}{6}(\xi_1-\eta_1)+\frac{1}{5}(\xi_2-\eta_2)+\frac{1}{2}(\xi_3-\eta_3)\right]^2\right.$$

$$\left.+\left[-\frac{1}{6}(\xi_1-\eta_1)+\frac{1}{3}(\xi_2-\eta_2)-\frac{1}{3}(\xi_3-\eta_3)\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{6^2}\cdot4+\frac{1}{5^2}\cdot2+\frac{1}{3^2}\cdot2+\frac{1}{2^2}\right)^{1/2}d(x,\ y)$$

$$= \sqrt{\frac{199}{300}} d(x, y) \quad (\text{用 Hölder 不等式})$$

从而可知F是完备度量空间R^3到自身中的压缩映射，故有唯一的解 $x^* \in R^3$，使 $x^* = F(x^*)$。

类似地，取 $x_0 = (0, 0, 0)^T$，$x_1 = (4, -1, 2)^T$，…，$x_{n+1} = F(x_n)$，…可有误差估计

$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) = \sqrt{21} \cdot \frac{k^n}{1-k}$$

其中 $k = \sqrt{\frac{199}{300}}$

5. $y_0 = 0$

$$y_1 = \int_0^x (y_0^2(t) + 2)\, dt = \int_0^x 2dt = 2x$$

$$y_2 = \int_0^t (y_1^2(t) + 2)\, dt = \int_0^x (4t^2 + 2)\, dt = \frac{4}{3}x^3 + 2x$$

$$y_3 = \int_0^x (y_2^2(t) + 2)\, dt = \int_0^x \left(\frac{16}{9}t^6 + \frac{16}{3}t^4 + 4t^2 + 2\right) dt$$

$$= \frac{16}{63}x^7 + \frac{16}{15}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + 2x$$

6. $\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)|$

$$= \frac{1}{2}|x - y| \leqslant \frac{1}{2} d(x, y)$$

因此，$f: R \to R$是压缩映射。压缩系数 $k = \frac{1}{2}$。

如取 $x_0 = 2$，$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{2}\right)$。

$$d(x_n, x^*) = \left| x_n - \frac{3}{2} \right| \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

$$= \frac{k^n}{1-k}\left|\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\right| = \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^{m+1}} \quad (\forall n \geqslant m)$$

7. $\sqrt[3]{5}$ 是 $x^3-5=0$ 之实根，令 $f(x)=x^3-5$，则 $\forall x \in [1, 2]$有 $f'(x)=3x^2 \in [3, 12]$.

令 $F(x)=x-\frac{1}{12}(x^3-5)$，易验证：$\forall x \in [1, 2]$

$$0 \leqslant F'(x)=1-\frac{1}{4}x^2 \leqslant \frac{3}{4}$$

且

$$1 \leqslant F(x) \leqslant 2$$

所以 F：$[1, 2] \to [1, 2]$是压缩因子 $k=\frac{3}{4}$的压缩映射。因 $[1, 2]$是完备的，故有 $x^*=\sqrt[3]{5}$ 使 $F(x^*)=x^*$。

用迭代法： $x_0=1$，$x_{n+1}=F(x_n)=x_n-\frac{1}{12}(x_n^3-5)$

$(n=0, 1, 2\cdots)$ 可得$\sqrt[3]{5}$ 的近似值。且因 $x_1=\frac{4}{3}$，则知

$$d(x_n, x^*)=|x_n-\sqrt[3]{5}| \leqslant \frac{k^n}{1-k}d(x_1, x_0)$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}\left|\frac{4}{3}-1\right| = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

8. 设 $x \in V[x_0, r]$，由条件(Ⅰ)、(Ⅱ)有

$$d(F(x), F(x_0)) \leqslant kd(x, x_0) \leqslant kr$$

$$d(F(x), x_0) \leqslant d(F(x), F(x_0)) + d(F(x_0), x_0)$$

$$\leqslant kr+(1-k)r=r$$

所以，F：$V[x_0;\ r]\to V[x_0;\ r]$是压缩映射，又由于(X, d)完备，故其闭子集 $V[x_0;\ r]$ 也是完备度量空间。由压缩映射原理，知F在 $V[x_0;\ r]$ 中有唯一不动点。

9. 令 $F(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，则由条件知 $F(\tilde{x})=\tilde{x}$，又因

$$F'(x)=1-\frac{f'(x)f'(x)-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

故有

$$F'(\tilde{x})=0$$

因 $f'(\tilde{x})\neq 0$，有 $\lim\limits_{x\to\tilde{x}}F'(x)=F'(\tilde{x})=0$。所以，存在$\delta>0$，

使得 $[\tilde{x}-\delta,\ \tilde{x}+\delta]\subset[a,\ b]$，且当 $x\in[\tilde{x}-\delta,\ \tilde{x}+\delta]$ 时恒有

$$|F'(x)|\leqslant\frac{1}{2}$$

又由 $F(x)-F(\tilde{x})=F(x)-\tilde{x}=F'(\xi)(x-\tilde{x})$　ξ在$\tilde{x}$与x之间知对 $x\in[\tilde{x}-\delta,\ \tilde{x}+\delta]$，恒有 $|F(x)-\tilde{x}|<\delta$。因此，F：$[\tilde{x}-\delta,\ \tilde{x}+\delta]\to[\tilde{x}-\delta,\ \tilde{x}+\delta]$是压缩映射。又 $[\tilde{x}-\delta,\ \tilde{x}+\delta]$是完备的，由压缩映射原理知，任取 $x_0\in[\tilde{x}-\delta,\tilde{x}+\delta]$，

由 $x_{n+1}=F(x_n)=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，必有

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\tilde{x}$（因为 $\tilde{x}$ 是F的唯一的不动点）。

10. 由

$$\inf_n\ \sup_{x\neq y}\frac{d(F^nx,\ F^ny)}{d(x,\ y)}<1$$

必有常数 $k\in(0,\ 1)$及 n_0 使得

$$\sup_{x\neq y}\frac{d(F^{n_0}x,\ F^{n_0}y)}{d(x,\ y)}\leqslant k<1$$

从而有

$$d(F^{n_0}x,\ F^{n_0}y)\leqslant kd(x,\ y)\quad \forall x,\ y\in X$$

所以，F^{n_0}：$(X,\ d)\to(X,\ d)$是压缩映射，而 $(X,\ d)$ 是完备。因此，F有唯一不动点 x^* .

11. 因(*)等价于方程组

$$\begin{cases} x_1=b_1+(1-a_{11})x_1-a_{12}x_2-\cdots-a_{1n}x_n \\ x_2=b_2-a_{21}x_1+(1-a_{22})x_2-\cdots-a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ x_n=b_n-a_{n1}x_1-a_{n2}x_2-\cdots+(1-a_{nn})x_n \end{cases}$$

令

$$Fx=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12}\cdots-a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22}\cdots-a_{2n} \\ & \cdots\cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2}\cdots 1-a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则因

$$\begin{aligned} d(F(x),F(y)) &=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-a_{ij})\ (x_j-y_j)\right]\right\}^{1/2} \\ &\leqslant\left[\sum_{i,\ j=1}^{n}|\delta_{ij}-a_{ij}|^2\cdot\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2\right]^{1/2} \\ &=\left(\sum_{i,\ j=1}^{n}|a_{ij}-\delta_{ij}|^2\right)^{1/2}d(x,\ y) \\ &=kd(x,\ y) \end{aligned}$$

其中 $k=\left(\sum\limits_{i,\ j=1}^{n}|a_{ij}-\delta_{ij}|^2\right)^{1/2}<1$，$R^n$ 是完备的。由压缩映射原理知F有唯一不动点 $x^*\in R^n$，也即(*)有唯一的一组

解 x_1，x_2，…，x_n。

12. 因 $x(t)=f(t)+\lambda\int_0^t x(s)\,ds$ 就是核 $k(t,\ s)\equiv 1$ 的伏特拉积分方程，所以存在 n 使 T^n：$C[0,\ 1]\to C[0,\ 1]$是压缩映射，其中 $Tx(t)=f(t)+\lambda\int_0^t x(s)\,ds$。故存在唯一连续解 $x^*(t)\in C[0,\ 1]$。

取 $x_0(t)\equiv 0$，$x_1(t)=Tx_0(t)=f(t)$，

$$x_2(t)=Tx_1(t)=f(t)+\lambda\int_0^t f(s)\,ds\ ,$$

$$x_3(t)=Tx_2(t)=f(t)+\lambda\int_0^t\left(f(s)+\lambda\int_0^s f(s_1)\,ds_1\right)ds$$

$$=f(t)+\lambda\int_0^t f(s)\,ds+\lambda^2\int_0^t\left(\int_0^s f(s_1)\,ds_1\right)ds$$

$$=f(t)+\lambda\int_0^t f(s)\,ds+\lambda^2\int_0^t(t-s)f(s)\,ds$$

$$x_4(t)=Tx_3(t)=\cdots=f(t)+\lambda\int_0^t f(s)\,ds$$

$$+\lambda^2\int_0^t(t-s)f(s)\,ds+\frac{\lambda^3}{2!}\int_0^t(t-s)^2 f(s)\,ds$$

易知

$$x_{n+1}(t)=Tx_n(t)=\cdots=f(t)$$

$$+\lambda\int_0^t\sum_{i=0}^{n}\frac{[\lambda(t-s)]^i}{i!}f(s)\,ds$$

显然

$$x^*(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)=f(t)+\lambda\int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)\,ds$$

13. 令 $Tx(t)=\lambda\int_a^b k(t,\ s,\ x(s))\,ds+f(t)$

则

$$d(Tx,\ Ty)=|\lambda|\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^b(k(t,s,x(s))-k(t,s,y(s)))ds\right|$$

$$\leqslant|\lambda|\max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b M|x(s)-y(s)|ds$$

$$\leqslant|\lambda|(b-a)Md(x,\ y)$$

由于 $|\lambda|M(b-a)<1$，故T是$C[a,b]$到$C[a,b]$中压缩映射。又$C[a,\ b]$完备，故由 Banach 压缩映射原理知存在唯一连续解 $x^*(t)\in C[a,\ b]$（即T的不动点）。

*14. 因 $f'_y(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x,y)$连续，故存在$a,b>0$，使得 $|x-x_0|\leqslant a$，$|y-y_0|\leqslant b$ 时恒有 $|f'_y(x,\ y)|\leqslant\frac{1}{2}$，又由 $f(x,\ y)$ 连续性及 $y_0=f(x_0,\ y_0)$ 知存在 $\delta>0$ $(\delta\leqslant a)$，使得 $|x-x_0|\leqslant\delta$ 时恒有 $|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|=|f(x,y_0)-y_0|\leqslant\frac{b}{2}$.

令 $V_b[y_0]=\{g\in C[x_0-\delta,\ x_0+\delta];\ \max_{|x-x_0|\leqslant\delta}|g(x)-y_0|\leqslant b\}$

显然$V_b[y_0]$是$C[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$的闭子空间(闭球)，故为完备度量空间，令 $Tg(x)=f(x,\ g(x))$

$\forall g\in V_b[y_0]$，由于 $\forall x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ 有

$$|Tg(x)-y_0|=|f(x,\ g(x))-f(x,y_0)+f(x,y_0)-y_0|$$

$$\leqslant|f(x,g(x))-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-y_0|$$

$$\leqslant|f'_y(x,\ y)|\ |g(x)-y_0|+\frac{1}{2}b\leqslant b$$

故 $Tg\in V_b[y_0]$。又 $\forall g_1,g_2\in V_b[y_0]$ $\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$

$$|Tg_1(x)-Tg_2(x)|=|f(x,\ g_1(x))-f(x,\ g_2(x))|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|g_1(x)-g_2(x)|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\max_{|x-x_0|\leqslant\partial}|g_1(x)-g_2(x)|$$

即

$$d(Tg_1,\ Tg_2)\leqslant\frac{1}{2}d(g_1,\ g_2)$$

因此，$T:V_b[y_0]\to V_b[y_0]$ 是压缩映射，故∃唯一 $g(x)\in V_b[y_0]\subset C[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$，使得 $g(x)=f(x,\ g(x))$ $\forall x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$.

又 ∵ $y_0=f(x_0,\ y_0)$，故由 $g(x_0)=f(x_0,\ g(x_0))$及

$$|g(x_0)-y_0|=|f(x_0,\ g(x_0))-f(x_0,\ y_0)|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|g(x_0)-y_0|$$

知

$$y_0=g(x_0)$$

*15. 令 $F(x,\ y)=y-\dfrac{f(x,\ y)}{f'_y(x_0,\ y_0)}$. 则由于 $f(x_0,\ y_0)=0$，故 $y_0=F(x_0,\ y_0)$。

又由于 $F'_y(x,y)=1-\dfrac{f'_y(x,\ y)}{f'_y(x_0,\ y_0)}$，知 $F'_y(x_0,y_0)=0$

因此，由题14知 ∃$\delta>0$，及 $g(x)\in C[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ 使得

$y_0=g(x_0)$，且 $g(x)=F(x,\ g(x))$ $\forall x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$

即

$$g(x)=g(x)-\frac{f(x,\ g(x))}{f'_y(x_0,\ y_0)}$$

故

$$f(x,\ g(x))=0$$

注　这就是用 不动点定理 证明数学 分析中的 隐函数存在定理。

§ 2.6 度量空间中的紧性

1. 设Y为$(X,\ d)$ 中的全有界集，所以，$\forall\varepsilon>0$，存在有限 ε-纲 $Y_\varepsilon=\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_k\}$，则$Y_\varepsilon$ 也必为Y的任一子集A （$\subset Y$）的有限 ε-网。因此。全有界集Y的子集A也必为全有界集。

2. 全有界集未必为列紧集， 是在不完备的度量空间中 的情形。例如取 $X=(0,\ 1)\subset R$，X 作为R的子空间。在X中取 $Y=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$，显然$Y$为$X$中的全有界集。但$Y$不是列紧集。事实上，因为点列$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 在X中无收敛子列。

3.（Ⅰ）M是自列紧集，则M显然是列紧的闭集。反之，若M是列紧的闭集，故任一$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M$必有收敛子列$\{x_{n_k}\}$，又由$M$的闭性，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\in M$．所以，$M$为自列紧集。

（Ⅱ）若$\overline{M}$为自列紧集，则任一$\{x_n\}\subset M\subset\overline{M}$，必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$．所以，M为列紧集。

反之，若M为列紧集，则任一$\{x_n\}\subset\overline{M}$，必有$\{y_n\}\subset M$，使得 $d(x_n,\ y_n)<\frac{1}{n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

由于M的列紧性，存在收敛子列$\{y_{n_k}\}$，从而设

$$\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=y_0\in\overline{M}$$

且 $$d(x_{n_k}, y_0) \leqslant d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y_0)$$
$$\leqslant d(y_{n_k}, y_0) + \frac{1}{n_k} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

因此，$\{x_n\}$ 有收敛子列$\{x_{n_k}\}$，且 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{nk} = y_0 \in \overline{M}$。所以，$M$为自列紧集。

（Ⅲ）、（Ⅳ）由定义直接可得。略。

4．若M为(X, d)中自列紧集，M显然为闭集，且M必为列紧集，从而M必为全有界集，所以，自列紧集必为全有界的闭集。

若 (X, d) 为完备空间，M为其中全有界闭集。则M必为完备空间(X, d)中的列紧闭集，从而由题 3(1) 知M必为自列紧集。

5．设A为 (X, d) 中的有限集，则任一$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$，必有某一点 $x_0 \in A$ 在 $\{x_n\}$ 中无限次重复出现，相应的子列就是常点列： $x_0, x_0, \cdots, x_0, \cdots$ 它当然收敛于 $x_0 \in A$. 所以，A必为自列紧集。

6．若A为有限点集，由题 5 知A必为自列紧集，从而必为紧集。

反之，若A为离散度量空间 (X, d) 中的紧集，由于

$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$，知开球族 $\{V(x, 1); x \in A\}$ 为A的开覆盖，必有有限子覆盖：$V(x_1, 1), \cdots, V(x_k, 1)$ 从而必有：$A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} V(x_i, 1) = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$，故$A$至多有 k 个点组成，即A为有限集。

注　后者之另一证法。若A为离散度量空间 (X, d) 中的无限集，则A中必有由两两互不相同的点组成的点列

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$，则由于 $d(x_i, x_j)=1$，$\forall i\neq j$，知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列，从而 A 不是列紧集，当然不是紧集。也即离散度量空间中紧集必为有限集。

7. 若 $\overline{A}$ 为紧集，$\overline{A}$ 为自列紧集，从而 A 为自列紧集，所以 A 必为全有界集。

反之，若 A 为完备空间 (X, d) 中的全有界集，则 A 必为 (X, d) 中列紧集。从而由题 3 中(2)知 $\overline{A}$ 为 (X, d) 中的自列紧集。

注　后者之另一证法。A 全有界，则 $\forall\varepsilon>0$，存在有限 $\frac{1}{2}\varepsilon$-网 $\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$，即 $A\subset\bigcup_{i=1}^{k}V\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$，显然 $\overline{A}\subset\bigcup_{i=1}^{k}V(y_i, \varepsilon)$，即 $\{y_1, \cdots, y_k\}$ 必为 $\overline{A}$ 的有限 ε-网，也即 A 全有界必有 $\overline{A}$ 为全有界。由于 (X, d) 完备，从而 $\overline{A}$ 为列紧集，且又是闭集，故 $\overline{A}$ 为自列紧集。

8. 只须证收敛点列 $\{x_n\}$ 在连续映射作用下仍为收敛点列，但这是度量空间中连续映射的一条基本性质。由此，易知度量空间 (X, d) 中的列紧集 M 在同胚映射 $F: (X, d)\to(Y, \rho)$ 下必成为 (Y, ρ) 中的列紧集，即 (X, d) 中的子集 M 的列紧性在同胚映射下是保持不变的。

9. 由于 A，B 都为 (X, d) 中的紧集，故都有界。从而

$$L=\sup\{d(x, y);\ x\in A,\ y\in B\}<+\infty$$

因此，$\forall n$，存在 $x_n\in A$，$y_n\in B$，使得

$$L-\frac{1}{n}<d(x_n, y_n)\leqslant L \qquad (*)$$

由于 A 为紧集，有 $\{x_{n_k}\}$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a_1\in A$．同理

$\{y_{n_k}\}\subset B$，由 B 的紧性知有 $\{y_{n_{k_i}}\}$，使

$$\lim_{i\to\infty} y_{n_{k_i}} = b_1 \in B$$

故由度量的连续性及(*)知

$$L-\frac{1}{n_{k_i}}<d\ (x_{n_{k_i}},\ y_{n_{k_i}})\leqslant L$$

令 $i\to\infty$ 得 $L=d(a_1,\ b_1)$.

同理可证，存在 $a\in A$，$b\in B$ 使得

$$d(a,\ b)=\inf\{d(x,\ y);\ x\in A,\ b\in B\}$$

注 本题可以先证：紧集 A 与 B 的积集 $A\times B$ 是紧集，再由于 d 的连续性，定义在紧集 $A\times B$ 上的连续泛函 d：$A\times B\to R$ 必有最小值与最大值可知本题结论成立。

10. 取 $x_n\in A_n$，则由于 $\{x_n\}$ 为紧空间（X，d）中点列，必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，又由于 $x_{n_k}\in A_i$ $(k>i)$ $\forall i$，从而由 A_i 的闭性知 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0\in A_i$ $\forall i$.

所以

$$x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\neq\phi$$

注意：（X，d）紧性不可缺。例如，R 中 $A_n=[n,\ +\infty)$ 为满足 $A_n\supset A_{n+1}$ 的闭集，但 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\phi$；同样 A_n 的闭性不可缺。例如，(X,d) 为 R 的闭子空间 $[0,1]$，取 $A_n=\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$，

则 $A_n \supset A_{n+1}$，但 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$.

11.（证法 1）设$\mathscr{C}$为A的开覆盖，必有 $G_{\lambda_0} \in \mathscr{C}$，使 $x_0 \in G_{\lambda_0}$，从而有 $\varepsilon > 0$，使 $V(x_0, \varepsilon) \subset G_{\lambda_0}$，$\forall\ \varepsilon > 0$，存在 $N(\varepsilon)$，使得 $n > N$ 时 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$必有 $G_{\lambda_i} \in \mathscr{C}$，使

$$x_i \in G_{\lambda i} \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

从而 G_{λ_0}，G_{λ_1}，$\cdots$，G_{λ_N} 就是A 的有限子覆盖。因此，A 为紧集。

（证法 2）显然，若 $\{x_n\}$ 是无限集，则 $A = \{x_0, x_1, \cdots x_n \cdots\}$，只有唯一聚点 x_0，因此，A中任一点列$\{y_n\}$若其为有限集，必有收敛于A中点的收敛子列，若$\{y_n\}$为无限集，则必有收敛于 $x_0 \in A$ 的收敛子列，也即A 都为自列紧集，也即 A 为紧集。

当 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有限集时，显然A 为紧集。

12. 由题 4，只须证S 是闭集就行了。设 $x_0 \in S'$，则存在 $\{y_k\} \subset S$ 使得 $d(y_k, x_0) \to 0$ ($k \to \infty$ 时). 由于 $y_k \in S$，必存在x_{n_k}（且 $n_{k+1} > n_k$），使得 $d(x_{n_k}, y_k) < \frac{1}{k}$从而有

$d(x_{n_k}, x_0) \leqslant d(x_{n_k}, y_k) + d(y_k, x_0) \to 0$ ($k \to \infty$ 时)，即x_0 必为$\{x_n\}$的某收敛子列 $\{x_{n_k}\}$的极限，也即 $x_0 \in S$. 因此，S 是闭集，所以，S 是完备空间X 中全有界的闭集，故必为紧集。

13. 显然只须证充分性，若 $x_n \in X$，$x_n \to x_0 \in X$，由题11知 $\{x_n\} \cup \{x_0\}$为X中紧集，所以 $f|_A$：$A = \{x_n\} \cup \{x_0\} \to Y$ 是连续的，从而 $f(x_n) \to f(x_0)$. 这表明任何 $x_n \to x_0$（X中）恒有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ 故 f：$(X, d) \to (Y, \rho)$ 连续。

*14. 只须证充分性，同上题考虑X中收敛于 x_0 的点列$\{x_n\}$一样，则由于其象集为Y中紧集，故 $\{f(x_n)\}$的任一子列都收敛，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在。不妨设 $x_0 \neq x_n \ \forall n$，因为 f 为单射，故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_n) \ \forall n$. 但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \in \{f(x_n)\} \cup \{f(x_0)\}$，所以必有 $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

15. 设 $\{x_n\} \subset (X, \rho)$，则 $\exists \{x_{n_k}\}$ 及 $x_0 \in X$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_0) = 0$，从而由 $\rho(x_{n_k}, x_0) \leqslant k d(x_{n_k}, x_0)$，必有 $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_{nk}, x_0) = 0$，因此，$(X, \rho)$ 也为紧空间。

16. 易知 F^{-1}存在，且 (Y, ρ) 也是紧空间。由于紧空间中闭集都为紧集，连续映射F把X中紧集映射成Y中紧集，从而F把X中任一闭集D 映成为Y中闭集$F(D)$，进而易知 $(F^{-1})^{-1}(D) = F(D)$ 总为Y中闭集，所以，F^{-1}为连续的。又由于Y为紧空间，故F^{-1} 为一致连续的。

*17.（Ⅰ）由于$\{x_n\}$为紧空间中点列，故有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$，且不妨设 $n_{k+1} - n_k > n_k - n_{k-1}$ $(k = 2, 3, \cdots)$，由于F是等距映射，当 $k \to \infty$ 时，有

$$d(x, x_{n_{k+1}-n_k}) = d(F^{n_k}(x), F^{n_{k+1}}(x))$$

$$= d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \to 0$$

故

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_{k+1}-n_k} = x$$

由此知

$$x \in \overline{\{x_n\}} \ .$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\forall x\in X$，有 $x\in\overline{F(X)}$，由于F等距映射，必为连续。X为紧集，所以$F(X)$为紧集，从而为闭集。故，$x\in F(X)$. 即 $X=F(X)$.

关于$X=F(X)$ 还有另一证法：由于X为紧集，故等距映射（必连续）下 $F(X)$ 为紧集，从而为X中闭集。若 $X\neq F(X)$，则 $\exists\ x_0\in X-F(X)$，设 $\delta=d(x_0,\ F(X))$，必有 $\delta>0$，则 $d(F(x_0),\ F^2(X))=d(F^2(x_0),\ F^3(X))=\cdots=d(x_0,F(X))=\delta>0$. 显然 $d(F^m(x_0),\ F^n(x_0))\geqslant\delta$ $\forall\ m\neq n$，故 $\{F^k(x_0)\}$ $(\subset X)$ 没有收敛子列，故与X的紧性相矛盾。因此，$X=F(X)$.

*18. 显然只须证充分性。假定有 x_0，$y_0\in X$，使得

$$d(x_0,\ y_0)<d(F(x_0),\ F(y_0))$$

设 $x_n=F^n(x_0)$，$y_n=F^n(y_0)$，由于 X 为紧空间，易知必有相同的子列$\{x_{n_k}\}$，$\{y_{n_k}\}$都收敛。因此，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists N$，使得 $k>r>N$ 时 $d(x_{n_r},\ x_{n_k})<\varepsilon$，$d(y_{n_r},\ y_{n_k})<\varepsilon$.

令 $p=n_k-n_r$，由于 $d(x,\ y)\leqslant d(F(x);\ F(y))$ $\forall x$，$y\in X$，可知

$$\begin{aligned}d(x_0,\ x_p)&\leqslant d(F(x_0),\ F(x_p))\leqslant\cdots\\&\leqslant d(F^{n_r}(x_0),\ F^{n_r}(x_p))\\&=d\ (x_{n_r},\ x_{n_k})<\varepsilon\end{aligned}$$

同理有

$$d(y_0,\ y_p)<\varepsilon$$

令 $3\varepsilon_0=d(F(x_0),\ F(y_0))-d(x_0,\ y_0)>0$，由上可知 $\exists\ p_0$ 使得

$$d(x_{p_0},\ y_{p_0}) \leqslant d(x_0,\ x_{p_0}) + d(x_0,\ y_0) + d(y_{p_0},\ y_0)$$
$$\leqslant d(x_0,\ y_0) + 2\varepsilon_0$$

又因 $d(x_{p_0},\ y_{p_0}) = d(F^{p_0}(x_0), F^{p_0}(y_0)) \geqslant \cdots \geqslant d(F(x_0),$ $F(y_0) > d(x_0,\ y_0) + 2\varepsilon_0$，得

$$d(x_{p_0},\ y_{p_0}) > d(x_{p_0},\ y_{p_0})$$

矛盾

因此，$\forall x、y \in X$，都有 $d(x,\ y) \leqslant d(F(x),\ F(y))$，且 X 为紧空间时，必有 $d(x,\ y) = d(F(x),\ F(y))$ $\forall x,\ y \in X$，也即 F 为等距映射。（注意，由题17知 F 必为满射）

19. 考虑 $G: X \to R$，$G(x) = d(x,\ F(x))$，G 是连续的，所以 $G(X)$ 为 R 中紧集。令

$$0 \leqslant \eta = \inf G(X) = G(x_0) = d(x_0,\ F(x_0))$$

若 $\eta > 0$，则由 $d(F(x_0),\ F^2(x_0)) < d(x_0,\ F(x_0)) = \eta$ 与 η 为 $\inf G(X)$ 矛盾。故，$d(x_0,\ F(x_0)) = \eta = 0$，即 x_0 为 F 的不动点。又由 $d(F(x),\ F(y)) < d(x,\ y)$ $\forall x,\ y \in X$，易知不动点是唯一的。

20. 令 $G(x) = d(x,\ F(x))$，当 $F: (X,\ d) \to (X,\ d)$ 连续时，$G: (X,\ d) \to R$ 是连续的。因 $(X,\ d)$ 为紧空间，所以 G 有最小值 $k \geqslant 0$，设

$$k = \inf G(X) = G(x^*) \quad (x^* \in X)$$

显然 $k > 0 \iff F$ 没有不动点。

21. 设 X 为紧集，$\{F_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ 为一族闭集，且 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \phi$

故 $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c = X \supset X$. 因此，$\exists\ F_{\lambda_1},\ \cdots,\ F_{\lambda_n}$ $(\lambda_i \in \Lambda)$ 使得 $\bigcup_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}^c \supset X$，从而

$$\phi=\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}^{c}\right)^{c}\subset X^{c}=\phi$$

即

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}=\phi$$

反之，如X中任一族闭集$\{F_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$其交 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda=\phi$ ，

必∃有限个成员其交为空集，则对X的任一开覆盖 $\mathscr{B}=\{G_\lambda;$ $\lambda\in\Lambda\}$. 由于 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\supset X$，故

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda^{c}=\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right)^{c}=\phi$$

从而有$G_{\lambda_1},\cdots,G_{\lambda_k}$ $(\lambda_i\in\Lambda)$ 使得 $\bigcap_{i=1}^{k} G_{\lambda_i}^{c}=\left(\bigcup_{i=1}^{k} G_{\lambda_i}\right)^{c}=\phi$

故 $\bigcup_{i=1}^{k} G_{\lambda_i}\supset X$.

*22. 设X为紧集，而若其闭集族 $\{F_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ 的任一有限个成员之交都为非空集，则由题21知必有 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\neq\phi$.

反之，若任一闭集族$\{F_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$，如其一切有限个成员之交为非空集，必有 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\neq\phi$，则对任一$\{x_n\}\subset X$，令

$$F_n=\overline{\{x_{n+1},\ x_{n+2},\ \cdots\}}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

显然$\{F_n;\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$其任意有限个成员之交非空，故有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\neq\varphi$$

任取 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$， 则 $x_0\in F_n\ \forall n$，所以，∃ x_{n_1} 使得

$$d(x_0,\ x_{n_1})<1$$

因 $x_0\in F_2$，故 ∃ $n_2>n_1$，使得 $d(x_{n_2},\ x_0)<\frac{1}{2}$，…，可取

得 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $d(x_{n_k}, x_0)<\frac{1}{k}$

显然 $x_{n_k}\to x_0$ $(k\to\infty)$. 即 (X, d) 中任一点列 $\{x_n\}$ 都有收敛子列，因此，(X, d) 为紧空间。

23. 设 $X=X_1\times X_2$ 为紧空间，则任意 $\{x_n\}\subset X_1$，$\{y_n\}\subset X_2$，由于X自列紧，其中点列 $\{(x_n, y_n)\}$ 必有收敛子列 $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$. 设 $d((x_{n_k}, y_{n_k}), (x_0, y_0))\to 0$ $(k\to\infty)$，故 $d_1(x_{n_k}, x_0)\to 0$，$d_2(y_{n_k}, y_0)\to 0$，其中 $x_0\in X_1$，$y_0\in X_2$，即X_1，X_2都是紧空间。

反之，若 (X_i, d_i) 都是紧空间，任意$\{(x_n, y_n)\}\subset X$，由于$\{x_n\}\subset X_1$，$\{y_n\}\subset X_2$，故$\exists\{x_{n_k}\}$及 $x_0\in X_1$ 使得

$$d_1(x_{n_k}, x_0)\to 0 \quad (k-\infty)$$

$\{y_{n_k}\}$ 也有子列$\{y_{n_{k_j}}\}$及$y_0\in X_2$，使得

$$d_2(y_{n_{k_j}}, y_0)\to 0 \quad (j\to\infty)$$

因此，$\{(x_n, y_n)\}$ 有收敛子列 $\{(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})\}$收敛于 $(x_0, y_0)\in X$，即X是紧空间。

24. 设F：$X_1\to X_2$连续，任 $(x_0, y_0)\in \overline{\mathrm{Graph}(F)}$，则 $\exists$ $(x_n, F(x_n))\in \mathrm{Graph}(F)$，使得 $d((x_n, F(x_n)), (x_0, y_0))\to 0$. 由于 $\{F(x_n)\}\subset(X_2, d_2)$，而 X_2 为紧空间，故$\exists$收敛子列$\{F(x_{n_k})\}$. 设$F(x_{n_k})\to y_1$，从而$\{(x_{n_k}, F(x_{n_k}))\}$作为$\{(x_n, F(x_n))\}$的子列也必收敛于 (x_0, y_0)，因此$y_1=y_0$，且$x_{n_k}\to x_0$. 由于F连续，必有 $y_0=F(x_0)=\lim_{k\to\infty}F(x_{n_k})$. 因此，$(x_0, y_0)\in\mathrm{Graph}(F)$. 即 $\mathrm{Graph}(F)$ 为 $(X_1\times X_2, d)$ 中的闭集。

反之，若 Graph(F) 为 $X_1\times X_2$ 中的闭集。设 $\{x_n\}\subset X_1$，且 $x_n\to x_0\in X_1$，由 X_2 的紧性，$\{F(x_n)\}$ 有收敛子列 $\{F(x_{n_k})\}$. 设 $F(x_{n_k})\to y_0\in X_2$，从而 $(x_{n_k}, F(x_{n_k}))\to (x_0, y_0)\in X_1\times X_2$. 由于Graph$(F)$为闭集，故$(x_0, y_0)\in$ Graph(F)，即 $y_0=F(x_0)$. 易知 $\{F(x_n)\}$ 的收敛子列必都收敛于 y_0. 事实上，如 $F(x_n)\nrightarrow y_0$，由于X_2为紧空间，必$\exists$子列$\{F(x'_{n_k})\}$，使得$F(x'_{n_k})\to y_1\neq y_0$，且因 $(x'_{n_k}, F(x'_{n_k}))\to(x_0, y_1)\in$ Graph (F)，故$y_1=y_0=F(x_0)$，这与 $y_0\neq y_1$ 相矛盾。因此，$F(x_n)\to y_0=F(x_0)$. 即F在X_1中任一点 x_0 都连续的。

§ 3.1 线性赋范空间与 Banach 空间

1. （Ⅰ）$-x$ 的唯一性：若 $x+y=\theta$，则 $x+y+(-x)=-x$ $\because$ $x+y+(-x)=y+\theta=y$，$\therefore y=-x$，即任$x\in X$，存在唯一的元素$-x$，使 $x+(-x=\theta$.

（Ⅱ）$\because \forall x$，$\lambda\neq 0$，$\lambda\theta+x=\lambda\left(\theta+\frac{1}{\lambda}x\right)=\lambda\frac{1}{\lambda}x=x$，故 $\lambda\theta=\theta$ ，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\theta=\theta$ 也成立（见(Ⅲ)）.

（Ⅲ）$\because$ $\forall x$，$0x+x=(0+1)x=x$，$\therefore$ $0x=\theta$.

（Ⅳ）$\because$ $\theta=(1-1)x=x+(-1)x$，$\therefore$ $(-1)x=-x$.

（Ⅴ）假定 $\lambda x=\theta$，但 $\lambda\neq 0$，$x\neq\theta$，那末与

$x=\frac{1}{\lambda}(\lambda x)=\frac{1}{\lambda}\theta=\theta$，矛盾。

2. （Ⅰ）、（Ⅲ）、（Ⅳ）、（Ⅴ）所示集合都是线性空间；（Ⅱ）所示集合不是线性空间。

3. （Ⅰ） $\forall x, y \in \operatorname{span} M$，则有

$$x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i,\ x_i\in M,\ \lambda_i\in K$$

$$y=\sum_{j=1}^{m}\mu_j y_j,\ y_j\in M,\ \mu_i\in K$$

从而 $\forall \alpha, \beta\in K$ 有

$$\alpha x+\beta y=\sum_{i=1}^{n}\alpha\lambda_i x_i+\sum_{j=1}^{m}\beta\mu_j y_j\in \operatorname{span} M.$$

（Ⅱ）设 X_0 为包含M的子空间，即 $M\subset X_0$ 且 X_0 为子空间。由（Ⅰ）及X_0的子空间性质，必有

$$\operatorname{span}M\subset X_0$$

4.（Ⅰ）因M的维数不会超过 n；（Ⅱ）显然成立。（略）

5. X为实空间时 $\dim X=2n$，自然的基底为：e_1，ie_1，e_2，ie_2，…，e_n，ie_n，其中 $i=\sqrt{-1}$.

6. 若 $x\in M+N$，$\exists y\in M$，$z\in N$，使 $x=y+z$，由于 y，$z\in M\cup N$，所以$x\in$ span$(M\cup N)$，即 $M+N\in$span $(M\cup N)$.

若$x\in$span$(M\cup N)$，即$\exists y_1,\cdots,y_n\in M$，$z_1,\cdots,z_m\in N$ 使得 $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j z_i$，由于$M$，$N$为子空间，故 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\in M$，$\sum_{j=1}^{m}\beta_j z_j\in N$，从而 $x\in M+N$，即 $\operatorname{span}(M\cup N)\subset M+N$.

若M，N是X的子集，则

$$\mathrm{span}M+\mathrm{span}N=\mathrm{span}(M\cup N)$$

也成立。

因 $x\in\mathrm{span}M+\mathrm{span}N$，则$\exists y_1,\cdots,y_n\in M$，$z_1,\cdots,z_m\in N$

使得 $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j z_j$（$\alpha_i$，$\beta_j$是$X$的数域$K$中元素），

因此，$x\in\mathrm{span}(M\cup N)$.

若 $x\in\mathrm{span}(M\cup N)$，则$\exists y_1,\cdots,y_n\in M$，$z_1,\cdots,z_m\in N$，

使得

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j z_j$$

显然

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\in\mathrm{span}\,M,\quad \sum_{j=1}^{m}\beta_j z_j\in\mathrm{span}\,N$$

因此

$$x\in\mathrm{span}\,M+\mathrm{span}\,N\ .$$

7. x，$y\in Y\cap Z$，由于Y，Z都为子空间，对x，y的任意线性组合 $\alpha x+\beta y\in Y\cap Z$，即$Y\cap Z$必为子空间。

$Y\cup Z$未必为子空间，例如R^3中$Y=\{(a,0,0);a\in R\}$与$Z=\{(0,b,0);b\in R\}$，$Y\cup Z$不是子空间。

事实上，易证：当Y，Z都为X的子空间时，$Y\cup Z$为子空间的充要条件是$Y\subset Z$或$Y\supset Z$.

8. 因为积分，求导都具有线性性质。

9. 由定义 $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$，$A(\alpha x_1)=\alpha Ax_1$对一切$x_1$，$x_2\in D(A)$，$\alpha\in K$成立，也即$D(A)$关于线性运算是封闭的，即$D(A)$是子空间。显然$R(A)$也是子空间。

10. $Ax=\left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}\right\}^T$，$A$：$R^3\to R^3$ 是可逆的线性算子，且

$$A^{-1}x=\left\{\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}\right\}^T$$

所以A是同构映射。

11. A：$X\to Y$为同构映射，故A线性，且 A^{-1}：$Y\to X$ 存在。由于 $\forall y_1$，$y_2\in Y$，$\exists x_1$，$x_2\in X$，使得

$$Ax_1=y_1,\qquad Ax_2=y_2$$

因此

$$x_1=A^{-1}y_1,\ x_2=A^{-1}y_2$$

由于

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2=\alpha y_1+\beta y_2$$

所以

$$A^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha x_1+\beta x_2=\alpha A^{-1}y_1+\beta A^{-1}y_2$$

即A^{-1} 也是线性的，且显然可逆的。因此，A^{-1}：$Y\to X$ 也为同构映射。

12. 若 A：$R\to R^2$ 同构映射，x为R中非零的数，则 $Ax=xA1$，因此，$R(A)=\{xA1;\ x\in R\}$. 即 $R(A)$ 为一维向量空间。所以，$R(A)\subsetneq R^2$，故A不是同构映射。也即R与 R^2 不同构。

13. 设 $\dim X=\dim Y=n<+\infty$，取X的基为：e_1，…，e_n；Y的基 e'_1，…，e'_n，令 $Ae_i=e'_i$ $(i=1,\ \cdots,\ n)$，即

$A\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Ae_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e'_i$，易知$A$：$X\to Y$为线性，可逆的映射。

14. 设 $R(A)=Y$ 的基为：e'_1，…，e'_n，于是 $\exists e_1$，…，$e_n\in X$ 使 $Ae_1=e'_1$，…，$Ae_n=e'_n$，则$A\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Ae_i$

$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e'_i$. 因此，$\lambda_1\cdots$，$\lambda_n$不全为零，那末，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\neq\theta$，

即 e_1，…，e_n 为X的基。因此知A为同构映射，从而 A^{-1} 存在。反之，A^{-1}：$Y\to X$ 存在，当然 $R(A)=Y$.

15. 设 x，$y\in\bigcap_{\lambda\in\wedge}A_\lambda$，故 x，$y\in A_\lambda$ $\forall\lambda\in\wedge$.

因此 $\forall\alpha\in[0,\ 1]$，$\alpha x+(1-\alpha)y\in A_\lambda$，$\forall\lambda\in\wedge$

所以 $\alpha x+(1-x)y\in\bigcap_{\lambda\in}A\lambda$.

16. $\forall x$，$y\in Co(M)$，所以 $\exists\lambda_i\ (i=1,\ \cdots,\ n)\geqslant 0$；

$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，$x_i\in M$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$；$\mu_j(j=1,\ \cdots,\ m)\geqslant 0$，

$\sum_{j=1}^{m}\mu_j=1$，$y_j\in M$ $(j=1,\ \cdots,\ m)$ 且 $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ ，

$y=\sum_{j=1}^{m}\mu_j y_j$ ，因而，$\alpha\in[0,\ 1]$ 恒有

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha\lambda_i+\sum_{j=1}^{m}(1-\alpha)\mu_j=\alpha+(1-\alpha)=1$$

所以 $\alpha\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i+(1-\alpha)\sum_{j=1}^{m}\mu_j y_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha\lambda_i x_i$

$$+\sum_{j=1}^{m}(1-\alpha)\mu_j y_j \in Co(M)$$

即 $C_0(M)$ 为凸集且显然 $M\subset Co(M)$.

设E为包含M的凸集，x_1，x_2，$x_3\in M$，$\lambda_i>0$，

$\sum_{i=1}\lambda_i=1$，则$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3=\lambda_1x_1+(\lambda_2+\lambda_3)\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}x_2$

$+\frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}x_3\Big)$. $\because$ $\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}+\frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}=1$,

$\therefore$ $\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}x_2+\frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}x_3\in E$, $\therefore$ $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3\in E$

可再用归纳法证明：对 x_1，$\cdots$，$x_n\in M$，$\lambda_i>0$，

$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，恒有 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\in E$，从而，

$Co(M)\subset E$. 所以，$Co(M)$ 是包含M的最小凸集。

17. $\because$ $\|x\|\leqslant\|x-y\|+\|y\|$, $\therefore$ $\|x\|-\|y\|\leqslant\|x-y\|$.

同理 $\|y\|-\|x\|\leqslant\|x-y\|$. $\therefore$ $|\|x\|-\|y\||\leqslant\|x-y\|$.

18. $\|\lambda_nx_n+\mu_ny_n-\lambda x-\mu y\|\leqslant\|\lambda_nx_n-\lambda x\|+\|\mu_ny_n-\mu y\|$

$\leqslant|\lambda_n|\|x_n-x\|+|\lambda_n-\lambda|\|x\|$

$+|\mu_n|\|y_n-y\|+|\mu_n-\mu|\|y\|$

易知 $\lambda_nx_n+\mu_ny_n\to\lambda x+\mu y$ ($n\to\infty$时).

由17题知 $\|x_n\|\to\|x\|$. $\therefore$ $\frac{1}{\|x_n\|}\to\frac{1}{\|x\|}$，从而由上知

$\|x_n\|\neq0$，$\|x\|\neq0$ 时，$\frac{1}{\|x_n\|}x_n\to\frac{1}{\|x\|}x$.

19. 显然$\|\cdot\|_\infty$满足范数公理（1）、（2）。至于（3），

$$\because \quad \|x+y\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i+\eta_i|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}(|\xi_i|+|\eta_i|)$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|+\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\eta_i|=\|x\|_\infty+\|y\|_\infty .$$

20. $x\in C[a,\ b]$，$\|x\|_p=\left(\int_a^b|x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\geqslant 0$显然成立.

$\|x\|_p=0$，易知 $x(t)\equiv 0$，即 $x=\theta$；$\|\theta\|_p=0$；公理（2）显然成立，又由 Hölder 不等式：

$$\|x+y\|_p=\left(\int_a^b|x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b|x(t)^p\,dt\right)^{1/p}$$

$$+\left(\int_a^b|y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}=\|x\|_p+\|y\|_p .$$

$\forall x,\ y\in C[a,\ b]$。知 $\|x\|_p$为$C[a,\ b]$ 上的范数。

21.（Ⅰ）∵ 收敛数列必有界，∴ 显然 $c_0\subset l^\infty$，且

$x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_2,\ \cdots),\ y=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_n,\ \cdots)\in c_0$,

则 $\alpha x+\beta y=(\alpha\xi_1+\beta\eta_1,\ \cdots,\ \alpha\xi_n+\beta\xi_n,\ \cdots)$，由于

$\lim_{n\to\infty}(\alpha\xi_n+\beta\eta_n)=0$，知 $\alpha x+\beta y\in c_0$，即 c_0 为 l^∞ 的线性子空间。

（Ⅱ）设 $x_k=(\xi_1^{(k)},\ \cdots,\ \xi_n^{(k)},\ \cdots)\in c_0$,

$x_0=(\xi_1^{(0)},\ \cdots,\ \xi_n^{(0)},\ \cdots)$，且

$$\|x_k-x_0\|=\sup_n|\xi_n^{(k)}-\xi_n^{(0)}|\to 0 \quad (\text{当 } k\to\infty \text{ 时})$$

因此，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1$，使得当 $k>N_1$ 时，

$\|x_k-x_0\|=\sup_n|\xi_n^{(k)}-\xi_n^{(0)}|<\varepsilon/2$. 由于

$$|\xi_n^{(0)}|\leqslant|\xi_n^{(k)}|+|\xi_n^{(k)}-\xi_n^{(0)}|$$

$$< |\xi_n^{(k)}| + \varepsilon/2 \quad (k > N_1) \qquad (1)$$

又因 $x_k \in c_0$，$\xi_n^{(k)} \to 0$ ($n \to \infty$ 时)，故 $\exists N (\geqslant N_1)$，使得当 $n > N$时恒有

$$|\xi_n^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

由(1)、(2)，

$$|\xi_n^{(0)}| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

即 $x_0 \in c_0$ 由此知 c_0 为 l^∞ 的闭子空间。

（Ⅲ）由于 l^∞ 为 Banach 空间，作为其闭子空间的 c_0，当然为 Banach 空间，下证 c_0 是可分的。

设M为一切有限有理数列全体，即$x=(\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in M \iff \xi_n$ 全为有理数，且$\exists N_x$，使得 $n > N_x$ 时 $\xi_n = 0$ 。显然$M \sim \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} Q^n$，可知$M$是可列集。

$\forall \varepsilon > 0$，任 $y=(\eta_1, \cdots, \eta_n, \cdots) \in c_0$，由于 $\eta_n \to 0$ ，故 $\exists N$使得 $n > N$ 时 $|\eta_n| < \varepsilon$. 对 $(\eta_1, \cdots, \eta_N) \in R^N$，$\exists (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in Q^N$使得 $\sup\limits_{1 \leqslant n \leqslant N} |\eta_n - \xi_n| < \varepsilon$，从而 $\exists x_0 = (\xi_1, \cdots, \xi_N, 0, 0, \cdots) \in M$ 使得 $\|y - x_0\| < \varepsilon$. 也即$M$在 c_0 中稠密。

因此，c_0 为可分的 Banach 空间

22. $\because \|x_m - x_n\|^2 = \int_0^1 (t^m - t^n)^2 dt = \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{m+n+1}$ 当m，$n \to \infty$ 时，$\|x_m - x_n\| \to 0$，$\therefore \{x_n\}$ 为 $(C[0, 2], \|\cdot\|)$ 中 Cauchy 列. 若 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$，即

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_0^2 |x_n(t) - x_0(t)|^2 dt \right)^{1/2} = 0$$

由 Lebesque 控制收敛定理，易知

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=x_0(t),\ a.e,\ 于[0,\ 2]$$

可知当 $t\in[0,\ 1)$时，$x_0(t)=0$，当$t\in(1,\ 2]$时，$x_0(t)=1$，显然 $x_0\in C[0,\ 2]$. 也即 $\{x_n\}$ 在 $(C[0,\ 2],\ \|\cdot\|)$ 中不收敛。

*23. 设$\|x\|_p=\|y\|_q=\|z\|_r=1$. 由 Young 不等式

$$|\xi_i\eta_i\zeta_i|\leqslant\frac{1}{p}|\xi_i|^p+\frac{1}{\frac{qr}{q+r}}|\eta_i\zeta_i|^{\frac{qr}{q+r}}$$

$$=\frac{1}{p}|\xi_i|^p+\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)|\eta_i\zeta_i|^{\frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{r}}}$$

记 $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=a$，则 $\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)|\eta_i\zeta_i|^{\frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{r}}}=a\,|\eta_i\zeta_i|^{\frac{1}{a}}$

$$\leqslant a\left(\left(\frac{|\eta_i|}{aq}^{\frac{1}{a}}\right)^{aq}+\left(\frac{|\xi_i|}{ar}^{\frac{1}{a}}\right)^{ar}\right)$$

$$=\frac{|\eta_i|^a}{q}+\frac{|\xi_i|^r}{r}$$

所以

$$|\xi_i\eta_i\zeta_i|\leqslant\frac{1}{p}|\xi_i|^p+\frac{1}{q}|\eta_i|^a+\frac{1}{r}|\xi_i|^r\quad\forall i$$

因此，得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i\zeta_i|\leqslant\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^a+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^r$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1\qquad(*)$$

当 x， y， z 中有零数列时，要证的不等式显然成立，不然，

令 $x_0=\frac{1}{\|x\|_p}x$， $y_0=\frac{1}{\|y\|_q}y$， $z_0=\frac{1}{\|z\|_r}z$，

则由(*)式

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\xi_i\eta_i\zeta_i|}{\|x\|_p\|y\|_q\|z\|_r}\leqslant 1$$

故有 $$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i\zeta_i|\leqslant\|x\|_p\|y\|_q\|z\|_r .$$

24. 因 $0<p<1$， $\alpha\in(0,\ 1)$，则 $0<\alpha<\alpha^p<1$ ，故

$$\|\alpha x\|_p\neq|\alpha|\ \|x\|_p$$

所以，$(R^n,\ \|\cdot\|_p)$ 不是线性赋范空间。

又 $d_p(x,\ y)=\|x-y\|_p=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p$ 显然满足严格正性及对称性；并且

$$d_p(x,\ y)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p\leqslant\sum_{i=1}^{n}(|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|)^p \qquad (1)$$

令

$$f(t)=t^p+(1-t)^p,\ t\in[0,\ 1],\ 0<p<1$$

易验证： $f(t)\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^p=2^{1-p}>1$， 故知

$(|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|)^p\leqslant|\xi_i-\zeta_i|^p+|\zeta_i-\eta_i|^p$，由（1）可得 $d_p(x,\ y)\leqslant d_p(x,\ z)+d_p(z,\ y)$， 所以 $(X,\ d_p)$ 为度量空间。

25. 显然 c 是 l^∞ 的线性子空间。

设 $x_0\in\bar{c}$，则 $\exists x_k=(\xi_1^{(k)},\ \cdots,\ \xi_n^{(k)},\ \cdots)\in c$，使得

$\|x_k-x_0\|\to 0$. 记 $x_0=(\xi_1^{(0)},\ \cdots,\ \xi_n^{(0)},\ \cdots)$，

因 $|\xi_m^{(0)}-\xi_n^{(0)}|\leqslant|\xi_m^{(0)}-\xi_m^{(k)}|+|\xi_m^{(k)}-\xi_n^{(k)}|$

$+|\xi_n^{(k)}-\xi_n^{(0)}|\leqslant|\xi_m^{(k)}-\xi_n^{(k)}|+2\|x_k-x_0\|$ (*)

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1$，使得当 $k>N_1$ 时，$\|x_k-x_0\|<\varepsilon/3$，又 $\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^{(k)}\exists$，$\therefore$ $\exists N(\geqslant N_1)$，使得 $n,\ m>N$ 时，$|\xi_m^{(k)}-\xi_n^{(k)}|<\varepsilon/3$，由(*)知

$$|\xi_m^{(0)}-\xi_n^{(0)}|<\varepsilon\quad\forall m,\ n>N$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^{(0)}\exists$，即 $x_0\in c$. 所以，c 为 l^∞ 的闭子空间，从而 c 为 Banach 空间（$\because$ l^∞ 为 Banach 空间）。

c 的可分性证明（参见 § 2.4 题 9）.

26. (I) 因为 $\left\|\sum\limits_{i=n+1}^{m}x_i\right\|\leqslant\sum\limits_{i=n+1}^{m}\|x_i\|$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ 收敛，

知部分和序列 $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 中 Cauchy 列，故由 X 的完备性

知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\exists$，也即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛。

(II) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\right)$.

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=\theta$.

(III) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\exists$，因为

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

由范数的连续性，上式中令 $n\to\infty$ 得

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$$

27. 由于 $r(t)\searrow$，$r(t)>0$，且 $r(t)\in L[0,+\infty)$ 易知

$$\sum_{n=1}^{N}\|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{N} r(n) \leqslant \int_0^N r(t)\,dt$$

令$N\to\infty$，得$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| \leqslant \int_0^{+\infty} r(t)\,dt<+\infty$. 由此知$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ 收敛。由于X为 Banach 空间，由题 26（I）知$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛。

28. 由于 $m>n$ 时，$\|x_m-x_n\|\leqslant\|x_m-x_{m-1}\|+\|x_{m-1}-x_{m-2}\|+\cdots+\|x_{n+1}-x_n\|$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_{n+1}-x_n\|$收敛，知$\{x_n\}$为$X$中 Cauchy 列。由于$X$未必完备，所以，$\{x_n\}$不一定收敛。

29. $\because$ $\left\|\sum_{i=n}^{m}\frac{1}{i\ln(i+1)}e_i\right\| = \frac{1}{n\ln(n+1)}\to 0$ $(m>n$，当 $n\to\infty$ 时），因此，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}e_n$ 收敛（因为其部分和序列为 Cauchy 列，而 c_0 为 Banach 空间）。

又 $\because$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{1}{n\ln(n+1)}e_n\right\| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}$是发散的，

所以，上面级数不是绝对收敛。

易知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}e_n=\left(\frac{1}{\ln 2},\ \frac{1}{2\ln 3},\ \cdots,\right.$

$\left.\frac{1}{n\ln(n+1)},\ \cdots\right)$为级数的和。

30. 取 $x_1\in X_0$ 使得 $\|x-x_1\|<\frac{1}{2}$，则 $\|x_1\|\leqslant\|x\|+\frac{1}{2}$；

$\because\ \overline{X}_0=X$，$\therefore$ 可取 $x_2\in X_0$ 使得 $\|x-x_1-x_2\|<\frac{1}{2^2}$，则

$$\|x_2\|\leqslant\|x-x_1-x_2\|+\|x-x_1\|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}<1$$

同理可取 $x_3\in X_0$，使得 $\|x-x_1-x_2-x_3\|<\frac{1}{2^3}$，则

$$\|x_3\|\leqslant\|x-x_1-x_2-x_3\|+\|x-x_1-x_2\|<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}<\frac{1}{2}$$

继续此法，可得 $\{x_n\}\subset X_0$，使得 $\left\|x-\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|<\frac{1}{2^n}$，且

$\|x_n\|<\frac{1}{2^{n-2}}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$，由此知 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=x$，且

$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\left(\leqslant\|x\|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}+1\right)$ 收敛。

31. 必要性是显然的（$\because\ S_1(\theta)$ 为X中闭集）。

现证充分性，若 $S_1(\theta)$ 为完备的，设 $\{x_n\}$ 为 X 中 Cauchy 列，由于 $|\ \|x_m\|-\|x_n\|\ |\leqslant\|x_m-x_n\|$，可知 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|\exists$. 设 $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=a$，假定 $a=0$，则显然 $x_n\to\theta$.

若 $a\neq 0$，不妨设 $\|x_n\|\neq 0$，则 $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}\subset S_1(\theta)$ 因

$$\left\|\frac{x_m}{\|x_m\|}-\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\|=\frac{1}{\|x_m\|\|x_n\|}\|\|x_n\|x_m-\|x_m\|x_n\|$$

$$\leqslant\frac{1}{\|x_m\|\|x_n\|}(\|x_n\|\|x_m-x_n\|$$

$$+|\,\|x_n\|-\|x_m\|\,|\,\|x_n\|)\to 0 \quad (\text{当}m,\ n\to\infty\text{时})$$

也即$\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$为 $S_1(\theta)$ 中 Cauchy 列，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\|x_n\|}\exists$，

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{\|x_n\|}=x\in S_1(\theta)$，从而有

$$\frac{1}{\|x_n\|}\|x_n-ax\|=\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-\frac{a}{\|x_n\|}x\right\|\to\left\|x-\frac{a}{a}x\right\|=0$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-ax\|=0$ 即 $\{x_n\}$ 收敛，所以X为 Banach 空间。

32. 显然 $d(x,\ y)$ 满足度量公理（1）、（2）. 若 $x=y$，显然有 $d(x,\ y)=0\leqslant d(x,\ z)+(z,\ y)$；若 $x\neq y$，则

当 $x\neq z$，$z\neq y$ 时，$d(x,\ y)=\|x-y\|+1\leqslant d(x,\ z)$

$$+d(z,\ y)=\|x-z\|+1+\|z-y\|+1\ ;$$

当 $x=z$，$z\neq y$ 时，$d(x,\ y)=\|x-y\|+1\leqslant d(x,\ z)$

$$+d(z,\ y)=\|z-y\|+1=\|x-y\|+1\ ;$$

当 $x\neq z$，$z=y$时，$d(x,y)=\|x-y\|+1\leqslant d(x,z)+d(z,y)$

$$=\|x-z\|+1=\|x-y\|+1\ .$$

因此，$d(x,\ y)$ 也满足度量公理(3).

但 $d(x,\ \theta)=\begin{cases}\|x\|+1, & x\neq\theta\ ,\\ 0\ , & x=\theta\ ,\end{cases}$ 显然不满足 $d(\alpha x,\ \theta)$

$\neq|\alpha|d(x,\ \theta)$. 因此，$d$ 不是由范数决定的度量。

33. 因 $x_k=\left(1,\ \frac{1}{2}\cdots,\ \frac{1}{k},\ 0,\ 0,\ \cdots\right)\in Y$，显然，$m>n$，

$$\|x_m-x_n\|=\frac{1}{n+1}\to 0\quad (n\to\infty)$$

所以 $\{x_k\}$ 为 Cauchy 列，且令 $x_0=\left(1,\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right)$ $\in l^\infty-Y$，有 $\|x_k-x_0\|\to 0$ $(k\to\infty)$，因此，Y不是 l^∞ 的闭子空间（易证验是 l^∞ 的子空间）。（参见 § 2.4 题 7）

34. 必要性是显然的（见题26）。

充分性：设 $\{y_n\}$ 为X中任一 Cauchy 列，只要证其有收敛子列。事实上，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_k$，使得当m，$n\geqslant N_k$ 时恒有，$\|y_m-y_n\|<\varepsilon/2^k$，取 $N_1<N_2<N_3<\cdots$，则有

$$\|y_{N_{k+1}}-y_{N_k}\|+\|y_{N_k}-y_{N_{k-1}}\|+\cdots+\|y_{N_2}-y_{N_1}\|$$

$$\leqslant\frac{1}{2^k}\varepsilon+\frac{1}{2^{k-1}}\varepsilon+\cdots+\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty}\|y_{N_{k+1}}-y_{N_k}\|$收敛。因此 $\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(y_{N_{i+1}}-y_{N_i})$ $=\lim_{k\to\infty}(y_{N_{k+1}}-y_{N_1})$ 彐，即 $\{y_n\}$ 有收敛子列 $\{y_{N_k}\}$，从而 $\{y_n\}$ 收敛，即X是完备的。

35. 设 x_0，$y_0\in\bar{X}_0$，从而 彐$\{x_n\}$，$\{y_n\}\subset X_0$，使得 $x_0=\lim_{n\to\infty}x_n$，$y_0=\lim_{n\to\infty}y_n$，故$\alpha x_0+\beta y_0=\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)$，而 $\alpha x_n+\beta y_n\in X_0$，则 $\alpha x_0+\beta y_0\in\bar{X}_0$，即 $\bar{X}_0$ 为X的子空间（事实上，为X的闭子空间）。

36. 容易验证 $\|x\|=\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|$ 是 $B[a,b]$ 上的范数，若 $\{x_n\}$ 为 $B[a,b]$ 中 Cauchy 列，即$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使得当 m，$n>N$ 时恒有

$$\|x_m - x_n\| = \sup_{t \in [a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \qquad (*)$$

从而$\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$($t \in [a, b]$) 恒为 Cauchy 数列，故$\exists x(t)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) \quad t \in [a, b]$$

因 Cauchy 列必有界即$\exists$常数K，使得

$$|x_n(t)| \leqslant \sup_n \|x_n\| = \sup_n \sup_{t \in [a,b]} |x_n(t)| \leqslant K \quad \forall t \in [a, b]$$

令 $n\to\infty$，得 $|x(t)| \leqslant K \quad \forall t \in [a, b]$，因此，$x \in B[a,b]$，且由(*)（固定$n$，令 $m\to\infty$)，得

$$\|x_n - x\| \leqslant \varepsilon \quad \forall n > N$$

即 $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. 所以，$B[a, b]$是 Banach 空间。

37. $\because$ 由(2)知 $\|\theta\| = 0$；又由(2)，(3)可知 $\forall x \in X$，

$0 = \|x - x\| \leqslant \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$，$\therefore$ $\|x\| \geqslant 0$. 因此，范数公理可以换成：（Ⅰ）若 $\|x\| = 0$，必有 $x = \theta$；

（Ⅱ）$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$；（Ⅲ）$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

§ 3.2 有界线性算子

1. 易验证A，B，C都是 $R^3 \to R^2$ 的线性算子，例如 $x = (\xi_1, \xi_2)$，$y = (\eta_1, \eta_2)$，$\in R^2$，α，$\beta \in R$，恒有

$$A(\alpha x + \beta y) = A(\alpha\xi_1 + \beta\eta_1, \ \alpha\xi_2 + \beta\eta_2)$$

$$= (\alpha\xi_2 + \beta\eta_2, \ \alpha\xi_1 + \beta\eta_1)$$

$$= \alpha(\xi_2, \ \xi_1) + \beta(\eta_2, \ \eta_1) = \alpha Ax + \beta Ay$$

$$N(A)=\{\theta\},\ R(A)=R^2$$

当 $\alpha\neq 0$ 时，$N(B)=\{\theta\}$，$R(B)=R^2$；当 $\alpha=0$ 时，$N(B)=R^2$，$R(B)=\{\theta\}$.

$$N(C)=\{(0,\ \xi_2);\ \xi_2\in R\},\ R(C)=\{(\xi_1,\ 0);\ \xi_1\in R\}.$$

2. $\{Ax_1,\ \cdots,\ Ax_n\}$ 不一定为线性无关组。若 A span $\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}$ 为 n 维的，也即若 A 在 span $\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}$ 上的限制如果是 1—1 的映射，则 $\{Ax_1,\ \cdots,\ Ax_n\}$ 必为线性无关组。

3. 显然 D 是线性算子，又 $\forall x\in C^{(1)}[0,\ 1]$ 有

$$\|Dx\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|=\|x\|$$

因此，$\|D\|\leqslant 1$，即 D 为有界线性算子。

4. $x=(\xi_1,\ \xi_2)^T\in R^2$,

$$Ax=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\xi_1+\xi_2\\ \xi_1+2\xi_2\end{pmatrix},$$

$$\|Ax\|=\sqrt{(2\xi_1+\xi_2)^2+(\xi_1+2\xi_2)^2}=\sqrt{5\xi_1^2+5\xi_2^2+8\xi_1\xi_2}$$

$$=\sqrt{5+8\cdot\frac{\xi_1\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2}}\cdot\|x\|\leqslant 3\|x\|$$

$\because\quad \max[\ |\xi_1\xi_2|\ /(\xi_1^2+\xi_2^2)\ ]=\dfrac{1}{2}\qquad\therefore\quad \sup\limits_{\|x\|\neq 0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}=3$，

即 $\|A\|=3$.

5. $\forall x\in l^\infty$，$\|Ax\|=\sup\limits_n\left|\dfrac{1}{n}\xi_n\right|\leqslant\sup\limits_n|\xi_n|=\|x\|$,

易知 $A: l^\infty\to l^\infty$ 是线性算子。因而，$A\in B(l^\infty)$，且 $\|A\|\leqslant 1$，又取 $x_0=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots)\in l^\infty$，$\|x_0\|=1$，又

$$\|Ax_0\| = \sup_n \left|\frac{1}{n}\right| = 1 \leqslant \|A\|\|x_0\| = \|A\|$$

所以

$$\|A\| = 1$$

6. $A \in B(X, Y)$， $R(A)$ 未必为 Y 中的闭集。例如：

A: $l^1 \to l^1$，定义为 $Ax = \left(\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \cdots, \frac{1}{n}\xi_n, \cdots\right)$

$x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^1$. 显然，$A$ 是线性算子，且

$$\|Ax\| \leqslant \sum_1^\infty |\xi_i| = \|x\|, \text{ 所以 } \|A\| \leqslant 1 .$$

因有限数列（即除有限项非零外其余全为 0 的无穷数列）组成的线性空间 X_0 是 l^1 的稠密子空间，且显然 $X_0 \subset R(A)$，因此，$\overline{R(A)} = l^1$. 但是 $l^1 - R(A) \neq \phi$， 事实上， 例如

$x_0 = \left(1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots\right) \in l^1$，但 $x_0 \in R(A)$，因此，$R(A)$ 不是 l^1 中的闭子空间。

7. $\|A_n x\| = \left(\sum_{i=n+1}^\infty |\xi_i|^2\right)^{1/2} \leqslant \|x\| = \left(\sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^2\right)^{1/2}$

$\forall x \in l^2$， 又显然 A_n: $l^2 \to l^2$， 是线性算子。所以，$A_n \in B(l^2)$，且

$$\|A_n\| \leqslant 1$$

另一方面，取 $x_0 = (0, \cdots, 0, \underset{\text{第 } n+1 \text{ 位}}{1}, 0, 0, \cdots) \in l^2$， $\|x_0\| = 1$，

又 $\|A_n x_0\| = 1 \leqslant \|A_n\|\|x_0\| = \|A_n\|$， 所以 $\|A_n\| = 1$.

8. $\because \|Ax\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\right|$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\xi_j|$$

$$= \max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\cdot\|x\|_\infty$$

$$\|A\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \left(\overset{\text{设}}{=}\sum_{j=1}^{n}|a_{i_0 j}| = \omega\right).$$

另一方面，取 $x_0=(\xi_1^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)})$，其中

$$\xi_j^{(0)} = \operatorname{sgn} a_{i_0 j} \quad (j=1, 2, \cdots, n),$$

则 $\|x_0\|_\infty=1$，

$$\|Ax_0\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j^{(0)}\right| = \sum_{j=1}^{n}|a_{i_0 j}| = \omega$$

$$\leqslant \|A\|_\infty\|x_0\|_\infty = \|A\|_\infty$$

所以

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = \omega$$

9. $\because$ $\|Ax\|_1=\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j\right|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\ |\xi_j|$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right)|\xi_j|$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\cdot\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|$$

$$= \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\cdot\|x\|_1 \quad \forall x\in R^n.$$

$$\therefore \qquad \|A\|_1 \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}| = \omega \left(\overset{\text{设}}{=}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij_0}|\right)$$

另一方面，取 $x_0=(\xi_1^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)})$，其中 $\xi_j^{(0)}=0$，$(j\neq j_0)$，$\xi_{j_0}^{(0)}=1$，则 $\|x_0\|_1=1$，$\|Ax_0\|_1=\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j^{(0)}\right|$

$$=\sum_{i=1}^{m}|a_{ij_0}|=\omega\leqslant\|A\|_1\cdot\|x_0\|_1=\|A\|_1.$$ 因此

$$\|A\|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|=\omega$$

10. $\because$ $\|Ax\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\left|\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j\right|$

$$\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||\xi_j|$$

$$\leqslant\max_{i,j}|a_{ij}|\cdot\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|$$

$$=\max_{i,j}|a_{ij}|\cdot\|x\|_1$$

$\therefore$

$$\|A\|_{1,\infty}\leqslant\max_{i,j}|a_{ij}| \quad \left(\overset{\text{设}}{=}|a_{i_0j_0}|\right)$$

另一方面，取 $x_0=(\xi_1^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)})$，其中 $\xi_{j_0}^{(0)}=1$，$\xi_j^{(0)}=0$ $(j\neq j_0)$，则

$$\|Ax_0\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j^{(0)}\right|$$

$$=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|a_{ij_0}|=|a_{i_0j_0}|$$

$$\leqslant\|A\|_{1,\infty}\|x_0\|_1=\|A\|_{1,\infty}$$

因此

$$\|A\|_{1,\infty}=\max_{i,j}|a_{ij}|.$$

11. $\because k(s,\ t)$ 在紧集$[a,\ b]\times[a,\ b]$上连续，因此，它必一致连续，$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ 只要 $s_1,\ s_2\in[a,\ b]$，

$|s_1-s_2|<\delta$ 恒有

$$|k(s_1,\ t)-k(s_2,\ t)|<\varepsilon\quad\forall t\in[a,\ b]$$

因此

$$\begin{aligned}|Tx(s_1)-Tx(s_2)|&=\left|\int_a^b[k(s_1,\ t)-k(s_2,\ t)]x(t)dt\right|\\&\leqslant\int_a^b|k(s_1,\ t)-k(s_2,\ t)||x(t)|dt\\&\leqslant\varepsilon\int_a^b|x(t)|\,dt\end{aligned}$$

所以

$$Tx\in C[a,\ b],\ \forall x\in L^2[a,\ b]\ (\subset L[a,\ b])$$

显然T是线性算子，且又因

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b k(s,\ t)x(t)dt\right|\\&\leqslant\int_a^b\max_{a\leqslant s,\ t\leqslant b}|k(s,\ t)|\cdot|x(t)|dt\\&\leqslant\max_{a\leqslant s,\ t\leqslant b}|k(s,\ t)|\int_a^b|x(t)|\,dt\\&\leqslant\sqrt{b-a}\max_{a\leqslant s,\ t\leqslant b}|k(s,\ t)|\left(\int_a^b|x(t)|^2dt\right)^{1/2}\\&=\sqrt{b-a}\cdot\max_{s,\ t\in[a,\ b]}|k(s,t)|\cdot\|x\|,\end{aligned}$$

$$\forall x\in L^2[a,b],$$

因此，T是$L^2[a,\ b]\to C[a,\ b]$中的有界线性算子。

12. （证法 1） $N(A)=A^{-1}(\{\theta\})$ $\because$ $\{\theta\}$ 是Y中闭集，A是有界线性算子，所以是连续的，因此，$N(A)$ 是X中闭集。又因线性算子的零空间$N(A)$ 是子空间，所以，$N(A)$ 为X中闭子空间。

（证法 2） 设 $x_0\in\overline{N(A)}$，则 $\exists x_n\in N(A)$，使得 $x_n\to x_0$，由于A连续，所以$\theta=Ax_n\to\theta=Ax_0$，即$x_0\in N(A)$，故$N(A)$ 为X中闭子空间。

（证法 3） 设$\{x_n\}\subset N(A)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则由 $A\in B(X, Y)$，所以 $Ax_n=\theta\to Ax_0=\theta$，故 $x_0\in N(A)$。由此知$N(A)$ 为X的闭子空间。

13. “$\Longrightarrow$” 设$\|A_n-A\|\to 0$，Ω为X中有界集，设$\|x\|\leqslant k$，$\forall x\in\Omega$. 由于$\|A_n-A\|\to 0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使得当 $n>N$ 时恒有 $\|A-A_n\|<\frac{1}{k}\varepsilon$，从而

$$\|A_nx-Ax\|\leqslant\|A_n-A\|\|x\|<\varepsilon,\quad\forall x\in\Omega,\ n>N$$

因此，$\{A_n\}$ 在 Ω上一致收敛于A。

“$\Longleftarrow$” 设在任一有界集上$\{A_n\}$一致收敛于A，则$\{A_n\}$在X的单位球$V[\theta, 1]$上一致收敛于A，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使得当 $n>N$ 时恒有

$$\|A_nx-Ax\|=\|(A_n-A)x\|<\varepsilon/2\quad\forall x\in V[\theta, 1]$$

从而

$$\|A_n-A\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|(A_n-A)x\|<\varepsilon\quad\forall n>N$$

因此

$$\|A_n-A\|\to 0$$

14. $x_0\in$ 左 $\Longleftrightarrow\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|A_\lambda x_0\|\leqslant n$

$$\Longleftrightarrow \|A_\lambda x_0\| \leqslant n \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$\Longleftrightarrow x_0 \in \{x \in X,\ \|A_\lambda x\| \leqslant n\} \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$\Longleftrightarrow x_0 \in 右 \ .$$

15. $\because \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n A^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|A\|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |\lambda|^n$ 收敛，

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n A^n\|$收敛，由于 $B(X)$为 Banach 空间，所以，

$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ 也收敛。

16. $\because \|A^n\| \leqslant \|A\|^n$，$\|A\| < 1$，$\therefore \lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$，从而 $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$，（零算子）

17. 见《应用泛函基础》（南工版）P156 例 6 .

18. 同上题，$\because (\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{k+1}} A^k$

$\therefore$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{k+1}} \|A\|^k$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}$$

19. 因 $A + B = A(I + A^{-1}B)$，而$\|A^{-1}B\| \leqslant \|A^{-1}\| \|B\| < 1$，由题17，$(I + A^{-1}B)^{-1} \in B(X)$，显然

$$(A + B)^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1} A^{-1} \in B(X)$$

又由题18知

$$\|(A+B)^{-1}\|\leqslant\|A^{-1}\|\|(I+A^{-1}B)^{-1}\|$$
$$\leqslant\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}B\|}\leqslant\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|B\|}.$$

*20. 设$A\in X_0$，只须证 $B\in B(X)$，当$\|A-B\|$充分小时，必有 $B\in X_0$，且当$\|B-A\|\to 0$ 时，$\|B^{-1}-A^{-1}\|\to 0$.

$\because$ $B=A-(A-B)=A-AA^{-1}(A-B)$

$=A[I-A^{-1}(A-B)]$,

$\|A^{-1}(A-B)\|\leqslant\|A^{-1}\|\|A-B\|$.

$\therefore$ 当$\|A^{-1}\|\|A-B\|<1$，即 $\|A-B\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|}$时，由题19知

$$B^{-1}=[I-A^{-1}(A-B)]^{-1}A^{-1}\in B(X).$$

且

$$\|B^{-1}\|\leqslant\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|A-B\|}\qquad(*)$$

故

$$\left\{B\in B(X);\ \|A-B\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|}\right\}\subset X_0$$

因此，X_0 为开集。

又 $\because$ $B^{-1}-A^{-1}=B^{-1}(A-B)A^{-1}$

$$\|B^{-1}-A^{-1}\|\leqslant\|B^{-1}\|\|A-B\|\|A^{-1}\|$$
$$\leqslant\frac{\|A-B\|\|A^{-1}\|^2}{1-\|A-B\|\|A^{-1}\|}.$$

可知当 $\|B-A\|\to 0$ 时，$\|B^{-1}-A^{-1}\|\to 0$. 因此，映射G：

$A(\in X_0)\to A^{-1}(\in X_0)$是连续的。

21. 因 $A\in B(X,\ Y)$，$B\in B(Y,\ X)$，$R(A)=Y$，由于 $BAx=x,\quad \forall x\in X$，即 $BA=I_X$；从而 $ABAx=Ax$，记 $y=Ax$，即$ABy=y\quad \forall y\in Y$．所以 $AB=I_Y$，因此，$A^{-1}=B\in B(Y,\ X)$．

22. 反证法：若 $\forall x_0\in X$，$\sup\limits_n\|A_nx_0\|<+\infty$，由共鸣定理，必有 $\sup\limits_n\|A_n\|<+\infty$，这与 $\sup\limits_n\|A_n\|<+\infty$相矛盾。

23. 由 $A_n\xrightarrow{s}A$，知 $\forall x\in X$，$\{A_nx\}$ 为收敛点列，从而由 $\sup\limits_n\|A_nx\|<+\infty$．共鸣定理知 $\sup\limits_n\|A_n\|<+\infty$．

24. 由本节题 7 知 $\|A_n\|=1$，所以，$\|A_n-0\|\nrightarrow 0$．又 $\forall x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^2$，显然 $\|A_nx-0x\|=\left(\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0$ （当 $n\to\infty$ 时），即$A_n\xrightarrow{s}0$．

25. 由 Riesz 引理，$\forall n$，$\exists x_n\in X-Y$，使得

$$\|x_n\|=1,\quad d(x_n,\ Y)\geqslant 1-\frac{1}{n}$$

由于 $\{x_n\}\subset S_1(\theta)$ （单位球面），$S_1(\theta)$ 作为有限维空间 X 中的有界闭集必为紧集，从而存在 $x_0\in S_1(\theta)$，使得 $\|x_0\|=1$，$d(x_0,\ Y)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,\ Y)\geqslant 1$（注）。又 $\theta\in Y$，所以，$d(x_0,\ Y)=1$．

26. 因X与Y为等距同构是指存在线性算子 $A:X\to Y$，它是满射，且 $\|Ax\|=\|x\|\quad \forall x\in X$，显然$A$是拓扑同构映射，

（注） 见第二章 §2.3 中题 6。

即X与Y是拓扑同构的。

拓扑同构的线性赋范空间未必是等距同构的，例如

$$X=\{x=(\xi_1,\ \xi_2)\in R^2;\ \|x\|_1=|\xi_1|+|\xi_2|\},$$

$$Y=\{x=(\xi_1,\ \xi_2)\in R^2;\ \|x\|_2=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\}$$

显然X与Y是拓扑同构的。假设有等距同构映射 A：$X\to Y$，

A用距阵$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$表示。由于$A$可逆，故必有

$$\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0 \qquad (1)$$

另一方面，由于A为等距映射，故 $\forall x\in X$ 有

$$\|Ax\|_2=\|x\|_1$$

令 $x=(1,\ 0)$，得 $\qquad a_{11}^2+a_{21}^2=1 \qquad (2)$

令 $x=(0,\ 1)$，得 $\qquad a_{12}^2+a_{22}^2=1 \qquad (3)$

令 $x=(1,\ 1)$，得

$$(a_{11}+a_{12})^2+(a_{21}+a_{22})^2=4 \qquad (4)$$

由2(2)+2(3)−(4)得

$$(a_{11}-a_{12})^2+(a_{21}-a_{22})^2=0$$

所以

$$a_{11}=a_{12},\ \ a_{21}=a_{22}$$

因此

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{11}a_{22}=0$$

与(1)式矛盾。

27. 由于X，Y拓扑同构，所以有线性的满射T：$X\to Y$及常数 $\mu_i>0$，使得

$$\mu_1\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant\mu_2\|x\| \quad \forall x\in X$$

设X为 Banach 空间，$\{y_n\}$为Y中 Cauchy 列，则$\exists x_n\in X$使得 $y_n=Tx_n$. 由于

$$\|x_m-x_n\|\leqslant\frac{1}{\mu_1}\|Tx_m-Tx_n\| =\frac{1}{\mu_1}\|y_m-y_n\|$$

可知$\{x_n\}$为X中 Cauchy 列。由X完备，知$\exists x_0\in X$使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$，因此，由 $\|y_n-Tx_0\|=\|Tx_n-Tx_0\|$ $\leqslant\mu_2\|x_n-x_0\|$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-Tx_0\|=0$，$Tx_0\in Y$. 即Y也为 Banach 空间。

同理可证Y为 Banach 空间，则X也完备。

28. 仍然成立。事实上，若 $\dim Y<+\infty$，则由于Y为X的真子空间，取$x^*\in X-Y$，记 span $\{Y, x^*\}=X_0$，则 $\dim X_0=\dim Y+1<+\infty$，$Y$ 为 X_0 的真闭子空间。由本节题25结论，知$\exists x_0\in X_0$，使得 $\|x_0\|=1$，且 $d(x_0, Y)=1$.

29. 由 $\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|=M<+\infty$，$\forall x\in l^\infty$ 有

$$|\eta_i|=\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\right|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|\cdot\sup_j|\xi_j|\leqslant M\|x\| \quad \forall i$$

所以，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots)\in l^\infty$，显然$A$是$l^\infty\to l^\infty$的有界线性算子，且由 $\|Ax\|=\sup\limits_i|\eta_i|\leqslant M\|x\|$，知

$$\|A\|\leqslant M$$

另一方面，$\forall n$，$\exists i_n$，使得 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{i_nj}|\geqslant M-\frac{1}{n}$. 取

$x_0=(\xi_1^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)}, \cdots)\in l^\infty$，其中 $\xi_j^{(0)}=\operatorname{sgn}a_{i_nj}$，显

然 $\|x_0\|=1$,

$$M-\frac{1}{n}\leqslant\|Ax_0\|\leqslant\|A\|\cdot\|x_0\|=\|A\|$$

所以

$$M-\frac{1}{n}\leqslant\|A\|\leqslant M\quad\forall n$$

故可知

$$\|A\|=\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|=M.$$

30. $\because\ \sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\right|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}||\xi_j|$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}||\xi_j|\leqslant M\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|=M\|x\|$$

$\forall x\in l^1$, $\therefore\ y\in l^1$, 且 $\|y\|=\|Ax\|\leqslant M\|x\|$, 故 $A\in B(l^1)$.

又 $\forall n$, $\exists j_n$, 使得 $M-\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij_n}|$, 取 $x_0=e_n$ (即第 n 项为 1 其余全为零的数列), 则 $\|x_0\|=1$, 且

$$M-\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij_n}|=\|Ax_0\|\leqslant\|A\|\,\|x_0\|=\|A\|$$

由此得

$$M-\frac{1}{n}\leqslant\|A\|\leqslant M\quad\forall n$$

因此

$$\|A\|=\sup_j\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|=M.$$

31. $\because |\eta_i| = |\alpha_i||\xi_i|$, $\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i| = \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i||\xi_i|$

$\leqslant \sup_i |\alpha_i| \cdot \|x\|$, $\forall x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^1$ $\therefore$ $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n, \cdots) \in l^1$.

且$\because$

$$\|A\| \leqslant \sup_i |\alpha_i| \cdot \|x\|$$

$\therefore$

$$\|A\| \leqslant \sup_i |\alpha_i| \qquad (1)$$

另一方面，$\forall n$，$\exists n_i$，使得 $|\alpha_{n_i}| > \sup_i |\alpha_i| - \frac{1}{n}$ 取 $x_0 = e_{n_i}$（第 n_i 项为 1，其余都为 0 的数列），$\|x_0\| = 1$，且

$$\|Ax_0\| = |\alpha_{n_i}| \leqslant \|A\|\|x_0\| = \|A\|$$

因此

$$\sup_i |\alpha_i| - \frac{1}{n} \leqslant \|A\| \quad \forall n$$

所以

$$\sup_i |\alpha_i| \leqslant \|A\|$$

由（1）得

$$\|A\| = \sup_i |\alpha_i|$$

易知A是 l^1 到 l^1 的线性算子，所以 $A \in B(l^1)$.

注 设 $\alpha_i = a_{ii}$，$a_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$，则 (a_{ij}) 为无穷矩阵，

满足 $\sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| = \sup_i |\alpha_i| < +\infty$ 且 $y = Ax$，

$x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^1$，$y = (\eta_1, \cdots, \eta_n, \cdots)$，

$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j=\alpha_i\xi_i$. 由题30得本题结论成立。

显然 $A^{-1}x=\left(\frac{1}{\alpha_1}\xi_1,\ \frac{1}{\alpha_2}\xi_2,\ \cdots,\ \frac{1}{\alpha_n}\xi_n,\ \cdots\right)$,

$x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots)\in l^1$, 可知$A^{-1}$存在必须$|\alpha_i|>0$, $\forall i$、

若 $A^{-1}\in B(l^1)$,由上知必须 $\|A^{-1}\|=\sup_i\left|\frac{1}{\alpha_i}\right|<+\infty$,

即 $\inf_i|\alpha_i|>0$.

反之, 若 $\inf_i|\alpha_i|>0$, 则 $\sup_i\left|\frac{1}{\alpha_i}\right|<+\infty$, 从而必 $A^{-1}\in B(l^1)$.

32. 显然A是线性的, 不妨设k为自然数, 由于

$$|\eta_i|=\left|\sum_{j=i-k}^{i+k}a_{ij}\xi_j\right|\leqslant a\sum_{j=i-k}^{i+k}|\xi_j|$$

$$\leqslant a\cdot(2k+1)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=i-k}^{i+k}|\xi_i|^p\right)^{1/p}\quad(i=k+1,\ k+2,\ \cdots),$$

由此易知

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{1/p}\leqslant a(2k+1)^{\frac{1}{e}}(2k+1)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right)^{1/p}$$

$$=a(2k+1)\|x\|\quad\forall x\in l^p$$

所以 $A\in B(l^p)$, 且 $\|A\|\leqslant(2k+1)a$.

33. "$\Longrightarrow$" 由共鸣定理知(Ⅰ)成立, 而(Ⅱ)自然成立。

"$\Longleftarrow$" 设$\|A\|$, $\|A_n\|<M$ (常数) $\forall n$, 任 $x\in X$, 由于 $\overline{D}=X$, 知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\ y\in D$, 使得

$$\|x-y\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}$$

$\because$ $A_n y \to Ay$，故$\exists\ N$，使得 $n>N$ 时恒有

$$\|A_n y - Ay\| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

从而 $n>N$ 时

$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \|A_n x - A_n y\| + \|A_n y - Ay\| + \|Ay - Ax\| < \varepsilon$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0 \quad \forall x \in X \ .$$

34. $d(y,\ M) = \inf\left\{\|y-z\|;\ \ z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in M\right\} \overset{记}{=} d$.

故$\exists\ z_n \in M$，使得 $\|y - z_n\| \to d$，又由

$$\|z_n\| \leqslant \|y\| + \|y - z_n\| \ -$$

知$\{z_n\}$为M中有界点列，由于$\dim M \leqslant n$，故 $\{z_n\}$ 为列紧集，因此，存在收敛子列 $\{z_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = x$，由于$M$为有限维子空间，故必为$X$的闭子空间。因此，$x \in M$，即 $\exists$ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，使得 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$，且

$$y - x = \lim_{k\to\infty} (y - z_{n_k})$$

故

$$\|y - x\| = \lim_{k\to\infty} \|y - z_{n_k}\| = \lim_{n\to\infty} \|y - z_n\| = d(y,\ M) \ .$$

35. 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{x\neq y} \dfrac{\|A^n(x) - A^n(y)\|}{\|x-y\|} < +\infty$，对 $k(<1)>0$

故存在 n_0 使得

$$\sup_{x\neq y} \frac{\|A^{n_0}(x) - A^{n_0}(y)\|}{\|x-y\|} \leqslant k < 1$$

从而

$$d(A^{n_0}(x),\ A^{n_0}(y))\leqslant kd(x,\ y)\quad \forall x,\ y\in X$$

由于X为完备的，故由§2.5定理 2 知存在唯一不动点$x_0\in X$，使得 $A(x_0)=x_0$.

36. 由于$\overline{Y}\subsetneqq X$，用 Riesz 引理，存在 $x_n\in X$ 使得

$$\|x_n\|=1,\quad 且\ d(x_n,\ Y)>1-\frac{1}{n}$$

因此

$$\|x_n\|=1\geqslant d(x_n,\ Y)>1-\frac{1}{n}$$

$$d(x_n,\ Y)\to 1\ .$$

37. 充分性显然成立，现证必要性。因X为无穷维的，任取 $x_1\in X$，使得 $\|x_1\|=1$，令 $E_1=\mathrm{span}\{x_1\}$，由于E_1为X的真闭子空间，由题 28 知存在 $x_2\in X$ 使得 $\|x_2\|=1$，且 $d(x_2,\ E_1)=1$，从而 $\|x_2-x_1\|\geqslant 1$，令 $E_2=\mathrm{span}\{x_1,\ x_2\}$，因$E_2$为$X$的真闭子空间，故存在$x_3\in X$，使得

$$\|x_3\|=1，且\ d(x_3,\ E_2)=1，从而$$

$$\|x_3-x_1\|\geqslant 1,\quad \|x_3-x_2\|\geqslant 1\ .$$

依此法继续下去可得 $\{x_n\}\subset X$，使得 $\|x_n\|=1\quad \forall n$，且

$$\|x_m-x_n\|\geqslant 1\quad \forall m\neq n\ .$$

§ 3.3 有界线性泛函与共轭空间

1. 显然$g: C[a,\ b]\to R$是线性的，又 $\forall x\in C[a,\ b]$，

$$|g(x)|=|x(t_0)|\leqslant \max_{a<t\leqslant b}|x(t)|=\|x\|,\ \therefore\ \|g\|\leqslant 1,$$

$g\in(C[a,\ b])^*$. 又取 $x_0(t)\equiv1$，则 $\|x_0\|=1$，且 $g(x_0)=1\leqslant\|g\|\|x_0\|=\|g\|$. 因此，$\|g\|=1$.

2. 显然 f 是线性泛函. 又 $\forall x\in C[a,\ b]$，

$$|f(x)|=\left|\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)}x(t)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2}(b-a)\|x\|$$

$\therefore\quad \|f\|\leqslant\frac{1}{2}(b-a)$，故 $f\in(C[a,\ b])^*$.

若取 $x_0(t)\equiv1$，则 $\|x_0\|=1$，$|f(x_0)|=\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)}1\cdot dt$

$=\frac{1}{2}(b-a)\leqslant\|f\|\|x_0\|=\|f\|$. $\therefore\ \|f\|\geqslant\frac{1}{2}(b-a)$. 因此

$\|f\|=\frac{1}{2}(b-a)$.

3. 显然 $f:C[-1,\ 1]\to R$ 是线性泛函，又

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant\left|\int_{-1}^{0}x(t)\,dt\right|+\left|\int_0^1x(t)\,dt\right|\\&\leqslant\int_{-1}^{0}|x(t)|dt+\int_0^1|x(t)|dt\\&\leqslant\|x\|+\|x\|=2\|x\|\quad\forall x\in C[-1,\ 1]\end{aligned}$$

故 $f\in([-1,\ 1])^*$，且 $\|f\|\leqslant2$.

令 $x_n(t)=\begin{cases}1, & t\in\left[-1,\ -\frac{1}{n}\right]\\ -nt, & t\in\left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)\\ -1, & t\in\left[\frac{1}{n},\ 1\right]\end{cases}$ 显然 $x_n\in C[-1,1]$，

$\|x_n\|=1$ ，

$$f(x_n)=\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}dt-\int_{-\frac{1}{n}}^{0}nt\,dt+\int_0^{\frac{1}{n}}nt\,dt+\int_{\frac{1}{n}}^{1}dt=2-\frac{1}{n}$$

$$|f(x_n)| = 2 - \frac{1}{n} \leqslant \|f\| \|x_n\| = \|f\| \quad \forall n$$

故

$$\|f\| \geqslant 2$$

因此

$$\|f\| = 2$$

4. 显然 f 是线性泛函。又 $\forall x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^\infty$,

$$|f(x) = |\xi_{n_0}| \leqslant \sup_n |\xi_n| = \|x\|$$

所以 $\|f\| \leqslant 1$，故 $f \in (l^\infty)^*$

若取 $x_0 = e_{n_0}$（即第 n_0 位为 1，其余全为 0 的数列），则 $\|x_0\| = 1$，且 $|f(x_0)| = 1 \leqslant \|f\| \|x_0\| = \|f\|$. 因而，有 $\|f\| = 1$

5. $\because$ $|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |x(t)| \cdot |y(t)| dt$

$$\leqslant \int_a^b |y(t)| dt \cdot \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$$

$$= \int_a^b |y(t)| dt \cdot \|x\|$$

$\therefore$

$$\|f\| \leqslant \int_a^b |y(t)| dt < +\infty$$

又显然 f 为线性的，因此，$f \in (C[a, b])^*$.

6. 由§ 3.2 中题 12 知，只须证充分性，设 $N(f)$ 为 X 的闭子空间，假定 f 为无界线性泛函，则 $\forall n$，$\exists x_n \in S_1(\theta)$（单位球面）。使得

$$|f(x_n)| \geqslant n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

令

$$y_n = \frac{x_n}{f(x_n)}$$

则

$$\|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{|f(x_n)|} \geqslant \frac{1}{|f(x_n)|} \leqslant \frac{1}{n}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \theta$$

又

$$f(y_n - y_1) = \frac{f(x_n)}{f(x_n)} - \frac{f(x_1)}{f(x_1)} = 0$$

故 $y_n - y_1 \in N(f)$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - y_1) = -y_1 \in N(f)$.

但

$$f(-y_1) = -f(y_1) = -1 \neq 0$$

与

$$-y_1 \in N(f)$$

相矛盾，所以，$f \in X^*$.

7. $\because \forall x \in X$，由于

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(x_0)}f(x_0) = 0$$

知

$$x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 = y_0 \in N(f)$$

因此，$x = y_0 + \alpha_0 x_0$，其中 $\alpha = \frac{f(x)}{f(x_0)} \in K$，$y_0 \in N(f)$.

若 $x = y_1 + \beta x_0$，其中 $\beta \in K$，$y_1 \in N(f)$.

则 $f(x) = \beta f(x_0)$，所以 $\beta = \frac{f(x)}{f(x_0)} = \alpha$，从而 $y_1 = y_0$，

即表示是唯一的。

8. 由于 $f(x)=(\xi_1,\ \xi_2)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\quad \forall x=(\xi_1,\ \xi_2)\in R^2$，

显然 f 是 $R^2\to R$ 的线性泛函，且 $|f(x)|=|\alpha\xi_1+\beta\xi_2|$

$\leqslant\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\|x\|$，所以，$f\in(R^2)^*$.

且取 $x_0=(\alpha,\ \beta)\in R^2$，得

$$f(x_0)=(\alpha^2+\beta^2)\leqslant\|f\|\|x_0\|=\|f\|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$\therefore\quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\leqslant\|f\|$，从而 $\|f\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

令 $F(y)=\alpha\xi_1+\beta\xi_2+0\xi_3=\alpha\xi_1+\beta\xi_2\quad \forall y=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$

$\in R^3$，显然仿上面方法知 $\|F\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\|f\|$，$F\in(R^3)^*$，且

$$F(x)=f(x)\qquad \forall x\in R^2$$

因此，F 为 f 到 R^3 上的保范延拓。

9. 由于 $f(x)=f(y)\quad \forall f\in X^*$，因此，

$$f(x-y)=0\quad \forall f\in X^*$$

因此，$\|x-y\|=\sup\limits_{f\neq\theta}\dfrac{|f(x-y)|}{\|f\|}=0$. 即 $x=y$

注 也可用反证法及用 Hahn-Banach 定理推论证之。

10. $\because\ \|x_0\|=\sup\limits_{f\neq\theta}\dfrac{|f(x_0)|}{\|f\|}=\sup\limits_{f\neq\theta}\left|\dfrac{1}{\|f\|}f(x_0)\right|\leqslant C$

（注意 $\dfrac{1}{\|f\|}f\in S_1^*$ ）

11. X 自反；即 $J(X)=X^{**}$，因此，X 与 X^{**} 是等距同构的，从而它们有相同的完备性，而 X^{**} 是完备的。所以，X 为 Banach 空间。

*12. 设 J： $X\to X^{**}=J(X)$ 为典则映射： 现证 X^* 也自反。任取 $x^{***}\in X^{***}$，令 $x^{*}=x^{***}\circ J$：$X\to K$， 显然 $x^*\in X^*$。因为 $x^{***}(Jx)=x^*(x)=(Jx)(x^*)$， 及 $R(J)=X^{**}$， 因此， $x^{***}(x^{**})=x^{**}(x^*)\quad\forall x^{**}\in X^{**}$，由此知 $J_1x^*=x^{***}$， 其中 J_1：$X^*\to X^{***}$ 为典则映射， 且 $R(J_1)=X^{***}$。所以 X^* 为自反空间。

*13. 设 X^* 自反， 假定 Banach 空间X不自反，即 $J(X)=X_0$ 为 X^{**} 的真闭子空间（这是因为 J 是X到X_0上的等距同构映射，且X完备，因此 X_0 为闭的)。由 Hahn-Banach 定理推论 3.3.1 必 $\exists\ x_0^{**}\in X^{***}$，满足

$$\|x_0^{**}\|=1，\text{且 } x_0^{**}(x^{**})=0\quad\forall x^{**}\in J(X)，$$

因 $J_1(X^*)=X^{***}$， 故 $\exists\ x_0^*\in X^*$， 使得

$$\|x_0^*\|=\|x_0^{***}\|=1，\quad J_1x_0^*=x_0^{***}$$

因而有

$$x_0^{**}(x^{**})=x^{**}(x_0^*)\qquad\forall x^{**}\in X^{**}$$

但是

$$x_0^*(x)=(Jx)(x_0^*)=x_0^{**}(Jx)=0\quad\forall x\in X$$

因此， $x_0^*=\theta\in X^*$， 这与 $\|x_0^*\|=1$ 矛盾，所以，X必自反。

14. 假设Y为X的真闭子空间，那么由 Hahn-Banach 定理推论 3.3.1， $\exists\ x_0\in X-Y$， $f\in X^*$， 满足

$$f(x)=0\quad\forall x\in Y\qquad(1)$$

$$f(x_0)=d(x_0,\ Y)>0\qquad(2)$$

由假设及(1)得 $f(x)=0\quad\forall x\in X$，从而 $f(x_0)=0$，与(2)矛盾。因此，必有 $Y=X$。

15. 由 Hahn-Banach 定理推论，3.3.2，$\exists F \in X^*$，满足：$F(x_0) = \|x_0\|$，且 $\|F\| = 1$.

令 $f = \frac{1}{\|x_0\|} F$，显然，$f \in X^*$，$f(x_0) = 1$，$\|f\| = \frac{1}{\|x_0\|}$。

*16. 令 $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$，$\forall x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in c_0$，

其中 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots) \in l^1$，由于 $\forall x \in c_0$ 有

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i\right| \leqslant \sup_i |\xi_i| \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i| = \|y\| \|x\|$$

从而可知 $f \in c_0^*$. $\|f\| \leqslant \|y\|$.

反之，$\forall f \in c_0^*$，取 $e_n = (0, \cdots, 0, \underset{\text{第 } n \text{ 位}}{1}, 0, \cdots) \in c_0$，

由 § 3.1 题21知 $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in c_0$ 有

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$$

令 $\eta_i = f(e_i) \quad (i = 1, 2, \cdots)$

$y = (\eta_1, \cdots, \eta_n, \cdots)$

$x_n = (\operatorname{sgn} \eta_1, \cdots, \operatorname{sgn} \eta_n, 0, 0, \cdots) \in c_0$

则 $\|x_n\| = 1, \quad x_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} \eta_i \, e_i$

$$|f(x_n)| = \left|f\left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} \eta_i \, e_i\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} \eta_i \, f(e_i)\right| = \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|$$

$$\leqslant \|f\| \|x_n\| = \|f\| \quad \forall n$$

因此， $\|y\|=\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|\leqslant\|f\|$，故 $y\in l^1$.

由 $\forall x=(\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots)\in c_0$，有

$$f(x)=f\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i\Big)=f\Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\Big)$$

$$=\lim_{n\to\infty}f\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i$$

由前面讨论知有 $\|f\|\leqslant\|y\|$，从而 $\|f\|=\|y\|$.

结论：c_0 上任一有界线性泛函都可表示成

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i \quad \forall x=(\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots)\in c_0$$

其中 $y=(\eta_1, \cdots, \eta_n, \cdots)\in l^1$. 且 $\|f\|=\|y\|$. 又T：$f\in c_0^*\to y\in l^1$ 是线性的等距的满射。因而， $c_0^*=l^1$.

*17. 令 $e_n=(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$，显然 $\forall x=(\xi^1, \cdots, \xi_n, \cdots)\in l^p$，有

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$$

设 $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i$， $\forall x=(\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots)\in l^p$

其中 $y=(\eta_1, \cdots, \eta_n, \cdots)\in l^q$，则由 Hölder 不等式

$$|f(x)|=\Big|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i\Big|$$

$$\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\Big)^{1/q}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\Big)^{1/p}=\|y\|\,\|x\|$$

可知 $f\in(l^p)^*$，且

$$\|f\|\leqslant\|y\| \tag{1}$$

反之，任一$f\in(l^p)^*$，令 $f(e_i)=\eta_i$，$(i=1,\ 2,\ \cdots)$

$$y=(\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_n,\ \cdots)$$

下证：$y\in l^q$，且 $f(x)=\sum_{i=1}\xi_i\eta_i$，$\forall x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^p$

及有 $\|f\|=\|y\|$．令

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^{q-1}\operatorname{sgn}\eta_i e_i\quad\in l^p$$

则

$$f(x_n)=\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^{q-1}\operatorname{sgn}\eta_i f(e_i),$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q\leqslant\|f\|\cdot\|x_n\|$$

由于

$$\|x_n\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^{(q-1)p}\Big)^{1/p}=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q\Big)^{1/p},$$

因此

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^q\Big)^{1/q}\leqslant\|f\|\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\|y\|=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\Big)^{1/q}\leqslant\|f\|,\ y\in l^q,$$

令 $Tf=y$，T：$(l^p)^*\to l^q$，则

$$\|y\| = \|Tf\| \leqslant \|f\|$$

由(1)得

$$\|y\| = \|Tf\| = \|f\| .$$

显然T是线性算子，且为满射，故为$(l^p)^*$到l^q上的等距同构映射，因此$(l^p)^* = l^q$.

18.（1）设 $z_1 = \alpha_1 x_0 + y_1$， $z_2 = \alpha_2 x_0 + y_2 \in Y_0$， 其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in K$， y_1， $y_2 \in Y$，则$\forall \alpha$，$\beta \in K$，有$\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$，从而有

$$\alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha(\alpha_1 x_0 + y_1) + \beta(\alpha_2 x_0 + y_2)$$

$$= (\alpha\alpha_1 + \beta\alpha_2) x_0 + (\alpha y_1 + \beta y_2) \in Y_0$$

因此，Y_0为X的子空间。

设 $z_0 \in Y_0$，则 $\exists \{z_n\} \subset Y_0$，使得 $z_n \to z_0$. 设

$$z_n = \alpha_n x_0 + y_n, \ \alpha_n \in K, \ y_n \in Y$$

则

$$\|z_m - z_n\| = \|(\alpha_m - \alpha_n) x_0 + (y_m - y_n)\| \to 0 \quad (m, n \to \infty)$$

$\because$ $\|(\alpha_m - \alpha_n) x_0 + (y_m - y_n)\|$ （不妨设 $\alpha_m \neq \alpha_n$）

$$= |\alpha_m - \alpha_n| \left\| x_0 + \frac{1}{(\alpha_m - \alpha_n)} (y_m - y_n) \right\|$$

$$\geqslant |\alpha_m - \alpha_n| d(x_0, Y), \ d(x_0, Y) > 0,$$

知$\{\alpha_n\}$必为 Cauchy 数列，故 $\exists \alpha_0 \in K$，使得 $\alpha_n \to \alpha_0$.

$\because$ $| \|(\alpha_m - \alpha_n) x_0\| - \|y_m - y_n\| |$

$$\leqslant \|(\alpha_m - \alpha_n) x_0 + (y_m - y_n)\|$$

故$\{y_n\}$也为 Cauchy 列，由于Y为 Banach 空间X的闭子空

间，故Y完备。因此存在 $y_0 \in Y$，使 $y_n \to y_0$，则 $z_n = \alpha_n x_0 + y_n \to z_0 = \alpha_0 x_0 + y_0 \in Y_0$. 因此，$Y_0$ 为闭子空间。

（2）设 $z = \alpha x_0 + y_1 = \beta x_0 + y_2 \in Y_0$，其中 $\alpha, \beta \in K$，$y_1, y_2 \in Y$，则 $(\alpha - \beta) x_0 + (y_1 - y_2) = \theta$，其中 $y_1 - y_2 \in Y_0$，$(\alpha - \beta) \in K$. 由于 $x_0 \in Y_0$，若 $y_1 - y_1 \neq \theta$，则由于 x_0 与 $y_1 - y_2$ 线性无关，因此 $\alpha - \beta = 0$，$1 = 0$，矛盾，故必有 $y_1 - y_2 = \theta$，$\alpha - \beta = 0$，所以，$z \in Y_0$ 的表示是唯一的。

$x = \alpha x_0 + y \in Y_0$，$f(x) = \alpha$，$f: Y_0 \to K$ 显然是线性的，且 $x_n = \alpha_n x_0 + y_n \to z = \alpha_0 x_0 + y_0$ 时，由（1）知 $\alpha_n \to \alpha_0$，$y_n \to y_0$，从而 $f(x_n) = \alpha_n \to \alpha_0 = f(z)$. 因此，$f$ 是 Y_0 上的连续泛函，故 $f \in Y_0^*$.

19. 显然 $A: X \to Y$ 是线性算子，因为

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \to \infty} A_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{n \to \infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) \\ &= \alpha A x + \beta A y \quad \forall x, y \in X, \ \alpha, \beta \in K \end{aligned}$$

又由于 X 为 Banach 空间，由共鸣定理知

$$M = \sup_n \|A_n\| < +\infty$$

从而 $\|Ax\| = \lim_{n \to \infty} \|A_n x\| \leqslant \sup_n \|A_n\| \cdot \|x\| = M\|x\| \quad \forall x \in X$，

故 $A \in B(X, Y)$.

20. $\because \forall f \in X^*$，$\{f(x_n)\}$ 为有界数列 .设

$$\sup_n |f(x_n)| \leqslant M_f < +\infty$$

又因 $|f(x_n)| = |(Jx_n)(f)|$，故有 $|(Jx_n)(f)| \leqslant M_f$ $\forall f \in X^*$，其中 $J: X \to X^{**}$ 是典则映射，X^* 为 Banach 空间，由共鸣定理，有 $\sup_n \|Jx_n\| = \sup_n \|x_n\| < +\infty$. 因此，

$\{\|x_n\|\}$是有界的。

21. (Ⅰ)$\Longrightarrow$(Ⅱ) 设 $\sup\limits_n \|A_n\| \leqslant M < +\infty$，则 $\forall x \in X$

$$\|A_n x\| \leqslant \|A_n\| \ \|x\| \leqslant M \|x\| \quad \forall n$$

故对每个 $x \in X$，$\{\|A_n x\|\}$ 是有界数列。

(Ⅱ)$\Longrightarrow$(Ⅲ) $\because$ $\forall x \in X$，$g \in Y^*$，若 $\{\|A_n x\|\}$ 都为有界数列，设

$$\sup_n \|A_n x\| \leqslant M_x < +\infty$$

由

$$|g(A_n x)| \leqslant \|g\| \ \|A_n x\|$$

$$\leqslant \|g\| M_x \quad \forall g \in Y^*, \ \forall n$$

得 $\{g(A_n x)\}$ 必为有界数列。

(Ⅲ)$\Longrightarrow$(Ⅰ) 设 J_1：$Y \to Y^{**}$ 为典则映射，故

$$|g(A_n x)| = |J_1(A_n x)(g)|$$

$$\leqslant \|g\| M_x < +\infty, \ \forall g \in Y^*, \ x \in X$$

Y^*完备，由共鸣定理：$\forall x \in X$ 有

$$\sup_n \|A_n x\| = \sup_n \|J_1(A_n x)\| < +\infty$$

又由X的完备性及共鸣定理，知

$$\sup_n \|A_n\| < +\infty$$

22. 由17题 $(l^2)^* = l^2$，$\eta_n = f(e_n)$，$f \in X^*$，则

$$y = (\eta_1, \ \cdots, \ \eta_n, \ \cdots) \in l^2,$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} f(e_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = f(\theta) = 0$，$\quad \forall f \in (l^2)^*$ 即 $\{e_n\}$ 弱

收敛于 $\theta=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots)\in l^2$.

显然 $\|e_n-\theta\|=\|e_n\|=1\not\to 0$，因此，$e_n\overset{\|\cdot\|}{\not\to}\theta$.

23. 由题16 $c_0^*=l^1$，且$f\in l^1=c_0^*$，有 $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^1$ 使得

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i,\quad \forall x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots)\in c_0$$

因此，$e_n(x)=\xi_n,\quad \forall x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots)\in c_0$ 故

$\lim\limits_{n\to\infty}e_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0=\theta(x)$ （θ 为 c_0 上零泛函，即 l^1 中零元素），即 $e_n\xrightarrow{w^*}\theta$.

又因 $(l^1)^*=l^\infty$，取 $F\in(l^1)^*$，假设它对应于 l^∞ 中元素 $y=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots)$，则 $F(e_n)=1\not\to 0=\theta(e_n)$. 因此，$e_n\overset{w}{\not\to}\theta$.

24. 若 $\|x_n-x\|\to 0$，由于 $\forall f\in X^*$，

$$|f(x_n)-f(x)|=|f(x_n-x)|$$

$$\leqslant\|f\|\cdot\|x_n-x\|\to 0\quad (n\to\infty)$$

知 $x_n\xrightarrow{w}x$.

25. $\because\ x_n\xrightarrow{w}x$，即 $\forall f\in X^*$，$f(x_n)\to f(x)$

设 $g\in Y^*$，由于 $A\in B(X,Y)$，易知 $g\circ A$ 是X上的连续线性泛函，故 $\lim\limits_{n\to\infty}g(Ax_n)=g(Ax)\ \ \forall g\in Y^*$. 也即 $\{Ax_n\}$ 在 Y 中弱收敛于Ax .

26. 反证法：假定$\{x_n\}$的弱极限 $x_0\in M=\overline{\operatorname{span}\{x_n\}}$ 由于M 为闭子空间，故 $d(x_0,\ M)=d>0$，由 Hahn-Banach 定理推论 3.3.1 $\exists\ f\in X^*$，使得

$$f(x)=0 \quad \forall x\in M,\ f(x_0)=d>0,$$

从而有 $f(x_n)=0\to f(x_0)=0$，这与 $f(x_0)=d>0$ 矛盾。因此，必有 $x_0\in M$.

27. $\because \{f_n(x)\}$ 都是收敛数列，故对每个 x，

$$\sup_n |f_n(x)|\leqslant M_x<+\infty$$

由于X完备，用共鸣定理，有

$$\sup_n \|f_n\|<+\infty$$

仿题19易知 $f_0(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$，$x\in X$，$f_0$ 为线性泛函，

又

$$|f_0(x)|=\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|$$

$$\leqslant \sup_n \|f_n\|\cdot\|x\| \quad \forall x\in X$$

故

$$\|f_0\|\leqslant \sup_n \|f_n\|,\ f_0\in X^*$$

即

$$f_n \xrightarrow{w^*} f_0$$

*28. 设 $\|f_n\|\leqslant M$，$\forall n$，由于X可分，故有可列稠密子集 $\{x_n\}$：x_1，x_2，…，x_n，….

$\because$ $|f_n(x_1)|\leqslant \|f_n\|\,\|x_1\|\leqslant M\|x_1\|$.

$\therefore$ $\{f_n(x_1)\}$是有界数列，故必有收敛子列

$\{f_{1n}(x_1)\}$：$f_{11}(x_1)$，$f_{12}(x_1)$，…，$f_{1n}(x_1)$，…

同理由于 $f_{1n}\ x_2)|\leqslant M\ \|x_2\|$，$\forall n$，故 $\{f_{1n}(x_2)\}$ 为有界数列，因此有收敛子列

$\{f_{2n}(x_2)\}$: $f_{21}(x_2)$, $f_{22}(x_2)$, $\cdots$, $f_{2n}(x_2)$, $\cdots$

依此继续下去，可得如下泛函序列：

$$f_{11},\ f_{12},\ f_{13},\ \cdots,\ f_{1k},\ \cdots$$

$$f_{21},\ f_{22},\ f_{23},\ \cdots,\ f_{2k},\ \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$f_{k1},\ f_{k2},\ f_{k3},\ \cdots,\ f_{kk},\ \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

其中 $\{f_{ik}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{f_{(i-1)k}\}_{k=1}^{\infty}$ 的子列，故 $\{f_{ik}\}_{k=1}^{\infty}$ 在 x_1, $\cdots$, x_{i-1} 等点处都是收敛的，即 $\lim\limits_{k\to\infty} f_{ik}(x_j)$ $\exists$ $\forall j=1$, 2, $\cdots$, $i-1$.

现取对角线元素序列：

$$\{f_{kk}\}:\ f_{11},\ f_{12},\ \cdots,\ f_{kk},\ \cdots$$

则它在每个x_n处都收敛。即 $\lim\limits_{k\to\infty} f_{kk}(x_n)$ $\exists$ $\forall n=1$, 2, $\cdots$。

由于$\overline{\{x_n\}}=X$，再由 § 3.2 中题 33 知必有 $f_0\in X^*$ 使得

$f_{kk}(x)\to f_0(x)$ $\forall x\in X$，即 $f_{kk}\xrightarrow{w^*}f_0$.

29. 由题 1，对固定的 $t_0\in[a, b]$，令 $f_{t_0}(x)=x(t_0)$，$\forall x\in C[a,b]$，则 $f_{t_0}\in(C[a, b])^*$。又由于 $x_n\xrightarrow{w}x_0$，故

$f_{t_0}(x_n)=x_n(t_0)\to f_{t_0}(x_0)=x_0(t_0)$，$\forall t_0\in[a, b]$. 则

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t)=x_0(t)\quad \forall t\in[a, b].$$

*30.（Ⅰ）例如取

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{2(t-a)}{b-a}, & t\in\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]\\[2ex] 1, & t\in\left(\dfrac{a+b}{2}, b\right]\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}\varepsilon+\dfrac{2(1-\varepsilon)}{b-a}(t-a), & t\in\left[a,\ \dfrac{a+b}{2}\right]\\[2ex] 1, & t\in\left(\dfrac{a+b}{2},\ b\right]\end{cases}$$

显然 $\forall 1>\varepsilon>0$，x，$y\in C[a,b]$，$\|x\|=\|y\|=1$，$\|x-y\|\geqslant\varepsilon$，但恒有

$$\|x+y\|=2$$

因此，$C[a,b]$不是一致凸的。

$$令\ x(t)=\begin{cases}0, & t\in\left[a,\ \dfrac{a+b}{2}\right]\\[2ex] \dfrac{2}{b-a} & t\in\left(\dfrac{a+b}{2},\ b\right]\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{b-a}, & t\in\left[a,\ \dfrac{a+b}{2}\right]\\[2ex] 0, & t\in\left(\dfrac{a+b}{2},\ b\right]\end{cases}$$

x，$y\in L[a,b]$，$\|x\|=\|y\|=1$，且 $\forall 1>\varepsilon>0$ 有 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$，但是

$$\|x+y\|=2$$

因此，$L[a,b]$不是一致凸的。

令 $x=(1,0,0,\cdots)$，$y=(0,1,0,0,\cdots)\in l^1$，显然 $\|x\|=\|y\|=1$，$\forall 1>\varepsilon>0$ 有 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$，但 $\|x+y\|=2$，故 l 不是一致凸的。

（Ⅱ）显然必要性自然成立（不一致凸的也成立），只须证充分性。

若 $x_n\xrightarrow{w}x_0$，且 $\|x_n\|\to\|x_0\|$，不妨设 $\|x_0\|\neq 0$，$x_n\neq\theta$，

显然 $\frac{x_n}{\|x_n\|} \xrightarrow{w} \frac{x_0}{\|x_0\|}$，现证 $\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_0}{\|x_n\|} \right\| \to 0$.

用反证法，为简单起见，设 $\|x_n\| = \|x_0\| = 1$，且 $\|x_n - x_0\| \nrightarrow 0$，设 $\exists\ \varepsilon_0 > 0$，使得 $\|x_n - x_0\| \geqslant \varepsilon_0$，由于$X$一致凸空间，$\exists \delta > 0$，使得 $\|x_n + x_0\| \leqslant 2 - \delta$.

由于 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，故 $\forall f \in X^*$，且 $\|f\| = 1$ 有 $f(x_n) \to f(x_0)$.

从而有

$$f(x_n + x_0) \to 2f(x_0)$$

由于 $|f(x_n + x_0)| \leqslant \|f\| \ \|x_n + x_0\| \leqslant 2 - \delta \quad \forall f \in X^*, \ \|f\| = 1$

及 $\|x_0\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x_0)| = \sup_{\|f\|=1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} |f(x_n + x_0)| \leqslant \frac{2-\delta}{2}$.

知 $\|x_0\| < 1$，与 $\|x_0\| = 1$ 相矛盾。可知 $\|x_n\| = 1$，$\|x_0\| = 1$，

且 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，必有 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$.

31. 显然 $\|f_n\| \leqslant M$. 设 $x_1, x_2 \in S = \{x \in X; \lim_{n\to\infty} f_n(x) \exists\}$

则 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_1) \exists$，$\lim_{n\to\infty} f_n(x_2) \exists$，故 $\forall \alpha, \beta \in K$ 有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \lim_{n\to\infty} f_n(x_1) + \beta \lim_{n\to\infty} f_n(x_2) \quad \exists$$

即 $\alpha x_1 + \beta x_2 \in S$，因此，$S$为$X$的子空间。

若 $x_0 \in \bar{S}$，则 $\exists x_n \in S$ 使得 $\|x_n - x_0\| \to 0$. 故 $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$，

使得 $n > N$ 时 $\|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{3M}$.

由于 $\{f_n(x_{N+1})\}_{n=1}^{\infty}$ 为收敛数列，因此 $\exists N_1$，使得当 m，$n > N_1$ 时，有

$$|f_m(x_{N+1}) - f_n(x_{N+1})| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

又由

$$|f_m(x_0)-f_n(x_0)|\leqslant|f_m(x_0)-f_m(x_{N+1})|$$

$$+|f_m(x_{N+1})-f_n(x_{N+1})|+|f_n(x_{N+1})-f_n(x_0)|$$

$$\leqslant\|f_m\|\ \|x_0-x_{N+1}\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|f_n\|\ \|x_{N+1}-x_0\|$$

$$<M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3}+M\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

故$\{f_n(x_0)\}$为 Cauchy 数列，即$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)\exists$，即 $x_0\in S$，因此，S是X的闭子空间。

32. 由于对任一$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^p$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\xi_n$都收敛，令

$$f_n(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i,\qquad\forall x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^p$$

显然$f_n\in(l^p)^*$，由题17知$\|f_n\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{1/q}$，由于 $\forall x\in l^p$

$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\xi_i$**都收敛，也即**$\sup\limits_n|f_n(x)|<+\infty$，$\forall x\in l^p$.

因l^p为 Banach 空间，由共鸣定理知$\sup\limits_n\|f_n\|<+\infty$，即

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^q\right)^{1/q}<+\infty$$

故

$$a=(a_1,\cdots,a_n,\cdots)\in l^q.$$

33. 令 $f_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\xi_i$，　　$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in c$，易知

$f_n \in c^*$，且显然有 $\|f_n\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |a_i|$. 若取 $x_0 = (\operatorname{sgn} a_1, \cdots, \operatorname{sgn} a_n, 0, 0, \cdots) \in c$，则 $\|x_0\| = 1$，且

$$f_n(x_0) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \leqslant \|f_n\| \, \|x_0\| = \|f_n\|$$

因此，$\|f_n\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.

由于 $\forall x \in c$，有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ 收敛，即 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 都存在，因此，$\{f_n(x)\}$ 都是有界数列，由于 c 是完备的，因此，由共鸣定理得

$$\sup_n \|f_n\| < +\infty$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

所以

$$a = (a_1, \cdots, a_n, \cdots) \in l^1.$$

34. 令 $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$，$x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^1$，易知 $f_n \in (l^1)^*$，且 $\|f_n\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$. 由于 $\forall x \in l^1$，$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i$ 都收敛，即

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \exists$$

故

$$\sup_n |f_n(x)| < +\infty, \quad \forall x \in l^1$$

由 l^1 是完备的及共鸣定理知

$$\sup_n \|f_n\| < \infty$$

即

$$\sup_n |a_n| < +\infty$$

因此

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \in l^\infty.$$

35. 因为任一 $\{x_n\} \subset S$，$\exists \{x_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \exists \quad \forall f \in X^*$$

即

$$\sup_k |(J\, x_{n_k})(f)| = \sup_k |f(x_{n_k})| < +\infty \quad \forall f \in X^*$$

其中 $J: X \to X^{**}$ 为典则映射，由共鸣定理知

$$\sup_k \|J\, x_{n_k}\| = \sup_k \|x_{n_k}\| < +\infty$$

因此，S 的任一点列 $\{x_n\}$ 都有有界子点列。所以，S 必为有界集。

36. "$\Longrightarrow$" $x_n \xrightarrow{W} x_0$ 时，$\sup_n \|x_n\| < +\infty$ 当然成立。因 $(l^p)^* = l^q$，故取 $e_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots) \in l^q$，则当 $n \to \infty$ 时必有第 k 项

$$e_k(x_n) = \xi_k^{(n)} \to e_k(x_0) = \xi_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

"$\Longleftarrow$" 对任一有限数列 $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n, \cdots)$，即存在 N_y，使得 $\eta_n = 0$，$\forall n > N_y$。显然 $y = \sum_{i=1}^{N_y} \eta_i\, e_i \in l^q = (l^p)^*$，且因为 $\xi_k^{(n)} \to \xi_k^{(0)}$ $(n \to \infty)$ $\forall k$，故

$$y(x_n)=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i e_i(x_n)=\sum_{i=1}^{N_y}\eta_i\xi_i^{(n)}\to\sum_{i=1}^{N_y}\eta_i\xi_i^{(0)}=y(x_0)$$

即$\{x_n\}$在$(l^p)^*$的稠密子集D(有限数列全体组成的l^q的子空间)上每个y有$y(x_n)\to y(x_0)$，又因$\sup_n\|x_n\|<+\infty$，故$x_n\xrightarrow{W}x_0$.

*37. "$\Longrightarrow$" 由题29知$x_n\xrightarrow{W}x$，必有$\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$，$\forall t\in[a,b]$，又显然$\sup_n\|x_n\|<+\infty$.

"$\Longleftarrow$" 若$\|x_n\|\leqslant M$，且$\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)\quad\forall t\in[a,b]$，则由 Lebesque 控制收敛定理知，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dg(t)=\int_a^b x(t)dg(t)\quad\forall g(t)\in BV[a,b]$$

(注：$BV[a,b]=(C[a,b])^*$参见[4])，从而$x_n\xrightarrow{W}x$.

38. 显然只须证充分性。

设$\dim X=k$，$e_1,\cdots,e_k$为X的基底，易知

$$f_j(x)=f_j\Big(\sum_{i=1}^{k}\xi_i e_i\Big)=\xi_j\quad\forall x=\sum_{i=1}^{k}\xi_i e_i\in X$$

$f_j\in X^*$，$(j=1,2,\cdots,k)$，设$x_n\xrightarrow{W}x_0$，记

$$x_n=\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{(n)}e_i,\qquad x_0=\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{(0)}e_i$$

则

$$f_j(x_n)=\xi_j^{(n)}\to f_j(x_0)=\xi_j^{(0)}\quad(j=1,2,\cdots,k)$$

又因

$$\|x_n-x_0\|=\|\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{(n)}e_i-\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{(0)}e_i\|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)}| \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \|e_i\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

故有限维空间中弱收敛，必为按范数收敛的。

39. 设(1)有解 x_0，即 $f_i(x_0) = \lambda_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$，若

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \theta$$

则

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x_0) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right)(x_0) = 0$$

40. $f_1, f_2 \in M^{\perp}$，则 $\forall \alpha, \beta \in K$ 有

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = 0 \quad \forall x \in M$$

故 $\alpha f_1 + \beta f_2 \in M^{\perp}$，即 $M^{\perp}$ 为 X^* 的子空间。

若 $f_0 \in \overline{M^{\perp}}$，则 $\exists f_n \in M^{\perp}$，使得 $\|f_n - f_0\| \to 0$

从而

$$f_0(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in M$$

因此，$f_0 \in M^{\perp}$，故 $M^{\perp}$ 为 X^* 的闭子空间。

注　关于 $M^{\perp}$ 的闭性也可如下证之。

易知 $M^{\perp} = \bigcap_{x \in M} (Jx)^{-1}(\{0\})$，其中 $J: X \to X^{**}$ 为典则映射，$Jx: X^* \to K$ 是连续线性泛函，故闭集$\{0\}$的原象集$(Jx)^{-1}(\{0\})$为X^*中闭集。从而由于闭集族的交为闭集，故 $M^{\perp}$ 为 X^* 中闭集。

41. 完全类似题40略。

42. 显然 $M \subset {}^{\perp}(M^{\perp})$，为了证相反包含关系也成立，只须证 ${}^{\perp}(M^{\perp}) - M = \phi$，假定有

$$x_1 \in {}^{\perp}(M^{\perp}) - M$$

由于M为闭集，故$d(x_1, M) = d > 0$。因此，由 Hahn-Banach 定理推论 3.3.1，存在 $f_0 \in X^*$，使得

$$\|f_0\| = 1, \quad f_0(M) = \{0\}, \quad f_0(x_1) = d > 0$$

但由 $f_0(M) = \{0\}$知$f_0 \in M^{\perp}$，而$x_1 \in {}^{\perp}(M^{\perp})$，故$f_0(x_1) = 0$，这就与 $f_0(x_1) = d > 0$矛盾。因此，${}^{\perp}(M^{\perp}) - M = \phi$，即${}^{\perp}(M^{\perp}) \subset M$。因此，${}^{\perp}(M^{\perp}) = M$。

43．设$x, y \in S$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)$ ∃且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(y)$ ∃，则对任意$\alpha, \beta \in K$(X 的数域)，有

$$\lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} A_n(y) \exists$$

即 $\alpha x + \beta y \in S$。因此，S是X 的子空间。

设$x_0 \in \bar{S}$，则存在$x_n \in S$，使得 $\|x_n - x_0\| \to 0$。

由于

$$\begin{aligned}\|A_k(x_0) - A_r(x_0)\| &\leqslant \|A_k(x_0) - A_k(x_n)\| \\ &+ \|A_k(x_n) - A_r(x_n)\| + \|A_r(x_n) - A_r(x_0)\| \\ &\leqslant \|A_k\| \, \|x_n - x_0\| + \|A_k(x_n) - A_r(x_n)\| \\ &+ \|A_r\| \, \|x_n - x_0\| \qquad (*)\end{aligned}$$

易知 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1$ 使得当 $n > N_1$ 时，恒有

$$\|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

对 $n > N_1$，固定 n，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} A_k(x_n)$存在，故存在$N$，使得当 $k, r > N$ 时，恒有

$$\|A_k(x_n) - A_r(x_n)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

从而由(*)知($\because \|f_n\| \leqslant M \quad (\forall n)$

$$\|A_k(x_0) - A_r(x_0)\| < \varepsilon \quad \forall k, r > N$$

因此，$\{A_k(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列，即 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k(x_0)$存在。

所以，$x_0 \in S$，即S是闭集。因此，S为X的闭子空间。

44. "$\Longrightarrow$" 若$f \in X^*$，满足(i)、(ii)，则对任何 $x \in \mathrm{span}$ $\{e_1, \cdots, e_n\}$，即对任何$e_1, \cdots, e_n$的线性组合$\sum\limits_{k=1}^{n} t_k e_k$满足

$$\left| f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k e_k\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} t_k f(e_k)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} t_k a_k\right|$$

$$\leqslant \|f\| \left\|\sum_{k=1}^{n} t_k e_k\right\|$$

"$\Longleftarrow$" 若对任何 $t_1, \cdots, t_n$，恒有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} t_k a_k\right| \leqslant M \left\|\sum_{k=1}^{n} t_k e_k\right\|$$

令 $g(e_k) = a_k$，$(k = 1, 2, \cdots, n)$及 $x = \sum\limits_{k=1}^{n} t_k e_k \in \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\} = X_0$，

$$g\left(\sum_{k=1}^{n} t_k e_k\right) = \sum_{i=1}^{n} t_k a_k$$

显然 g：$\mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\} \to K$是线性泛函，且有界的：

$$\|g\| \leqslant M$$

由 Hahn-Banach 延拓定理，必有$f \in X^*$，使得

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in X_0$$

且

$$\|f\| = \|g\| \leqslant M$$

因此，$\exists f \in X^*$且满足条件(i)、(ii)。

§ 3.4 闭图象定理与有界逆算子定理

1．显然$\|(x,y)\|$满足范数公理(1)、(2)，又因 $\forall (x_i, y_i) \in X \times Y$，当 $p=1$ 时，

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\| = \|(x_1+x_2, y_1+y_2)\| = \|x_1+x_2\|$$

$$+ \|y_1+y_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| + \|y_1\| + \|y_2\|$$

$$= (\|x_1\| + \|y_1\|) + (\|x_2\| + \|y_2\|)$$

$$= \|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\|;$$

当 $1<p<+\infty$ 时，

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\| = \|(x_1+x_2, y_1+y_2)\|$$

$$= (\|x_1+x_2\|^p + \|y_1+y_2\|^p)^{1/p}$$

$$\leqslant [(\|x_1\| + \|x_2\|)^p + (\|y_1\| + \|y_2\|)^p]^{1/p}$$

(Hölder不等式) $$\leqslant (\|x_1\|^p + \|y_1\|^p)^{1/p} + (\|x_2\|^p + \|y_2\|^p)^{1/p}$$

$$= \|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\|.$$

故 $\|(x,y)\|$ 满足范数公理(3)．因此，$X \times Y$ 为赋范空间。

2．因为

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\| = \|(x_1+x_2, y_1+y_2)\|$$

$$= \max\{\|x_1+x_2\|, \|y_1+y_2\|\}$$

$$\leqslant \max\{\|x_1\| + \|x_2\|, \|y_1\| + \|y_2\|\}$$

$$\leqslant \max\{\|x_1\|,\|y_1\|\}+\max\{\|x_2\|,\|y_2\|\}$$

$$=\|(x_1,y_1)\|+\|(x_2,y_2)\| \quad \forall (x_i,y_i)\in X\times Y$$

因此，$\|(x,y)\|$ 满足三角不等式，又显然满足严格正性及正齐次性，故 $X\times Y$ 为赋范空间。

3．以 $p=1$ 时为例证之，设 $\{(x_n,y_n)\}$ 为 $X\times Y$ 中 Cauchy 列，则由于

$$\|(x_m,y_m)-(x_n,y_n)\|=\|(x_m-x_n,y_m-y_n)\|$$

$$=\|x_m-x_n\|+\|y_m-y_n\|$$

显然 $\{x_n\}$ 为 X 中 Cauchy 列，$\{y_n\}$ 为 Y 中 Cauchy 列，由于 X,Y 的完备性，必存在 $x_0\in X$，$y_0\in Y$ 使得

$$\|x_n-x_0\|\to 0,\ \|y_n-y_0\|\to 0 \quad (n\to\infty 时)$$

从而

$$\|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)\|=\|x_n-x_0\|+\|y_n-y_0\|\to 0 \quad (n\to\infty 时)$$

故 $\{(x_n,y_n)\}$ 在 $X\times Y$ 中收敛，即 $X\times Y$ 是完备的。

4．设 $x_n\in D(A)$，$x_n\to x_0$，且 $Ax_n\to y_0$，由于 $D(A)$ 为 X 的闭子空间，故 $x_0\in D(A)$；又 A 为有界线性算子，从而必连续，则由 $x_n\to x_0$ 知 $Ax_n\to Ax_0$，由此知 $Ax_0=y_0$．故 $A:D(A)(\subset X)\to Y$ 为闭算子。

5．设 $y_n,y_0\in Y$，$y_n\to y_0$，$A^{-1}y_n\to x_0$，由于 $A:X\to Y$ 为闭算子，故由 $A^{-1}y_n\to x_0$，$A(A^{-1}y_n)=y_n\to y_0$，必有 $x_0\in D(A)=X$，$y_0=Ax_0$，即有 $x_0=A^{-1}y_0$．因此，A^{-1} 为闭算子。

6．设 $x_0\in\overline{N(A)}$，则 $\exists\, x_n\in N(A)$，使得 $x_n\to x_0$．因 $Ax_n=\theta\to\theta$，且 A 为闭算子。故 $x_0\in D(A)$，并 $\theta=Ax_0$，即 $x_0\in N(A)$．因此，$N(A)$ 为闭集，显然它为 X 的子空间，所以，

$N(A)$ 为 X 的闭子空间。

7.（Ⅰ）设 $y_0 \in \overline{A(\Omega)}$，则 $\exists\, x_n \in \Omega$，使得

$$Ax_n \to y_0$$

因为 $\{x_n\} \subset \Omega$，而 Ω 为紧集，故 $\exists \{x_{n_k}\}$ 使得

$$x_{n_k} \to x_0 \in \Omega \quad (k \to \infty)$$

显然 $Ax_{n_k} \to y_0$，由于 A 为闭算子，故 $y_0 = Ax_0 \in A(\Omega)$。因此，$A(\Omega)$ 为 Y 中的闭集。

（Ⅱ）设 $x_0 \in \overline{A^{-1}(K)}$，则 $\exists x_n \in A^{-1}(K)$ 使得 $x_n \to x_0$，且 $Ax_n \in K$，由于 K 为紧集，故有 $\{Ax_{n_k}\}$ 使得

$$Ax_{n_k} \to y_0 \in K$$

由于

$$x_{n_k} \to x_0$$

及 A 为闭算子，故 $y_0 = Ax_0$，即 $x_0 \in A^{-1}(K)$。因此，$A^{-1}(K)$ 为 X 中闭集。

8. 设 $\{x_n\}$ 为 $(D(A), \|\cdot\|_A)$ 中的 Cauchy 列，由于

$$\|x_m - x_n\|_A = \|x_m - x_n\| + \|Ax_m - Ax\| \to 0 \quad (m, n \to \infty \text{时})$$

可知 $\{x_n\}$ 为 X 中的 Cauchy 列，$\{Ax_n\}$ 为 Y 中的 Cauchy 列。因此，由 X 与 Y 的完备性，知存在 $x_0 \in X$，$y_0 \in Y$ 使得

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0, \quad Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y_0$$

因 A 为闭算子，故 $x_0 \in D(A)$，$y_0 = Ax_0$。又由

$$\|x_n - x_0\|_A = \|x_n - x_0\| + \|Ax_n - Ax_0\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

知 $\{x_n\}$ 为 $(D(A), \|\cdot\|_A)$ 中的收敛点列，因此，$(D(A), \|\cdot\|_A)$

为 Banach 空间。

9. $A:X\to X$ 显然是线性的，且 $\forall x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in X$ 有

$$\|Ax\|=\left\|\left(\xi_1,\frac{1}{2}\xi_2,\cdots,\frac{1}{n}\xi_n,\cdots\right)\right\|$$

$$=\sup_n\left|\frac{1}{n}\xi_n\right|\leqslant\sup_n|\xi_n|=\|x\|$$

故$\|A\|\leqslant 1$，因此 $A\in B(X)$。

显然，$A^{-1}:X\to X$ 存在，$A^{-1}x=(\xi_1,2\xi_2,\cdots,n\xi_n,\cdots)$，$\forall x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in X$，但取 $e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)\in X$。

第 n 位

显然$\|e_n\|=1$，$\|A^{-1}e_n\|=n$ $(\forall n=1,2,\cdots)$。因此，A^{-1}是无界线性算子。

这与有界逆算子 定理并不矛盾。因为X是不完备，事实上，$x_n=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots\right)\in X$，$\{x_n\}$满足

$$\|x_m-x_n\|=\frac{1}{n+1}(\forall m>n)$$

因此，$\{x_n\}$为X中 Cauchy 列，但 $\{x_n\}$在X中不收敛。这是因为$\{x_n\}$为 l^∞中 Cauchy 列，且 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0$，其中$x_0=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\cdots\right)\overline{\in}X$.

10. 易知A是l^2到l^2 中的线性算子，又由于l^2是 Banach 空间，因此，只须证A为闭算子。

设 $x_k=(\xi_1^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)},\cdots)\in l^2$，$x_k\to x$，且 $Ax_k\to y$，只要证($\because$显然 $x\in l^2$)：$y=Ax$。

记 $Ax_k=(\eta_1^{(k)},\cdots,\eta_n^{(k)},\cdots)$，

$$Ax=(\eta_1^{(0)},\cdots,\eta_n^{(0)},\cdots)$$

$$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n,\cdots)$$

由 $Ax_k\to y$，$|\eta_n^{(k)}-\eta_n|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i^{(k)}-\eta_i|^2\right)^{1/2}\to 0\ (k\to\infty)$

因此

$$\lim_{k\to\infty}\eta_n^{(k)}=\eta_n\quad(n=1,2,\cdots)\qquad(1)$$

另一方面，由于

$$|\eta_n^{(k)}-\eta_n^{(0)}|=\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{nj}(\xi_j^{(k)}-\xi_j)\right|$$

$$\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{nj}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{k}-\xi_j|^2\right)^{1/2}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{nj}|^2\right)^{1/2}\|x_k-x\|\to 0\quad(k\to\infty)$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\eta_n^{(k)}=\eta_n^{(0)}\quad(n=1,2,\cdots)\qquad(2)$$

由(1)，(2)知 $\eta_n=\eta_n^{(0)}\quad(n=1,2,\cdots)$，即 $y=Ax$。

11. 由于 $\forall x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^\infty$，$\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\quad(i=1,2,\cdots)$都收敛，故若取$x_0=(\operatorname{sgn}a_{i1},\cdots,\operatorname{sgn}a_{ij},\cdots)\in l^\infty$，则知

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\operatorname{sgn}a_{ij}\ \text{收敛，}\ \forall i=1,2,\cdots$$

令 $f_i(x)=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j$，$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^\infty$，则显然

$f_i: l^\infty \to K$ 是线性泛函。且由

$$|f_i(x)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\ \xi_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \sup_j |\xi_j|$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \cdot \|x\| \qquad \forall x \in l^\infty,$$

知 $f_i \in (l^\infty)^*$ $(i=1,2,\cdots)$。

另一方面，$A: l^\infty \to l^\infty$显然是线性算子，由 l^∞的完备性，要证 $A \in B(l^\infty)$，现只须证A为闭算子。

设$x_k = (\xi_1^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)}, \cdots) \in l^\infty$, $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^\infty$，有 $x_k \to x$，且 $Ax_k \to y$。显然只须证：$y = Ax$。

记 $Ax_k = (\eta_1^{(k)}, \cdots, \eta_n^{(k)}, \cdots)$

$$Ax = (\eta_1^{(0)}, \cdots, \eta_n^{(0)}, \cdots)$$

$$y = (\eta_1, \cdots, \eta_n, \cdots)$$

由于$x_k \to x$，$f_i \in (l^\infty)^*$，故 $f_i(x_k) = \eta_i^{(k)} \to f_i(x) = \eta_i^{(0)}$ $(i=1,2,\cdots)$；又由于 $Ax_k = (\eta_1^{(k)}, \cdots, \eta_n^{(k)}, \cdots) \to y = (\eta_1, \cdots, \eta_n, \cdots)$故有 $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_i^{(k)} = \eta_i$ $(i=1,2,\cdots)$。因此，$\eta_i = \eta_i^{(0)}$ $(i=1, 2,\cdots)$即 $y = Ax$。

12. 考虑恒等算子 I：$(X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$，由于

$$\|Ix\|_2 = \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1 \qquad \forall x \in X$$

知 I 为有界线性算子，且有逆算子$I^{-1}: (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$，因为 $(X, \|\cdot\|_i)$ 都为 Banach 空间，由有界逆算子定理知 I^{-1} 也为有界算子，故存在常数 $C>0$，使得

$$\|x\|_1 = \|I^{-1}x\|_1 \leqslant C\|x\|_2 \qquad \forall x \in X$$

即得

$$\frac{1}{C}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

因此，$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$为X上的两个等价范数。

13．由于 $\forall x \in X$，方程 $Ax=By$都有唯一的解$y=A_1x$，则若 $y_i=A_1x_i\ (i=1,2)$，即 $Ax_i=By_i$，必有

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=B(\alpha y_1+\beta y_2) \quad \forall \alpha,\beta \in K$$

故

$$\alpha y_1+\beta y_2=A_1(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha A_1x_1+\beta A_1x_2$$

所以，A_1：$X\to Y$的线性算子。

由于X,Y都为 Banach 空间，故只须证A_1为闭算子。

设 $x_n \in X$，$x_n \to x$，且 $A_1x_n \to y$，只须证 $y=A_1x$。

因为$Ax_n=BA_1x_n$，由A,B的连续性，知

$$Ax=By$$

又由方程解的唯一性知 $y=A_1x$。

因此，$A_1:X\to Y$是闭算子，从而 $A_1 \in B(X,Y)$。

14．设 $x_n \in D(A)$，且$x_n \to x_0$，$Ax_n \to y_0$，即有

$$x_n(t)=\int_0^t x_n'(\tau)\,d\tau$$

由于

$$\left|\int_0^t x_n'(\tau)\,d\tau-\int_0^t y_0(\tau)\,d\tau\right|$$

$$\leqslant\int_0^1 |x_n'(\tau)-y_0(\tau)|\,d\tau$$

$$\leqslant\left(\int_0^1 |x_n'(\tau)-y_0(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 1^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\to 0$$

$(n\to\infty)$

可知$\left\{\int_0^t x_n'(\tau)d\tau\right\}$在[0, 1]上一致收敛于$\int_0^t y_0(\tau)d\tau$，也即$\{x_n(t)\}$在[0,1]上一致收敛于$\int_0^t y_0(\tau)d\tau=z(t)$，显然

$$z'(t)=y_0(t) \quad a\cdot e,\ [0,1]$$

又由于 $\int_0^1 |x_n(t)-z(t)|^2dt\to 0$ （$\because x_n(t)$ 一致收敛于 $z(t)$），故 $z(t)=x_0(t)\in D(A)$，且 $Ax_0=y_0$。

因此，A是闭算子。

取 $x_n(t)=\sin n\pi t\in D(A)$，易验证

$$\|x_n\|=\left(\int_0^1 \sin^2 n\pi t\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \forall n$$

但

$$\|Ax_n\|=\left(\int_0^1 (n\pi)^2\cos^2 n\pi t\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{n\pi}{\sqrt{2}} \quad \forall n$$

可知导算子A把 $D(A)$中有界集$\{x_n\}$映成为 $L^2[0,1]$中的无界集，所以，A是无界算子。

显然A是 $D(A)\to R(A)$上1—1的映射，故 $A^{-1}:R(A)\to D(A)$ 存在，且 $A^{-1}x(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$。又

$$\|A^{-1}x\|=\left(\int_0^1\left|\int_0^t x(\tau)d\tau\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\int_0^1\left(\int_0^t|x(\tau)|d\tau\right)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\|x\|=\left(\int_0^1|x(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x\in R(A)$$

知 A^{-1}是有界算子。

15. 因为P是 Banach 空间 X 到X 中的线性算子，故只须证$P:X\to X$为闭算子。

设 $x_n\to x_0$，且 $Px_n\to y_0$，由$R(P)$闭，知 $y_0\in R(P)$，故 $\exists\tilde{x}$ 使得 $y_0=P\tilde{x}$，又由 $P^2=P$，

$$P(Px_n-x_n)=P^2x_n-Px_n=\theta$$

知 $Px_n-x_n\in N(P)$ 由 $N(P)$ 闭，知

$$\lim_{n\to\infty}(Px_n-x_n)=y_0-x_0\in N(P)$$

故

$$P(y_0-x_0)=Py_0-Px_0=PP\tilde{x}-Px_0$$
$$=P\tilde{x}-Px_0=y_0-Px_0=\theta$$

即

$$Px_0=y_0$$

因此，P为闭算子，所以，$P\in B(X)$.

16. 设 $y_0\in\overline{R(P)}$，则 $\exists y_n\in R(P)$，使得 $y_n\to y_0$. 因 $y_n\in R(P)$，存在 x_n，使得 $y_n=Px_n$，故 $Px_n\to y_0$，又因 $P^2=P$，故 $P^2x_n=Px_n=Py_n\to y_0$，由于P为闭算子，所以 $y_0=Py_0$，即$y_0\in R(P)$，因此，$R(P)$是闭的。

§ 3.5 紧算子

1. "$\Longrightarrow$" 由于 $V[\theta,1]$ 是 X中有界集，故由紧算子定义知A ($V[\theta,1]$ 为Y中列紧集。

$\Longleftarrow$若 $A:X\to Y$ 为线性算子，$A(V[\theta,1])$ 为Y中列紧集，则X的任一有界集Ω，必有常数 k，使得 $\Omega\subset V[\theta,k]=kV[\theta,1]$，从而 $A(\Omega)\subset A(kV[\theta,1])=kA(V[\theta,1])$. 显然 $kA(V[\theta,1])$ 为Y中列紧集，故其子集$A(\Omega)$也为Y中列紧集。

2. "$\Longrightarrow$" $\{x_n\}$为X中有界集，故 $\{Ax_n\}$ 为Y中列紧集，

当然有收敛子列。

"$\Longleftarrow$" 设Ω为X中有界集，故 $\forall\{y_n\}\subset A(\Omega)$，存在$x_n\in\Omega$，使得$y_n=Ax_n$。由于$\{x_n\}$有界，则由条件知$\{y_n\}$必有收敛子列。因此，$A(\Omega)$ 为Y中列紧集。所以，A为紧算子。

3. 设 $\dim X=n$，X 有基底：e_1，$\cdots$，e_n。从而 $\forall x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in X$，有$Ax=A\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\ Ae_i$，即

$$R(A)=\mathrm{span}\{Ae_1,\cdots,Ae_n\}$$

于是 $\dim R(A)\leqslant n$，即A为有限秩算子。因此，A必为紧算子。

*4. 设$V_n[\theta]$，$B_n[\theta]$分别为以X、Y中的θ为心，n为半径的闭球，由于$R(A)=Y$，则

$$A\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}V_n[\theta]\right)=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}}A(V_n[\theta])=Y$$

因Y为 Banach 空间，故为第二纲集。所以，存在m使得

$$\overline{A(V_m[\theta])}\supset B_r[y_0]\quad(\text{某 }r>0\text{及某}y_0\in Y)$$

由于A为紧算子，故$\overline{A(V_m[\theta])}$必为紧集，从而$B_r[y_0]$作为紧集的闭子集也必为$Y$中的紧集。于是

$$B_r[\theta]=B_r[y_0]-y_0=\{y-y_0;\ y\in B_r[y_0]\}$$

必为紧集，由于$B_1[\theta]=\frac{1}{r}B_r[\theta]=\left\{\frac{1}{r}y;\ y\in B_r[\theta]\right\}$，因此，$B_1[\theta]$为$Y$中紧集。所以，$\dim Y<+\infty$。

5. 假定 $A^{-1}\in B(X)$，由于 $A:X\to X$ 为紧算子，从而$A^{-1}A:X\to X$亦为紧算子，故恒等算子$I:X\to X$为紧算子，那末 $\dim X<+\infty$与 $\dim X=+\infty$矛盾。

6. 设 $x_n\in N(I-A)$，且$\|x_n\|\leqslant 1\quad(n=1,2,\cdots)$，则

$$x_n = Ax_n \ (\because (I-A)x_n = \theta)$$

由于A为紧算子，故$\exists \{x_{n_k}\}$，使得$\{Ax_{n_k}\}$收敛。因为$x_{n_k} = Ax_{n_k}$，所以$\{x_n\}$有收敛子列。由于$\{x_n\}$是$N(I-A)$中任一单位球中点列，其都有收敛子列，因此，$N(I-A)$的单位球必为紧集，从而$\dim N(I-A) < +\infty$。

注 （1）亦可这样证：因$\forall x \in N(I-A)$，有 $x = Ax$，即A在$N(I-A)$上的限制(当然为紧算子)是$N(I-A)$上的恒等算子，因此，$N(I-A)$之单位闭球必为紧集，故

$$\dim N(I-A) < +\infty \quad \text{(见本节题17)}$$

（2）显然对$\lambda \neq 0$，A为紧算子，则也有$\dim N(\lambda I-A) < +\infty$，$\dim N((\lambda I-A)^n) < +\infty$。

7。因$R(A) = \overset{\infty}{\underset{n-1}{\cup}} A(V_n[\theta])$，$A$为紧算子，故$A(V_n[\theta])$都为列紧集，则它有可列的稠密子集$M_n$，从而易知$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} M_n$为$R(A)$的可列稠密子集，因此，$R(A)$是可分的。

8。参见〈应用泛函基础〉定理3.5.2的必要性证明。

*9。因为$\lambda \neq 0$，显然$R(\lambda I-A) = R\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)$，而$\frac{1}{\lambda}A$为紧算子，故只须证$R(I-A)$为$X$的闭子空间。

设$y_0 \in \overline{R(I-A)}$，则存在$x_n \in X$，使得

$$x_n - Ax_n \to y_0 \quad (n \to \infty)$$

因A为紧算子，故若$\{x_n\}$有界，则存在$\{x_{n_k}\}$使得$\{Ax_{n_k}\}$收敛，又$\{x_{n_k} - Ax_{n_k}\}$也收敛，故$x_{n_k} \to x_0$，$Ax_{n_k} \to Ax_0$

故

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - Ax_{n_k}) = \lim_{n\to\infty}(x_n - Ax_n) = y_0$$

因此

$$x_0 - Ax_0 = y_0$$

即

$$y_0 \in R(I-A)$$

若$\{x_n\}$无界，则必 $\exists w_n \in N(I-A)$使得$\{x_n - w_n\}$为有界点列。事实上，令$d_n = d(x_n, N(I-A))$，必$\exists w_n \in N(I-A)$使得

$$\|x_n - w_n\| = d_n \quad \text{(参见题 6 及 § 3.2 题34)}$$

假定$\{x_n - w_n\}$无界，不妨(为简单起见)设 $d_n \to \infty$，令

$$z_n = \frac{x_n - w_n}{\|x_n - w_n\|}$$

$\{z_n\}$有界，由前面讨论知，由于

$$(I-A)z_n = \frac{(I-A)x_n}{\|x_n - w_n\|} \to \theta$$

存在$\{z_{n_k}\}$，使得$z_{n_k} \to z_0$，$Az_{n_k} \to Az_0$，从而$z_0 \in N(I-A)$.

但

$$\|z_{n_k} - z_0\| = \left\| \frac{x_{n_k} - w_{n_k}}{\|x_{n_k} - w_{n_k}\|} - z_0 \right\|$$

$$= \frac{1}{\|x_{n_k} - w_{n_k}\|} \|x_{n_k} - w_{n_k} - \|x_{n_k} - w_{n_k}\| z_0\|$$

$$\geqslant \frac{d_{n_k}}{d_{n_k}} = 1$$

这与$\|z_{n_k} - z_0\| \to 0$矛盾。

因 $\exists w_n \in N(I-A)$ 使 $\{x_n - w_n\}$有界，由前面讨论知

$$\lim_{n\to\infty}(I-A)(x_n - w_n) = \lim_{n\to\infty}(I-A)x_n = y_0 \in R(I-A)$$

所以，不论$\{x_n\}$是否有界，都有 $y_0 \in R(I-A)$。即$R(I-A)$必为闭子空间。

10. 易知 A；$X \to X_0 = \{\lambda x_0;\ \lambda \in K\}$ （K为X的数域）为线性算子，因 $\dim X_0 = 1$(若 $x_0 \neq \theta$)，或 0 (若$x_0 = \theta$)，故A是有限秩算子，且必为紧算子。

注：亦可用紧算子等价定义验证之，略。

11. 因为 A_n为有限秩算子，故 $A_n: X \to Y$ 是紧算子，又因为其中Y为 Banach 空间，则由$\|A_n - A\| \to 0$ 知A必为 X到Y中的紧算子。

12. 令 $A_n x = \left(\xi_1,\ \frac{1}{2}\xi_2, \cdots, \frac{1}{n}\xi_n, 0, \cdots\right)$，$\forall x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^p$ 显然 $A_n: l^p \to l^p$ 中的有限秩算子，故为紧算子。

$$\text{又} \quad \|A_n x - Ax\| = \left(\sum_{i=n+1} \frac{1}{i^p} |\xi_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \frac{1}{n+1}\|x\|$$

$\forall x \in l^p$ 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$，由此知$A$为紧算子。

当 $p = \infty$ 时，$\|A_n x - Ax\| = \sup\limits_{i \geqslant n+1} \frac{1}{i} |\xi_i| \leqslant \frac{1}{n+1}\|x\|$

$\forall x \in l^\infty$ 故结论仍然成立。

注 ① 亦可以用定义直接验证 $A(V[\theta,1])$ 为 l^p 中的列紧集(只须证其为全有界集)。

② 显然把A改成 $Ax = (\lambda_1 \xi_1,\ \lambda_2 \xi_2,\ \cdots,\ \lambda_n \xi_n,\ \cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$，结论仍然成立(见下题13)。

13.（证法 1 ）令$A_n x = (\lambda_1 \xi_1, \cdots, \lambda_n \xi_n, 0, 0, \cdots)$ $x \in l^2$ 显然 A 为 $l^2 \to l^2$ 中的有限秩算子，故为紧算子。又 $\forall \varepsilon > 0$ ($\because \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$)，必存在 N，使 $n > N$ 时 $|\lambda_n| < \varepsilon$。故当 $n > N$ 时有：

$$\|A_n x - Ax\| = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i \xi_i|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in l^2$$

因此

$$\|A_n - A\| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0$，所以$A$为紧算子。

（证法 2）$\because \lambda_n \to 0$，$\therefore \exists N$，使当 $n > N$ 时 $|\lambda_n| < \varepsilon/2r$ 其中 $r > 1$，$\sup\limits_n |\lambda_n| < r$。由于有限维空间中单位闭球为紧集，故必存在

$$x_i = (\xi_1^{(i)}, \cdots, \xi_N^{(i)}, 0, \cdots) \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

使得

$$Y = \left\{(\xi_1, \cdots, \xi_N, 0, \cdots); \sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^2 \leqslant 1\right\} \subset \bigcup_{i=1}^{N} V\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2r}\right)$$

易验证

$$A(V[\theta, 1]) \subset \bigcup_{i=1}^{k} V(x_i, \varepsilon)$$

故$A(V[\theta,1])$为 l^2 中列紧集，即A为紧算子。

注 设 $Ax = (\lambda_1\xi_1, \cdots, \lambda_n\xi_n, \cdots) \quad \forall x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^p$，易验证：$A$为 $l^p \to l^p$ 中的紧算子 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 0$。也即条件$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 0$ 也是使A成为紧算子的必要条件。事实上，若A为紧算子，但 $\lambda_n \nrightarrow 0$，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，及$\{\lambda_n\}$的子列$\{\lambda_{n_k}\}$，使得$|\lambda_{n_k}| \geqslant \varepsilon_0 > 0$。令$e_{n_k} = (0, \cdots, 0, \underset{\text{第 } n_k \text{ 位}}{1}, 0, \cdots) \in l^p$，则 $\{e_{n_k}\}$为 l^p 中有界点，但

$$\|Ae_{n_k}-Ae_{n_{k+j}}\|=\begin{cases}(|\lambda_{n_k}|^p+|\lambda_{n_{k+j}}|^p)^{1/p} & (1\leqslant p<+\infty)\\ & (j\neq 0)\\ \max\{|\lambda_{n_k}|,|\lambda_{n_{k+j}}|\} & (p=\infty)\end{cases}$$

故

$$\|Ae_{n_k}-Ae_{n_{k+j}}\|\geqslant\varepsilon_0>0 \quad \forall k,\ j(\neq 0)$$

因此，$\{Ae_{n_k}\}$没有 Cauchy 子列，即 A不是紧算子，矛盾。这说明 A 为紧算子，必亦有$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$。

14. 因 $A(V[\theta,1])$ 为 Y 中列紧集，故 $\forall\varepsilon>0$，$R(A)$ 与 $A(V[\theta,1])$之交(为列紧集)有有限 ε-网：y_1，$\cdots$，y_k，令 $M_\varepsilon=\mathrm{span}\{y_1,\cdots,y_k\}$，显然 $\dim M_\varepsilon\leqslant k$，且$\forall x\in V[\theta,1]$有

$$d(Ax,\ M_\varepsilon)\leqslant\varepsilon$$

故 $\forall x\in X$ $(x\neq\theta)$ 有 $\inf\left\{\left\|A\frac{x}{\|x\|}-y\right\|;\ y\in M_\varepsilon\right\}\leqslant\varepsilon$

因此

$$\inf\{\|Ax-y\|;\ y\in M_\varepsilon\}\leqslant\varepsilon\|x\|$$

15.（Ⅰ）充分性显然成立；现证必要性：若等距同构映射 $A:X\to X$ 为紧算子，则任 $\{x_n\}\subset V[\theta,1]$，因 $\|x_n\|=\|Ax_n\|\leqslant 1$，故必有收敛子列，设

$$\lim_{k\to\infty}Ax_{n_k}=y_0$$

记$A^{-1}y_0=x_0$，则$\|x_{n_k}-x_0\|=\|Ax_{n_k}-y_0\|\to 0$，因此，$\{x_n\}$有收敛子列，$V[\theta,1]$ 为列紧集，X必为有限维空间。

（Ⅱ）若 $A:X\to X$ 为拓扑同构映射，即A为满射，且存在 $\mu_1,\mu_2>0$ 使得 $\mu_1\|x\|\leqslant\|Ax\|\leqslant\mu_2\|x\|$ $\forall x\in X$，完全仿(Ⅰ)

可得结论仍然成立(或见下一题解)。

16. 因 $c\|x\|\leqslant\|Ax\|\leqslant\|A\|\|x\|\quad\forall x\in X$，故$A:X\to R(A)$是拓扑同构映射。

若A为紧算子，由于 $A^{-1}:R(A)\to X$ 为有界线性算子，因此，$A^{-1}A:X\to X$为恒等算子，且为紧算子，故$\dim X<+\infty$。

若 $\dim X<+\infty$，A必为有限秩算子，当然为紧算子。

17. $A(V[\theta,1])$ 为Y中列紧集，而其中 $V[\theta,1]$ 为X中单位闭球： $A(M\cap V[\theta,1])\subset A(V[\theta,1])$ 显然成立，而且 $M\cap V[\theta,1]$为M中的单位闭球，故 $A|_M$也必为紧算子。

18. 因 $A=B+C=C(I+C^{-1}B)$，及 $\|C^{-1}B\|\leqslant\|C^{-1}\|\|B\|<1$，故$(I+C^{-1}B)^{-1}\in B(X)$，有

$$A^{-1}=(I+C^{-1}B)^{-1}C^{-1}$$

因 C^{-1}为紧算子，因此 A^{-1}也为紧算子。

19. (Ⅰ) 因 $\|\lambda_n f_n(x)y_n\|=|\lambda_n||f_n(x)|\|y_n\|$

$$\leqslant|\lambda_n|\|f_n\|\|x\|\leqslant|\lambda_n|\|x\|$$

可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(x)y_n$ 对任一 $x\in X$都是绝对收敛的，又A显然是线性算子，故由

$$\|Ax\|=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(x)y_n\right\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|\lambda_n f_n(x)y_n\|$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\right)\|x\|\quad\forall x\in X$$

知 $A\in B(X,Y)$。

(Ⅱ) 令 $A_n x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k(x)y_k$

显然A_n：$X\to Y$是紧算子。又因

$$\|Ax-A_nx\|=\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k f_k(x)\,y_k\right\|$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\lambda_k|\right)\|x\|\qquad\forall x\in X$$

可知$\left(\text{因为}\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|<+\infty\right)$ $\|A-A_n\|\to 0$ $(n\to\infty$ 时)，由于 A_n的紧性知A：$X\to Y$是紧算子。

注　本题之（Ⅱ）可视为题 11 推广。也许读者会问：当Y为 Banach 空间时，是否紧算子A：$X\to Y$ 都是某有限秩算子序列$\{A_n\}$(A_n：$X\to Y$)的极限算子呢($\|A-A_n\|\to 0$)？此问题在 1973 年由 P. Enflo 解决。他构造出一个紧算子，但它决不是有限秩算子的极限。

当Y为 Hilbert 空间时，可以证明任一紧算子 A：$Y\to Y$ 都是一列有限秩算子的极限，参见〈应用泛函基础〉中定理 4.3.2)

*20．“$\Longleftarrow$” $\dim R(A)<+\infty$，显然$R(A)$为Y的有限维子空间，故必为 Banach 空间。

“$\Longrightarrow$”设$R(A)$为Y的完备子空间，令

$$A_1：X\to R(A)\qquad A_1x=Ax\quad\forall x\in X$$

显然 A_1 是紧算子。记 $B_r[\theta]$为$R(A)$中以 θ 为心，r 为径的闭球，$V_r[\theta]$为X中的闭球。由于

$$R(A)=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_1V_n[\theta]$$

又因 A_1 为紧算子，所以 $\overline{A_1V_n[\theta]}$ 为紧集，由 $R(A)$ 完备，

故存在m使得$\overline{A_1 \overset{\circ}{V}_m[\theta]} \neq \phi$，（用 Baire 纲定理）从而存在$r>0$，$y_0 \in R(A)$，使得

$$B_r[y_0] \subset \overline{A_1 V_m[\theta]}$$

即$R(A)$中必有列紧的闭球$B_r[y_0]$，从而可知$B_r[\theta]$为$R(A)$中列紧集，又因 $B_r[\theta]$为闭集，故 $B_r[\theta]$为 $R(A)$中紧集。由于 $B_1[\theta]=\frac{1}{r}B_r[\theta]$，可知 $R(A)$中单位闭球是紧集，故$R(A)$必为有限维线性赋范空间。

§ 4.1 内积空间与 Hilbert 空间

1．因 $(x, z)=(y, z)$， $\forall z \in X$ 均成立，故有

$$(x-y, z)=0, \quad \forall z \in X \text{ 成立}$$

令 $z=x-y$，有

$$0=(x-y, x-y)=\|x-y\|^2$$

即得 $x=y$ 。

2．若取 $x=(1, 0)$，$y=(0, 1)$

有

$$\|x+y\|=2, \quad \|x-y\|=2 \quad \|x\|=1 \quad \|y\|=1$$

即知不满足平行四边形公式，所以 $\|x\|=|\xi_1|+|\xi_2|$ 不是内积的导出范数。

3．由 $\|x_n-x\|^2=(x-x_n, x-x_n)$

$$=(x,x)-(x,x_n)-(x_n,x)+(x_n,x_n)$$

故当 $n \to \infty$时，

$$\|x_n - x\|^2 \to 2\|x\|^2 - 2(x,\ x) = 0$$

即 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ 。

注 若仅仅有 $(x_n,\ x) \to (x,\ x)$ 不能推出 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$。例如，若 $x=0$，则对任意$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，总有

$$(x_n,\ x) \to (x,\ x)$$

成立，但是

$$\|x_n - x\| = \|x_n\|$$

却未必趋于零。

4. 如若不然，则 x_1，x_2，…，x_n线性相关，即有一组不全为零的数 a_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 使得

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \theta$$

由条件，对任一 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，有

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,\ x_i) \\ &= a_1(x_1,\ x_i) + \cdots + a_i(x_i,\ x_i) + \cdots + a_n(x_n,\ x_i) \\ &= a_i \end{aligned}$$

这与 a_i不全为零的假设矛盾，故 x_1，…，x_n 线性无关。

5. “$\Longleftarrow$” 若$\exists \lambda > 0$，使 $y=\lambda x$，则

$$\|x+y\| = \|(1+\lambda)x\| = (1+\lambda)\|x\|$$

$$= \|x\| + \|\lambda x\| = \|x\| + \|y\|$$

“$\Longrightarrow$” 由条件 $\|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

$$= \|x^2\| + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|$$

另一方面

$$\|x+y\|^2=(x+y,\ x+y)$$

$$=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x,\ y)$$

于是

$$(x,\ y)=\|x\|\cdot\|y\|$$

即 Schwartz 不等式中等号成立。利用上式有

$$(y-\lambda x,\ y-\lambda x)=\lambda^2\|x\|^2+\|y\|^2-2\lambda\|x\|\cdot\|y\|$$

取

$\lambda=\dfrac{\|y\|}{\|x\|}$代入，即得 $(y-\lambda x,\ y-\lambda x)=0$

故

$y=\lambda x$ 其中 $\lambda=\dfrac{\|y\|}{\|x\|}$，证毕。

*6.（i）先证 X是内积空间。

因为

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,\ y_n)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|(x_n,\ y_n)|$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\cdot\|y_n\|$$

$$\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty$$

故定义

$$(\{x_n\},\ \{y_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,\ y_n)$$

是有意义的。又由

$$(\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\},\ \{z_n\})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n+\beta y_n,\ z_n)$$

$$=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,\ z_n)+\beta\sum_{n=1}^{\infty}(y_n,\ z_n)$$

$$=\alpha(\{x_n\},\ \{z_n\})+\beta(\{y_n\},\ \{z_n\})$$

及

$$(\{x_n\},\ \{y_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,\ y_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{(y_n,\ x_n)}$$

$$=\overline{\sum_{n=1}^{\infty}(y_n,\ x_n)}$$

$$=\overline{(\{y_n\},\ \{x_n\})}$$

而且

$$(\{x_n\},\ \{x_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,\ x_n)\geqslant 0$$

及

$$(\{x_n\},\ \{x_n\})=0 \iff (x_n,x_n)=0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\iff x_n=\theta \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\iff \{x_n\}=\theta \quad (\text{零序列})$$

故 $(\{x_n\},\ \{y_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,\ y_n)$ 确实为定义在X上的内积。

（Ⅱ）再证X是完备的。

设 $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$是 X 中 Cauchy 列，其中 $x^{(i)}=(x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)},\cdots)$。由定义 $\forall\varepsilon>0$，$\exists i_0$使当 $i,\ j>i_0$ 时，有

$$\|x^{(i)}-x^{(j)}\|<\varepsilon$$

即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(i)}-x_n^{(j)}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$$

于是

$$\|x_n^{(i)}-x_n^{(j)}\|<\varepsilon$$

所以，$\{x_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$是$X_n$中的 Cauchy 列（$n$给定）。设

$$x_n^{(i)}\to x_n^{(0)},\ \text{并令}\ x=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)},\ \cdots)$$

由前证

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(i)}-x_n^{(j)}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon\quad\forall i,j>i_0$$

故对固定的 k 使得

$$\sum_{n=1}^{k}\|x_n^{(i)}-x_n^{(j)}\|^2<\varepsilon^2$$

令 $j\to+\infty$，则

$$\sum_{n=1}^{k}\|x_n^{(i)}-x_n^{(0)}\|^2\leqslant\varepsilon^2$$

再令 $k\to\infty$，就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(i)}-x_n^{(0)}\|^2\leqslant\varepsilon^2<+\infty,\ \text{即}\ x^{(i)}-x\in X$$

因为X是线性空间，有

$$x=x^{(i)}-(x^{(i)}-x)\ \in X$$

故点列 $x^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots)$ 按 X 中范数收敛于 x，X 是完备空间，证毕。

7．“$\Longrightarrow$”设 $(x,\ y)$ 为 X 上内积，记$a_{ij}=(e_i,\ e_j)$

$\forall x\in X$，有 $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$，于是

$$0\leqslant(x,\ x)=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}x_ie_i,\ \sum_{j=1}^{n}x_je_j\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i\overline{x}_j\quad(e_i,\ e_j)$$

$$=\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}\ x_i\overline{x}_j$$

且当 $x\neq\theta$ 时，

$$\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}\ x_i\overline{x}_j=(x,\ x)>0$$

故 $A=(a_{ij})$ 是正定方阵，且

$$\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}\ x_i\overline{y}_j=(x,\ y)$$

$$=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\ \sum_{j=1}^{n}y_je_j\Big)$$

"$\Longleftarrow$" 设 $A=(a_{ij})$ 为正定方阵，$x=\sum_{i=1}^{n}x_i e_i \in X$，

$y=\sum_{j=1}^{n}y_j e_j\in X$，及 $(x,\ y)=\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{y}_j$，下证$(x,\ y)$是$X$的内积。

（Ⅰ）$\because A=(a_{ij})$正定，故 $(x,\ x)=\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{x}_j\geqslant 0$

当且仅当 $x=\theta$时，有$(x,\ x)=0$

（Ⅱ）$(\alpha x+\beta y,\ z)=\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(\alpha x_i+\beta y_i)\overline{z}_j$

$$=\alpha\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{z}_j+\beta\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}y_i\overline{z}_j$$

$$=\alpha(x,\ z)+\beta(y,\ z)$$

（Ⅲ）因 $A=(a_{ij})$正定，故 $a_{ij}=\overline{a}_{ji}$

于是

$$\overline{(x,\ y)}=\overline{\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}x_i\overline{y}_j}$$

$$=\sum_{i,\ j=1}^{n}\overline{a}_{ij}\overline{x}_i y_j$$

$$=\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ji}y_j\overline{x}_i$$

$$=(y,\ x)$$

所以（x，y）确为X上内积。

8. 设 x_1， $x_2 \in X$， α， $\beta \in K$， 则由

$$f_y(\alpha x_1 + \beta x_2,\ y) = (\alpha x_1 + \beta x_2,\ y)$$

$$= \alpha(x_1,\ y) + \beta(x_2,\ y)$$

$$= \alpha f_y(x_1) + \beta f_y(x_2)$$

$$|f_y(x)| = |(x,\ y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

故

$$\|f_y\| \leqslant \|y\|$$

另一方面，若取 $x = y$，有 $|f_y(y)| = \|y\|^2 \leqslant \|f_y\|\ \|y\|$

即

$\|f_y\| \geqslant \|y\|$，由此有 $\|f_y\| = \|y\|$，证毕。

9. 设 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中 Cauchy 列，由

$$|(f_{y_n} - f_{y_m})(x)| = |(x,\ y_n - y_m)|$$

$$\leqslant \|x\| \cdot \|y_n - y_m\|$$

易知 $\{f_{y_n}\}_{n=1}^{\infty}$是 X^*中的 Cauchy 列，因为X^*是完备空间，

故有 $x^* \in X^*$，使得

$$f_{y_n} \to x^* \quad (n \to \infty)$$

因 F： $y \to f_y$是X到X^*的双射，因此，$\exists y \in X$，使得

$$x^* = f_y$$

由本节题 8，有

$$\|y_n - y\| = \|f_{y_n - y}\|$$

$$= \|f_{y_n} - f_y\| \to 0 \quad (n \to \infty$$

即知 $y_n \to y$，所以 X 为 Hilbert 空间。

10．在 $C[0,1]$ 中，若取 $x(t)\equiv 1$，$y(t)\equiv t$，按 $C[0,1]$ 中范数 $\|x\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$ 即知 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 5$，而 $2(\|x\|^2+\|y\|^2)=4$ 故 $C[0,1]$ 按范数 $\|x\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$ 不能成为内积空间。

在 $l^p(p\neq 2)$ 中，若取 $x_1=(1,0,\cdots)$，$x_2=(0,1,0,\cdots)$ 则

$$\|x_1+x_2\|^2=(2^{\frac{1}{p}})^2,\quad \|x_1-x_2\|^2=(2^{\frac{1}{p}})^2$$

及

$$\|x_1\|^2=\|x_2\|^2=1$$

易知 l^p 中范数 $\|x\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 不满足平行四边形公式，

从而 $l^p(p\neq 2)$ 不是内积空间。

11．由计算可得

$$(A(x+y),x+y)=(Ax,x)+(Ay,y)+(Ax,y)+(Ay,x);$$

$$(A(x-y),x-y)=(Ax,x)+(Ay,y)-(Ax,y)-(Ay,x);$$

$$i(A(x+iy),x+iy)=i(Ax,x)-i(Ay,y)-(Ay,x)+(Ax,y);$$

$$i(A(x-iy),x-iy)=i(Ax,x)-i(Ay,y)+(Ay,x)-(Ax,y)$$

代入即可证得恒等式：

$$(Ax,\ y)=\frac{1}{4}\Big\{(A(x+y),\ x+y)-(A(x-y,\ x-y)$$

$$+i(A(x+iy),\ x+iy)-i(A(x-iy),\ x-iy)\Big\}$$

注　此式亦称**推广的极化恒等式**。在实内积空间中 (Ax,y)

$=\frac{1}{4}\{(A(x+y),\ x+y)-(A(x-y),\ x-y)\}$一般讲并不成立，仅当$A$为自伴算子时，公式才成立。

12．由题11，在复内积空间 X 中，有推广的极化恒等式

$$(Ax,\ y)=\frac{1}{4}\{(A(x+y),\ x+y)-(A(x-y),\ x-y)$$
$$+i(A(x+iy),\ x+iy)-i(A(x-iy),\ x-iy)\}$$

由条件 $(Ax,\ x)=0,\ \forall x\in X$，故上式右边每一项均为 0．即

$$(Ax,\ y)=0,\ \forall x,\ y\in X$$

取 $y=Ax$，则有

$$0=(Ax,\ Ax)=\|Ax\|^2$$

所以，$Ax=\theta,\ \forall x\in X$ 成立，即知 $A=\theta$。

注　由上可推出，在复内积空间中，若 $\forall x\in X$，均有 $(Ax,\ x)=(Bx,\ x)$，则必有 $A=B$，其中$A,\ B\in B(X)$。

若 X 为实内积空间，上面结论均不成立。例如，在 R^2上定义矩阵算子 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\forall x=(x_1,\ x_2)^T\in R^2$ 均有

$$(Ax,\ x)=0$$

但 $A\neq\theta$，证毕。

13．由条件 $e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n$ 为 R^n的一组基，$\forall x\in R^n$，可唯一地表为

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$$

若记

$$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$$

则有

$$Ax=A\left(\sum_{j=1}^{n}x_je_j\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}x_j\,Ae_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)e_i$$

$$\triangleq\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$$

其中

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$$

于是

$$(Ax,\ x)=\left(\sum_{i=1}^{n}y_ie_i,\ \sum_{j=1}^{n}x_je_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= x^T Ax$$

即 $(Ax, x) = x^T Ax$，证毕。

14. 只须证A为H上的闭算子，则由闭图象定理即知A为有界。设$x_n \in H$，且满足

$$x_n \to x_0, \quad Ax_n \to y_0$$

$\forall y \in H$，由条件

$$(Ax_n, y) = (x_n, Ay)$$

令 $n \to \infty$，则有

$$(y_0, y) = (x_0, Ay) = (Ax_0, y), \quad \forall y \in H$$

故 $y_0 = Ax_0$，即A为闭算子。由闭图象定理得证。

15. 由条件 $D(T) = H$，设 $x_n \to x_0$，$Tx_n \to y_0$，则对任意 $y \in H$，有

$$(y_0, y) = \lim_{n\to\infty}(Tx_n, y)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(x_n, Sy)$$

$$= (x_0, Sy)$$

$$= (Tx_0, y)$$

于是 $y_0 = Tx_0$，T为闭算子，由闭图象定理，T为连续。

注　题 14和题15 中H为 Hilbert 空间的条件不能削弱，例如，若记$X=\{x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, \cdots)$；$n$为任意有限数$\}$，按$l^2$中内积，$X$为内积空间，定义线性算子$A: X\to X$，且

$$Ax=(\xi_1, 2\xi_2, \cdots, n\xi_n, 0, \cdots)$$

显然有

$$(Ax, y)=(x, Ay) \quad \forall x, y\in X$$

但是易知A是无界算子。

§ 4.2 Hilbert 空间中的坐标系

1. 当X为实内积空间时，有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y, x+y)\\&=(x, x)+(x, y)+(y, x)+(y, y)\\&=\|x\|^2+\|y\|^2+2(x, y)\end{aligned}$$

故

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$$

$\Leftrightarrow$

$$(x, y)=0$$

即 $x\perp y$。

在复内积空间中，由于

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2Re(x, y)$$

因此结论不成立。

2. 由于 $(x+y,\ x-y)=(x,x)+(y,x)-(x,y)-(y,y)$

$$=\|x\|^2-\|y\|^2$$

所以

$$x+y\perp x-y \iff (x+y,\ x-y)=0$$

$$\iff \|x\|^2=\|y\|^2$$

在 R^2 中，其几何意义是指当平行四边形的边长相等时，则对角线必垂直。

在复空间X中，由条件 $\|x\|=\|y\|$ 只能推出

$$Re(x+y,\ x-y)=0$$

3. 由 $\|x+\lambda y\|^2=(x,\ x)+|\lambda|^2(y,\ y)+2Re\overline{\lambda}(x,\ y)$

及

$$\|x-\lambda y\|^2=(x,\ x)+|\lambda|^2(y,\ y)-2Re\lambda(x,\ y)$$

于是

$$\|x+\lambda y\|=\|x-\lambda y\| \quad (\forall\lambda\in K)$$

$\iff$

$$Re\,\overline{\lambda}\,(x,\ y)=0 \quad (\forall\lambda\in K)$$

令

$$\lambda=\overline{(x,\ y)}$$

则由 $Re\ (x,\ y)\ \overline{(x,\ y)}=0$，即 $|(x,\ y)|^2=0$，所以 $x\perp y$，反之，若 $x\perp y$，则 $(x,y)=0$，于是 $Re\overline{\lambda}(x,y)=0\ (\forall\lambda\in K)$，证毕。

4. “$\Longrightarrow$” 设 $x\perp y$，则对$\forall\lambda\in K$，有

$$\|x+\lambda y\|^2=\|x\|^2+|\lambda|^2\cdot\|y\|^2$$

$$\geqslant \|x\|^2$$

即有

$$\|x+\lambda y\| \geqslant \|x\|$$

"$\Longleftarrow$" 设 $\|x+\lambda y\| \geqslant \|x\|$，$\forall \lambda \in K$ 成立，不妨设 $y \neq \theta$，取 $\lambda = -\frac{1}{2\|y\|^2}\overline{(x, y)}$，则由

$$\|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2 + \lambda(x,y) + \overline{\lambda(x, y)} \geqslant \|x\|^2$$

得

$$\frac{1}{4\|y\|^4}|(x, y)|^2 \cdot \|y\|^2 - \frac{1}{2\|y\|^2} \cdot |(x, y)|^2$$
$$- \frac{1}{2\|y\|^2}|(x,y)|^2 \geqslant 0$$

即有

$$-|(x, y)|^2 \geqslant 0$$

只有

$$(x, y) = 0, \text{ 即 } x \perp y, \text{ 证毕。}$$

5. 参见 §4.1 题 4.

6. 由条件 $M \perp N$，当 $x \in M$，$\forall y \in N$，有 $(x, y) = 0$，即 $x \in N^\perp$，故 $M \subset N^\perp$。同理可证 $N \subset M^\perp$。

7. (Ⅰ) 当 $y \in N^\perp$，因 $M \subset N$，故 $\forall x \in M$ 均有 $(x, y) = 0$，所以 $y \in M^\perp$，即知 $N^\perp \subset M^\perp$。

(Ⅱ) 因 $M^\perp \subset ((M^\perp)^\perp)^\perp$ 显然成立；又因 $M \subset (M^\perp)^\perp$ 成立，故由(Ⅰ)知 $M^\perp \supset ((M^\perp)^\perp)^\perp$。因此 $M^\perp = ((M^\perp)^\perp)^\perp$。

(Ⅲ) 由 $M \subset \overline{M}$ 即有 $M^\perp \supset (\overline{M})^\perp$。当 $y \in M^\perp$ 时，$\forall x \in \overline{M}$，则 $\exists \{x_n\} \subset M$，且 $x_n \to x$，于是由内积连续性

$$(x,\ y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,\ y)=0$$

故 $y\in(\overline{M})^{\perp}$，所以 $M^{\perp}\subset(\overline{M})^{\perp}$，由上证得

$$M^{\perp}=(\overline{M})^{\perp}$$

8. $\forall x\in\overline{M}$，则 $\exists\{x_n\}\subset M$，且有 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$

由条件 $x=x_0+x_1$，$x_0\in M$，$x_1\in M^{\perp}$，于是

$$x_n-x_0\to x-x_0=x_1\in M^{\perp}$$

注意到

$$x_n-x_0\in M$$

故有

$$(x_1,\ x_1)=\lim_{n\to\infty}(x_n-x_0,\ x_1)=0$$

即 $x_1=\theta$，从而 $x=x_0\in M$，M为闭子空间。

9. 记 $Y=\overline{\operatorname{span}M}$，$Y$ 是包含 M 的最小闭子空间，故只须证 $(M^{\perp})^{\perp}=Y$。

事实上，$\forall x\in Y$，有$x_n\in\operatorname{span}M$使$x_n\to x$，$\forall y\in M^{\perp}$，有

$$(x,\ y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,\ y)=0$$

故 $x\in(M^{\perp})^{\perp}$，亦即 $Y\subset(M^{\perp})^{\perp}$。又因 Y 为闭子空间，故有 $Y=(Y^{\perp})^{\perp}$。于是由 $M\subset Y$，即有 $Y^{\perp}\subset M^{\perp}$及 $(M^{\perp})^{\perp}\subset(Y^{\perp})^{\perp}$ $=Y$。所以

$$(M^{\perp})^{\perp}=Y=\overline{\operatorname{span}M}\ .$$

10. 先证 $M\oplus N$为H的线性子空间，$\forall z_1,\ z_2\in M\oplus N$，$\lambda,\ \mu\in K$(数域)，则有 $z_1=x_1+y_1$，$z_2=x_2+y_2$，

其中，x_1，$x_2 \in M$，y_1，$y_2 \in N$，于是

$$\lambda z_1 + \mu z_2 = (\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2)$$

且

$$\lambda x_1 + \mu x_2 \in M，\ \lambda y_1 + \mu y_2 \in N$$

所以，$\lambda z_1 + \mu z_2 \in M \oplus N$，即$M \oplus N$为$H$的线性子空间。

再证$M \oplus N$为闭子空间。

设 $\{\xi_n\} \subset M \oplus N$，且为柯西列，则由 $\xi_n = x_n + y_n$，其中 $x_n \in M$，$y_n \in N$ 及 $\|\xi_n - \xi_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2$ 知$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别为M和N中的柯西列。由于M，N是完备空间中的闭子空间，即为完备子空间，所以

$$\exists x_0 \in M，\ 使 x_n \to x_0，$$

$$\exists y_0 \in N，\ 使 y_n \to y_0，$$

则$\xi_0 \triangleq x_0 + y_0 \in M \oplus N$，且由 $\|\xi_n - \xi_0\| = \|(x_n - x_0) + (y_n - y_0)\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\|$。即知 $\xi_n \to \xi_0$，所以$M \oplus N$为H的完备子空间，即闭子空间。

11．$\forall f(x) \in C[-1, 1]$，令 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

其中

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}，\quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

因为

$$f_1(x) = f_1(-x)，\ f_2(-x) = -f_2(x)$$

所以

$$f_1(x) \in N，\ f_2(x) \in M$$

即有

$$f(x)\in M\oplus N$$

于是 $C[-1,\ 1]\subset M\oplus N$，而 $M\oplus N\subset C[-1,\ 1]$是显然的。故

$$C[-1,\ 1]=M\oplus N$$

另外，$\forall f\in M,\ g\in N$必有$fg\in M$，故

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)\,g(x)\,dx=0.$$

所以 $f\perp g$，由 f，g 的任意性即知 $M=N^{\perp}$，证毕。

12. 因 $L\supset M$，有 $L^{\perp}\subset M^{\perp}$，同理$L^{\perp}\subset N^{\perp}$。于是$L^{\perp}\subset M^{\perp}\cap N^{\perp}$。反之，设 $x\in M^{\perp}\cap N^{\perp}$，则 $\forall t\in L$，$\exists y_1,\ \cdots,\ y_m\in M$，$z_1,\ \cdots,\ z_n\in N$，及$\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_m,\ \mu_1,\ \cdots,\ \mu_n\in K$使得

$$t=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,y_i+\sum_{j=1}^{n}\mu_j z_j$$

于是

$$(x,\ t)=\left(x,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,y_i+\sum_{j=1}^{n}\mu_j z_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\overline{\lambda}_i\,(x,\ y_i)+\sum_{j=1}^{n}\overline{\mu}_j\,(x,\ z_j)=0$$

故

$$x\in L^{\perp},\ \text{即}\ M^{\perp}\cap N^{\perp}\subset L^{\perp}$$

证毕。

*13. “$\Longrightarrow$”若 M 为非零性线泛函 f 的零空间，由泛函的 Riesz 表示定理知$\exists y\in H$，使 $f(x)=(x,\ y)$，$\forall x\in H$，于是

$$M=\{x;\ f(x)=(x,\ y)=0,\ x\in H\}=\{y\}^{\perp}$$

所以由本节题 9 知

$$M^{\perp}=(\{y\}^{\perp})^{\perp}=\mathrm{span}\{y\}$$

是一维空间。

"$\Longleftarrow$" 若 $M^{\perp}$ 是由非零单位元 y 生成的一维子空间，令 $f(x)\triangleq(x,\ y)$，$\forall x\in H$，则显然有

$$f(x)=0 \iff x\perp y$$

即

$$x\in(M^{\perp})^{\perp}=M$$

所以，M是非零线性连续泛函 f 的零空间。证毕。

*14. 设 $x_0=x_{01}+x_{02}$，其中 $x_{01}\in M$，$x_{02}\in M^{\perp}$。则

$$\min\{\|x-x_0\|;\ x\in M\}\leqslant\|x_0-x_{01}\|=\|x_{02}\|$$

另一方面，$\forall x\in M$，有

$$\begin{aligned}\|x-x_0\|^2&=\|x-x_{01}-x_{02}\|^2\\&=\|x-x_{01}\|^2+\|x_{02}\|^2\\&\geqslant\|x_{02}\|^2\end{aligned}$$

所以

$$\min\{\|x-x_0\|;\ x\in M\}\geqslant\|x_{02}\|$$

故有

$$\min\{\|x-x_0\|;\ x\in M\}=\|x_{02}\|$$

若 $\forall y \in M^{\perp}$，且 $\|y\| = 1$，有

$$\begin{aligned} |(x_0, y)| &= |(x_{01}, y) + (x_{02}, y)| \\ &= |(x_{02}, y)| \\ &\leqslant \|x_{02}\| \cdot \|y\| = \|x_{02}\| \end{aligned}$$

于是

$$\max\{|(x_0, y)|; y \in M^{\perp}, \|y\| = 1\} \leqslant \|x_{02}\|$$

如果 $\|x_{02}\| = 0$，则

$$\max\{|(x_0, y)|; y \in M^{\perp}, \|y\| = 1\} = 0 = \|x_{02}\|$$

如果 $\|x_{02}\| \neq 0$，则若取 $y = \dfrac{x_{02}}{\|x_{02}\|}$，有 $\|y\| = 1$ 且

$$\begin{aligned} (x_0, y) &= (x_{01}, y) + (x_{02}, y) \\ &= \left(x_{02}, \frac{x_{02}}{\|x_{02}\|}\right) \\ &= \|x_{02}\| \end{aligned}$$

所以

$$\max\{|(x_0, y)|; y \in M^{\perp}, \|y\| = 1\} \geqslant \|x_{02}\|$$

于是

$$\begin{aligned} &\max\{|(x_0, y)|; y \in M^{\perp}, \|y\| = 1\} \\ &= \|x_{02}\| = \min\{\|x - x_0\|; x \in M\} \end{aligned}$$

证毕。

15. 设 $x_n, x_m \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，因$M$是$H$的凸子集，故

$$\frac{x_n+x_m}{2}\in M \text{ 且 } \left\|\frac{x_n+x_m}{2}\right\|\geqslant d$$

由平行四边形公式，有

$$2\left\|\frac{x_n-x_m}{2}\right\|^2=\|x_n\|^2+\|x_m\|^2-2\left\|\frac{x_n+x_m}{2}\right\|^2$$

$$\leqslant\|x_n\|^2+\|x_m\|^2-2d^2$$

由条件 $\|x_n\|\to d$，$\|x_m\|\to d$，可见当n，m充分大时$\|x_n-x_m\|$可以任意小，即$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为H中 Cauchy 列，而H为完备空间，故 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$在H中收敛。

16. 记 $M=\text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，则$M$为$X$的完备子空间，故 $\forall x\in X$，$x_0=\sum_{k=1}^{n}(x, e_k,)e_k$为 x 在M上投影。又若 $\forall\alpha_i\in K$，记

$$y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$$

则 $y\in M$，于是

$$\|x-x_0\|=d(x, M)$$

$$=\inf_{z\in M}d(x, z)$$

$$\leqslant d(x, y)$$

$$=\|x-y\|$$

即

$$\|x-x_0\|\leqslant\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|$$

证毕。

17. 利用 Cauchy 不等式和 Bessel 不等式，即有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)(y,e_k)|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}|(y,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$$

*18. 由 Bessel 不等式，$\forall x\in X$，若任取 n 个 $\boldsymbol{F}$ 中元素 e_λ 排成一列，不妨设为 e_1，e_2，…，e_n，则有

$$\sum_{i=1}^{n}|(x,\ e_i)|^2\leqslant\|x\|^2$$

于是在 $\boldsymbol{F}$ 中使 $|(x,\ e_\lambda)|\geqslant\frac{\|x\|}{\sqrt{n}}$ 的 e_λ 只能为有限个，记

$$\boldsymbol{F}_n=\left\{e_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\text{ 且 }|(x,\ e_\lambda)|\geqslant\frac{\|x\|}{\sqrt{n}}\right\}$$

及

$$\widehat{\boldsymbol{F}}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{F}_n$$

显然

$\widehat{\boldsymbol{F}}$ 为可列集，且当 $e_\lambda\in\boldsymbol{F}-\widehat{\boldsymbol{F}}$ 时，$(x,\ e_\lambda)=0$，即 x 的所有 Fourier 系数 $(x,\ e_\lambda)$ 中，非零项为至多可列个。

19. 因 H 为可分空间，故可设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 H 之可列稠密子集。设 $\{e_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ 为 H 中任意一簇标准正交系，则 $\forall\lambda\in\Lambda$，$\exists x_n$ 使 $\|x_n-e_\lambda\|<\frac{\sqrt{2}}{2}$。若 Λ 为不可列，则必有 $x_k\in\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及 $\lambda,\ \lambda'\in\Lambda$，$\lambda\neq\lambda'$ 使得

$$\|x_k-e_\lambda\|<\frac{\sqrt{2}}{2},\quad\|x_k-e_{\lambda'}\|<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

于是

$$\|e_\lambda - e_{\lambda'}\| \leqslant \|x_k - e_\lambda\| + \|x_k - e_{\lambda'}\| < \sqrt{2}$$

但由勾股定理有

$$\|e_\lambda - e_{\lambda'}\|^2 = \|e_\lambda\|^2 + \|e_{\lambda'}\|^2 = 2$$

即 $\|e_\lambda - e_{\lambda'}\| = \sqrt{2}$，导出矛盾，说明$H$中任一标准正交系均为至多可列集，证毕。

20．“$\Longrightarrow$”若$\boldsymbol{F} = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$为标准正交基，则由定理4.2.5知 $\forall x \in H$，总有 $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$，故$\boldsymbol{F}$为完备标准正交列。

“$\Longleftarrow$”若$\boldsymbol{F}$为完备标准正交列，即 $\forall x \in H$，有

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x,\ e_n) e_n$$

于是，若有 $x \perp \boldsymbol{F}$，必有 $(x,\ e_n) = 0\ \forall n$，从而 $x = \theta$，故$\boldsymbol{F}$为标准正交基，证毕。

21．（Ⅰ）$\Longrightarrow$（Ⅱ）因$\boldsymbol{F}$为标准正交基，由定理4.2.5，$\forall x \in H$，有

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x,\ e_k) e_k$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (x,\ e_k) e_k$$

而 $\sum_{k=1}^{n} (x,\ e_k) e_k \in E$，故 $x \in \bar{E} = E$，从而$H = E$

（Ⅱ）$\Longrightarrow$（Ⅲ）由条件，$H = E = \overline{\operatorname{span} \boldsymbol{F}}$，即span$\boldsymbol{F}$在$H$

中稠密。故 $\forall x\in H$，$\exists x_n=\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\in \mathrm{span}F$，使得$x_n\to x$。

即

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_ke_k=\sum_{k=1}^{n}a_ke_k$$

由内积的连续性及$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$的标准正交性可得

$$\begin{aligned}(x,\ e_k)&=\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_ie_i,\ e_k\Big)\\&=(a_ke_k,\ e_k)\\&=a_k\quad(k=1,\ 2,\ \cdots)\end{aligned}$$

所以

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,\ e_k)e_k$$

即F为完备标准正交列。

（Ⅲ）$\Longrightarrow$（Ⅰ）由本节题 20 已证。

22. 由条件易知

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2=\|x\|^2<+\infty,\quad\sum_{i=1}^{\infty}|\beta_i|^2=\|y\|^2<+\infty$$

若记

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i,\quad y_n=\sum_{i=1}^{n}\beta_ie_i\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

则

$$(x_n,\ y_n)=\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i,\ \sum_{j=1}^{n}\beta_je_j\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} (e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}$$

利用内积连续性，

$$(x, y) = \lim_{n \to \infty} (x_n, y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta_i}$$

再由 Cauchy 不等式，

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i \overline{\beta_i}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|x\| \cdot \|y\| < +\infty$$

故 $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta_i}$ 绝对收敛。

23. “$\Longrightarrow$” 由本节题22易证。

“$\Longleftarrow$” 若 $\forall x, y \in H$，有

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) \overline{(y, e_n)}$$

取 $y = x$，有

$$\|x\|^2 = (x, x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) \overline{(x, e_n)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,\ e_n)|^2$$

由于$\sum_{i=1}^{n}(x,\ e_i)e_i$ 是 x 在 $\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$上的投影。故

$$\left\| x-\sum_{i=1}^{\infty}(x,\ e_i)e_i \right\|^2=\lim_{n\to\infty}\left\| x-\sum_{i=1}^{n}(x,\ e_i)e_i \right\|^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,\ e_i|^2 \right)$$

$$=0$$

所以 $x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,\ e_i)e_i$，$\forall x\in H$ 成立，由本节题 21知 $\boldsymbol{F}$ 为标准正交基，证毕。

24. “$\Longleftarrow$” 由条件，$\exists x\in H$，使得 $x=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n$，由 Bessel 不等式，$\|x\|^2\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$，故$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ 收敛。

“$\Longrightarrow$” 记 $x_n=\sum_{k=1}^{n}a_ke_k$，则，当 $m>n$时

$$\|x_m-x_n\|^2=\left\| \sum_{k=n+1}^{m}a_ke_k \right\|^2$$

$$=\sum_{k=n+1}^{m}|a_k|^2$$

故知$\{x_n\}$为H中 Cauchy 列，由H之完备性，$\exists x\in H$，使得

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e_k$$

证毕。

25. 先证 $\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$，事实上

$$\|x\|^2-\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2=(x,x)-\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n,\ \sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\right)$$

$$=(x,\ x)-\left(x,\ \sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\right)+\left(x,\ \sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\right)$$

$$-\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n,\ \sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\right)$$

$$=\left(x,\ x-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\right)$$

$$+\left(x-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n,\ \sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\right)$$

$$\leqslant\|x\|\cdot\left\|x-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\right\|+\left\|x-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\right\|$$

$$\cdot\left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\right\|$$

$$=\left(\left\|x-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\right\|\right)\left\{\|x\|+\left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\right\|\right\}$$

$$\leqslant 2\|x\|\cdot\left\|x-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n e_n\right\|\to 0\quad(\text{当}N\to\infty\text{时})$$

所以

$$\| x \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_n |^2$$

再由条件 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$ ，得

$$0 = \lim_{N \to \infty} \left[\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n - \sum_{n=1}^{N} \beta_n e_n \right]$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n - \beta_n) e_n$$

即 $0 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) e_n$，由上面结论便有 $0^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_n - \beta_n |^2$

于是 $\alpha_n = \beta_n \quad (\forall n)$，证毕。

26. 设 $C[-1,1]$为$[-1,1]$上实连续函数全体所成空间，当 $x, y \in C[-1,1]$时，定义内积为 $(x,y) = \int_{-1}^{1} x(t)\, y(t)\, dt$。

因 $x_0 = 1$， $x_1(t) = t$， $x_2(t) = t^2$ 线性无关，故由许密特正交化方法有：

$$e_0 = x_0 / \| x_0 \| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

显然

$$\| e_0 \| = 1 \text{ 且 } (x_1, e_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-1}^{1} t\, dt = 0$$

故可令

$$y_1 = x_1 = t$$

于是

$$\| y_1 \|^2 = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3}$$

取

$$e_1 = \frac{t}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{2} t$$

有

$$\|e_1\| = 1 \text{ 且 } (e_0, e_1) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{2} t \, dt = 0$$

又因为

$$(x_2, e_0) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \, dt = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$(x_2, e_1) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{6}}{2} t^3 \, e dt = 0$$

故可令

$$y_2 = x_2 - (x_2, e_0) e_0 - (x_2, e_1) e_1$$

$$= t^2 - \frac{1}{3}$$

而且

$$\|y_2\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dt = \frac{8}{45}$$

所以取

$$e_2 = y_2 / \|y_2\| = \frac{\sqrt{10}}{4} (3t^2 - 1$$

易知

$$\|e_2\| = 1, \ (e_2, e_0) = 0, \ (e_2, e_1) = 0$$

故

$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} t, \frac{\sqrt{10}}{4} (3t^2 - 1) \right\}$是相应于 $\{1, t, t^2\}$ 的标准正交系。

*27. （Ⅰ）因 $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right|^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dt=1$

且，当$m\neq n$时

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imt}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m+n)t}dt=0$$

所以$\boldsymbol{F}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}$为标准正交列。又由 Weierstrass 三角函数逼近定理可知 span $\boldsymbol{F}$ 在 $L^2[-\pi,\ \pi]$ 中稠密，故$\boldsymbol{F}$是$L^2[-\pi,\ \pi]$的标准正交基。

（Ⅱ）由条件

$$\left\|x(t)-\sum_{k=-n}^{n}C_k e^{ikt}\right\|\to 0\quad(n\to\infty)$$

而$[a,\ b]\subset[-\pi,\ \pi]$，于是

$$\left|\int_a^b\left[x(t)-\sum_{k=-n}^{n}C_k e^{ikt}\right]dt\right|$$

$$\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\left|x(t)-\sum_{k=-n}^{n}C_k e^{tkt}\right|dt$$

$$\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|x(t)-\sum_{k=-n}^{n}C_k e^{ikt}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{2\pi}\cdot\left\|x(t)-\sum_{k=-n}^{n}C_k e^{tkt}\right\|\to 0\quad(n\to\infty)$$

即

$$\int_a^b x(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\sum_{k=-n}^{n}C_k\,e^{ikt}\,dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \int_a^b e^{i k t} dt$$

证毕。

28. 只须讨论 $f=0$ 的情况，设 $\|f_n\| \to 0$，因 $\|g\| \leqslant 1$ 故有

$$|(f_n, g)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|g\| \leqslant \|f_n\| \to 0$$

即

$$(f_n, g) \xrightarrow{\text{一致}} 0, \quad \forall g \in V[\theta, 1]$$

反之，$\forall \varepsilon > 0$，当 n 充分大时，$\forall g \in V[\theta, 1]$ 均有

$$|(f_n, g)| < \varepsilon$$

从而 $\forall g \in H$，只要 $g \neq \theta$，就有

$$\left|\left(f_n, \frac{g}{\|g\|}\right)\right| < \varepsilon$$

即

$$|(f_n, g)| < \varepsilon \cdot \|g\|, \quad \forall g \in H, \text{ 成立}$$

若取 $g = f_n$ 时，当 n 充分大有

$$\|f_n\|^2 < \varepsilon \cdot \|f_n\|$$

或

$$\|f_n\| < \varepsilon$$

证毕。

注　本题说明 H 中强收敛性等价于单位球上一致弱收敛性。其中 $(f_n, g) \xrightarrow{\text{一致}} (f, g)$，一致性表现在收敛的速度与 g 的选取无关。

§ 4.3 Hilbert空间的自共轭性与伴随算子

1. 由定义$F_y(x)=(x,y)$，$\forall x\in H$，是H上的泛函。由于

$$F_y(\alpha x_1+\beta x_2)=(\alpha x_1+\beta x_2,\ y)$$

$$=\alpha(x_1,\ y)+\beta(x_2,\ y)$$

$$=\alpha F_y(x_1)+\beta F_y(x_2)$$

知$F_y(\cdot)$为H上线性泛函。又因为

$$|F_y(x)|=|(x,\ y)|$$

$$\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$$

则

$$\|F_y\|\leqslant\|y\|$$

若令 $x=y$，有

$$\|y\|^2=|(y,\ y)|=|F_y(y)|\leqslant\|F_y\|\ \|y\|$$

故

$$\|F_y\|\geqslant\|y\|$$

于是$\|F_y\|=\|y\|$，即 $F_y(x)=(x,y)$是H上的线性连续泛函。

2. 取 $\{e_n=(0,\cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots);\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$，由于$(l_2)^*=l_2$为 Hilbert 空间，故由 Riesz表示定理，$\forall x\in l_2^*=l_2$.

∞

可设 $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots)$，且 $\sum\limits_{k=1}|\xi_k|^2<+\infty$，于是

$$x(e_n)=(e_n,\ x)=\xi_n\to 0\quad(n\to\infty)$$

即$\{e_n\}$在l_2中弱收敛到零元，但是由$\|e_n\|=1$，显然$\{e_n\}$不强收敛到零元。

若有 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，即 $\forall y \in H$，有 $(x_n, y) \to (x_0, y)$，特别当取$y = x_0$时，有 $(x_n, x_0) \to (x_0, x_0)$，于是

$$\|x_n - x_0\|^2 = (x_n - x_0, x_n - x_0)$$

$$= \|x_n\|^2 + \|x_0\|^2 - (x_n, x_0) - (x_0, x_n)$$

$$\to 2\|x_0\|^2 - 2\|x_0\|^2 = 0$$

故当 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，$\|x_n\| \to \|x_0\|$时，必有 $x_n \to x_0$，证毕。

3. 设 $\{g_n\}$为H中任一弱 Cauchy 列，由定义，$\forall f \in H$ $\{(f, g_n)\}$为 Cauchy 数列，因而有界，由一致有界性原理便知$\{g_n\}$为有界点列。

$\forall f \in H$，记 $g(f) \triangleq \lim\limits_{n\to\infty}(f, g_n)$，由于 $|g(f)|$

$= \lim\limits_{n\to\infty}|(f, g_n)| \leqslant \|f\| \cdot M$，其中 M为 $\{\|g_n\|\}$ 的任一上界。即 $g(f)$为H 上有界线性泛函，由 Riesz 定理，$\exists g \in H$，使

$\lim\limits_{n\to\infty}(f, g_n) = g(f) = (f, g)$，$\forall f \in H$. 于是$\{g_n\}$在$H$中存在弱极限，故$H$为弱完备，证毕。

4. 由于自反空间的有界集必为弱列紧集，即自反空间中任一(强) 有界点列都含有弱收敛的子列。Hilbert 空间均为自反空间，故H中(强)有界点列$\{x_n\}$必含有弱收敛子列$\{x_{n_k}\}$，证毕。

5. 因$\varphi(x, y)$关于y是共轭线性的，故$\overline{\varphi(x, y)}$关于y是线性的。固定 $x \in H$，则 $\overline{\varphi(x, y)}$为H上的有界线性泛函，由 Riesz 表示定理，$\exists$唯一$x^* \in H$，使

$$\overline{\varphi(x, y)} = (y, x^*)，\ \forall y \in H$$

即

$$\varphi(x,\ y)=(x^*,\ y),\quad \forall y\in H$$

作映射 A：$x\mapsto x^*$，有

$$\varphi(x,\ y)=(x^*,\ y)=(Ax,\ y),\quad \forall y\in H$$

由于

$$\begin{aligned}(A(\alpha x_1+\beta x_2),\ y)&=\varphi(\alpha x_1+\beta x_2,\ y)\\&=\alpha\varphi(x_1,\ y)+\beta\varphi(x_2,\ y)\\&=\alpha(Ax_1,\ y)+\beta(Ax_2,\ y)\\&=(\alpha Ax_1+\beta Ax_2,\ y),\quad \forall y\in H\end{aligned}$$

即

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2$$

又因

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2&=(Ax,\ Ax)\\&=\varphi(x,\ Ax)\\&\leqslant\|\varphi\|\cdot\|x\|\cdot\|Ax\|\end{aligned}$$

即

$$\|A\|\leqslant\|\varphi\|$$

所以，$A\in B(H)$.

再由 Schwartz 不等式，有

$$\begin{aligned}|\varphi(x,\ y)|&=|(Ax,\ y)|\\&\leqslant\|Ax\|\cdot\|y\|\\&\leqslant\|A\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|\quad \forall x,\ y\in H\end{aligned}$$

故 $\|\varphi\| \leqslant \|A\|$，于是$\|\varphi\| = \|A\|$. 若设 $T \in B(H)$，且有

$$\varphi(x,\ y) = (Tx,\ y)$$

则

$$(Ax,\ y) = (Tx,\ y),\quad \forall x,\ y \in H$$

即

$$((A-T)x,\ y) = 0,\quad \forall x,\ y \in H$$

取 $y = (A-T)x$，得

$$\|(A-T)x\|^2 = 0,\quad \forall x \in H$$

因此 $(A-T)x = \theta$，$\forall x \in H$，故 $A-T=0$，所以 $A=T$，证毕。

注 1　若$\varphi(\cdot,\cdot)$为$H \times H \to K$的有界双线性泛函，由定义有

$$\|\varphi\| = \sup_{\substack{x \neq \theta \\ y \neq \theta}} \frac{|\varphi(x,\ y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

$$= \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ \|y\| \leqslant 1}} |\varphi(x,\ y)| = \sup_{\substack{\|x\| = 1 \\ \|y\| = 1}} |\varphi(x,\ y)|$$

注 2　对双线性泛函，易证：有界性 $\Longleftrightarrow$连续性。

6. 由本节上题知存在唯一 $A \in B(H)$，且 $\varphi(x,\ y) = (Ax, y)$. 利用厄米性，

$$(Ax,\ y) = \varphi(x,\ y) = \overline{\varphi(y,\ x)}$$

$$= \overline{(Ay,\ x)}$$

$$= (x,\ Ay),\quad \forall x,\ y \in H$$

即 $A = A^*$，A 为自伴算子，证毕。

7．设 $Ax=x$，则

$$\|x\|^2=|(Ax,\ x)|=|(x,\ A^*x)|$$

$$\leqslant\|x\|\cdot\|A^*x\|\leqslant\|x\|^2$$

于是

$$|(x,\ A^*x)|=\|x\|\cdot\|A^*x\|$$

即 Schwartz 不等式中等号成立，由§4.1题 5 便知x与 A^*x 线性相关，故可设 $A^*x=\lambda x$，则

$$(x,\ x)=(Ax,\ x)$$

$$=(x,\ A^*x)$$

$$=\lambda\,(x,\ x)$$

即 $\lambda=1$，因此 $A^*x=x$.由上讨论：

$$\{x;\ Ax=x\}\subset\{x;\ A^*x=x\}$$

$$\subset\{x;\ A^{**}x=x\}$$

$$\subset\{x;\ Ax=x\}$$

所以

$$\{x;\ Ax=x\}=\{x;\ A^*x=x\}$$

证毕。

8．令 $B\triangleq A+A^*$，有

$$(Bx,\ x)=((A+A^*)x,\ x)$$

$$=(Ax,\ x)+(A^*x,\ x)$$

$$=(Ax,\ x)+\overline{(Ax,\ x)}$$

$$=2Re(Ax,\ x)$$

于是,若 $B=\theta$, 即 $A=-A^*$时, 有 $Re(Ax,x)=0$, $\forall x\in H$, 反之, 因H为复 Hilbert 空间, 故由$(Bx,\ x)=0$, $\forall x\in H$, 即知 $B=\theta$. 于是由 $Re(Ax,\ x)=0$, 就可推得 $A=-A^*$, 证毕。

9. 由 $\|T_n^*-T^*\|=\|(T_n-T)^*\|$

$$=\|T_n-T\|\to 0$$

即知 $T_n^*\to T^*$, 证毕。

10. 因 $T\in B(l^2)$, 故 $\exists\ T^*\in B(l^2)$使得 $\forall x,\ y\in l^2$, 有 $(Tx,\ y)=(x,\ T^*y)$, 其中 $x=(\xi_1,\ \xi_2,\cdots)$ $y=(\eta_1,\eta_2,\ \cdots)$. 若设 $T^*y=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)$, 则

$$(Tx,\ y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_{i+1}$$

$$(x,\ T^*y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\zeta_i$$

且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_{i+1}=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\zeta_i$$

于是, $\zeta_i=\eta_{i+1}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots)$, 即

$$T^*y=(\eta_2,\ \eta_3,\ \cdots)\in l^2$$

故 T^*是$l^2\to l^2$ 的左移算子。

11. 由于 $(Ax,\ y)=(x,\ A^*y)$, $\forall x,\ y\in l^2$, 即

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}a_{j\,i}x_i\Big)\,\overline{y}_j \equiv \sum_{i-1}^{\infty}x_i\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\bar{a}^{*}_{i\,j}\overline{y}_j\Big)$$

或

$$\sum_{i\,,\,j=1}^{\infty} a_{j\,i}x_i\overline{y}_j = \sum_{i\,,\,j=1}^{\infty} \bar{a}^{*}_{i\,j}x_i\,\overline{y}_j \quad ,$$

$$\forall x,\ y\in l^2$$

所以 $a_{j\,i}=\bar{a}^{*}_{i\,j}$，即 $\bar{a}_{j\,i}=a^{*}_{i\,j}$ 证毕。

12. 先证 $A\in B(H)$. 因为由内积连续性有

$$(A(\alpha x_1+\beta x_2),\ y)=\lim_{n\to\infty}(A_n(\alpha x_1+\beta x_2),\ y)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\alpha A_n x_1,\ y)+\lim_{n\to\infty}(\beta A_n x_2,\ y)$$

$$=(\alpha Ax_1,\ y)+(\beta Ax_2,\ y)$$

$$=(\alpha Ax_1+\beta Ax_2,\ y)\,,\ \forall y\in H\text{成立}$$

所以

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Ax_1+\beta Ax_2,\ \ \forall x_1,\ x_2\in H\text{成立}.$$

即 A为$H\to H$的线性算子。由条件，若取定$x\in H$，则

$$\lim_{n\to\infty}(A_n x,\ y)=(Ax,\ y),\ \ \forall y\in H$$

即

$$A_n x\xrightarrow{w}Ax$$

于是 $\{\|A_n x\|\}$为有界集。再由共鸣定理知 $\{\|A_n\|\}$ 为有界集，即 $\exists C>0$，使 $\|A_n\|\leqslant C$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，于是

$$|(Ax,\ y)|=\Big|\lim_{n\to\infty}(A_n x,\ y)\Big|$$

$$\leqslant \sup_n (\|A_n\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|)$$

$$\leqslant C \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

故 $\|A\| \leqslant C$，所以 A为 $H \to H$ 的有界线性算子。又因 $(A_n x, x)$是实数 $(\forall x \in H)$，故 $(Ax, x) = \lim_{n\to\infty} (A_n x, x)$ 为实数，即 A为自伴算子，证毕。

13. “$\Longrightarrow$” 显然成立。

“$\Longleftarrow$” 若H为复空间，则由 §4.1 题12已证；现设H为实 Hilbert 空间，则因A为自伴算子，可直接验证有

$$(Ax, y) = \frac{1}{4}[(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)]$$

于是，代入条件 $(Ax, x) = 0$， $\forall x \in H$，即有

$$(Ax, y) = 0, \quad \forall x, y \in H$$

易知 $A = \theta$，证毕。

*14. 令 $K = \max\{|m|, |M|\}$，由于

$$|m| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \leqslant \|A\|$$

$$|M| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \leqslant \|A\|$$

故 $K \leqslant \|A\|$， $\forall \lambda > 0$，易证

$$\|Ax\|^2 = \frac{1}{4}\left[\left(A\left(\lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax\right), \lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax\right)\right.$$

$$\left. - \left(A\left(\lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax\right), \lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax\right)\right]$$

因此

$$\|Ax\|^2 \leqslant \frac{1}{4}K\left(\|\lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax\|^2 + \|\lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}K\left(\lambda^2 \|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Ax\|^2 \right)$$

不妨设 $x \neq 0$，令 $\lambda = \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{2}}$，则得

$$\|Ax\|^2 \leqslant \frac{1}{2}K\left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \cdot \|x\|^2 + \frac{\|x\|}{\|Ax\|} \cdot \|Ax\|^2 \right)$$

$$= K \cdot \|Ax\| \cdot \|x\|$$

所以$\|Ax\| \leqslant K\|x\|$，即 $\|A\| \leqslant K$，于是 $\|A\| = K$，证毕。

15. 由条件，$\forall \lambda \in C$，有

$$0 \leqslant (A(x+\lambda y),\ x+\lambda y)$$

$$= (Ax,\ x) + \overline{\lambda}\,(Ax,\ y)$$

$$+ \lambda(Ay,\ x) + \lambda\overline{\lambda}\,(Ay,\ y)$$

取

$$\lambda = -\frac{(Ax,\ y)}{(Ay,\ y)}$$

其中 $y \neq \theta$，$A \neq 0$

则

$$(Ax,\ x) - \frac{|(Ax,\ y)|^2}{(Ay,\ y)} - \frac{(Ax,\ y)(Ay,\ x)}{(Ay,\ y)}$$

$$+ \frac{|(Ax,\ y)|^2}{(Ay,\ y)} \geqslant 0$$

即

$$(Ax,\ x) \geqslant \frac{(Ax,\ y)(Ay,\ x)}{(Ay,\ y)}$$

$$= \frac{(Ax,\ y)(y,\ Ax)}{(Ay,\ y)}$$

$$=\frac{|(Ax,\ y)|^2}{(Ay,\ y)}$$

所以

$$|(Ax,\ y)|^2\leqslant(Ax,\ x)(Ay,\ y)$$

当 $y=\theta$，或 $A=O$时，上式显然成立，证毕。

16. 由条件有 $\|x\|^2\leqslant\frac{1}{\alpha_0}(Ax,\ x)$，若 $Ax=\theta$，则仅有 $x=\theta$，即 $N(A)=\{\theta\}$，故A是一一映射，A^{-1}：$R(A)\to X$存在。$\forall y\in R(A)$，$\exists x\in X$，使 $y=Ax$，且

$$\|x\|^2=(x,\ x)\leqslant\frac{1}{\alpha_0}(Ax,\ x)$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha_0}\|Ax\|\cdot\|x\|$$

即

$$\|x\|\leqslant\frac{1}{\alpha_0}\|y\| \qquad (1)$$

现证 $\overline{R(A)}=X$，若不然，设 $\overline{R(A)}\neq X$，则可取 $x_0\in\overline{R(A)}^{\perp}$且 $x_0\neq0$，有

$$(x,\ Ax_0)=(Ax,\ x_0)=0,\ \forall x\in X$$

所以 $Ax_0=\theta$，即 $x_0=\theta$，导出矛盾，故有 $\overline{R(A)}=X$.

再证 $R(A)=X$，$\forall y_0\in X$，则$\exists y_n\in R(A)$，使 $y_n\to y_0$

于是$\exists x_n\in X$，有 $y_n=Ax_n$，由(1)式

$$\|x_n-x_m\|\leqslant\frac{1}{\alpha_0}\|y_n-y_m\|$$

因$\{y_n\}$ 收敛，故 $\{x_n\}$为 Banach 空间X中 Cauchy 列，则 $\exists x_0\in X$，使 $x_n\to x_0$. 由 A 之连续性，$Ax_n\to Ax_0$. 但是 $Ax_n=y_n\to y_0$，则$y_0=Ax_0$，即$x_0\in R(A)$. 所以$R(A)=X$，由有界逆算子定理，便知 $A^{-1}\in B(X)$，且 $\forall y\in X$，

$\|A^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{\alpha_0}\|y\|$，即 $\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\alpha_0}$，证毕。

*17. 易证 $(x, y)_J \triangleq (Jx, y)$ 是H空间中内积。

（I）若$\{x_n\}$为H_J中任一 Cauchy 列，则由本节题16知，

$\exists \alpha_0 > 0$，使 $\|x\|^2 \leqslant \frac{1}{\alpha_0}(Jx, x) = \frac{1}{\alpha_0}(x, x)_J = \frac{1}{\alpha_0}\|x\|_J^2$，

$\forall x \in H$成立，于是

$$\|x_n - x_m\|^2 \leqslant \frac{1}{\alpha_0}\|x_n - x_m\|_J^2$$

即$\{x_n\}$ 为H中Cauchy列。因H完备，故$\exists x_0 \in H$，使 $x_n \to x_0$. 由 J 的连续性，$Jx_n \to Jx_0$，于是

$$\|x_n - x_0\|_J^2 = (x_n - x_0, x_n - x_0)_J$$

$$= (J(x_n - x_0), x_n - x_0)$$

$$\leqslant \|J(x_n - x_0)\| \cdot \|x_n - x_0\| \to 0$$

即 H_J 为完备内积空间。

（II）“$\Longrightarrow$” 若$A \in B(H_J)$，且A为H_J上自伴算子，即

$$(Ax, y)_J = (x, Ay)_J, \quad \forall x, y \in H$$

亦即

$$(JAx, y) = (Jx, Ay)$$

$$= (A^*Jx, y), \quad \forall x, y \in H$$

于是 $JA = A^*J$.

“$\Longleftarrow$” 若有$JA = A^*J$，则 $\forall x, y \in H$，

$$(JAx, y) = (A^*\tilde{J}x, y)$$

$$= (Jx, A'y)$$

即

$$(Ax,\ y)_1=(x,\ Ay)_1$$

故A为H_1上自伴算子，证毕。

*18.（Ⅰ）因

$$\|V(\{x,\ y\})\|^2=\|\{-y,\ x\}\|^2$$

$$=\|y\|_1{}^2+\|x\|^2=\|\{x,\ y\}\|^2$$

故

$V\in B(H\times H_1,\ H_1\times H)$ 且 $\|V\|=1$.

（Ⅱ）因

$$(V(\{x,\ y\}),\ \{y_1,\ x_1\})$$

$$=(\{-y,\ x\},\ \{y_1,\ x_1\})$$

$$=-(y,\ y_1)_1+(x,\ x_1)$$

$$=(\{x,\ y\},\ \{x_1,\ -y_1\})$$

由定义

$$V^*(\{y_1,\ x_1\})=\{x_1,\ -y_1\}$$

且

$$\|V^*\|=\|V\|=1$$

（Ⅲ）因

$$VV^*(\{y,\ x\})=V(\{x,\ -y\})$$

$$=\{y,\ x\},\quad \forall\{y,\ x\}\in H_1\times H$$

故

$$VV^*=I_{H_1\times H}$$

同理可证

$$V^*V = I_{H\times H_1}$$

证毕。

*19. 对于复内积空间，φ 是连续的；对于实内积空间，若 φ 是厄米 (Hermite) 的，则 φ是连续的，但一般情况下，φ不一定连续。

(i) 先证

$$\sup_{x\neq 0}\frac{|\varphi(x,\ x)|}{\|x\|^2}=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|\varphi(x,\ x)|$$

$$=\sup_{\|x\|=1}|\varphi(x,\ x)|$$

事实上，显然有

$$\sup_{x\neq 0}\frac{|\varphi(x,\ x)|}{\|x\|^2}\geqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}\frac{|\varphi(x,\ x)|}{\|x\|^2}$$

$$\geqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}|\varphi(x,\ x)|$$

$$\geqslant\sup_{\|x\|=1}|\varphi(x,\ x)|$$

另一方面，$\forall y\neq 0$，有

$$\frac{|\varphi(y,\ y)|}{\|y\|^2}=\left|\varphi\left(\frac{y}{\|y\|},\ \frac{y}{\|y\|}\right)\right|$$

$$\leqslant\sup_{\|x\|=1}|\varphi(x,\ x)|$$

于是

$$\sup_{y\neq 0}\frac{|\varphi(y,\ y)|}{\|y\|^2}=\sup_{x\neq 0}\frac{|\varphi(x,\ x)|}{\|x\|^2}\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}|\varphi(x,\ x)|$$

故所证等式成立，记

$$K=\sup_{\|x\|=1}|\varphi(x,\ x)|$$

(ii) 若记 $M=\{\{x,\ y\};\ \|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1\}$，其中$\{x,\ y\}\in X\times X$。由于，当$\|x\|\leqslant 1$，$\|y\|\leqslant 1$时

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \|x+y\|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} (\|x\| + \|y\|) \leqslant 1$$

即

$$M \subset \left\{ \{x, y\}; \quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leqslant 1 \right\}$$

同理有

$$M \subset \left\{ \{x, y\}; \quad \left\| \frac{x-y}{2} \right\| \leqslant 1 \right\}$$

$$M \subset \left\{ \{x, y\}; \quad \left\| \frac{x+iy}{2} \right\| \leqslant 1 \right\}$$

$$M \subset \left\{ \{x, y\}; \quad \left\| \frac{x-iy}{2} \right\| \leqslant 1 \right\}$$

下面分别对复、实内积空间证明前述结论。

设X为复内积空间，易知有

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} [\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y)$$

$$+ i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy)]$$

则

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1} |\varphi(x, y)| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1} \frac{1}{4} [|\varphi(x+y, x+y)|$$

$$+ |\varphi(x-y, x-y)|$$

$$+ |\varphi(x+iy, x+iy)|$$

$$+ |\varphi(x-iy, x-iy)|]$$

$$\leqslant \sup_{\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1} \left| \varphi \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right) \right|$$

$$+\sup_{\left\|\frac{x-y}{2}\right\|<1}\left|\varphi\left(\frac{x-x}{2},\frac{x-y}{2}\right)\right|$$

$$+\sup_{\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|<1}\left|\varphi\left(\frac{x+iy}{2},\frac{x+iy}{2}\right)\right|$$

$$+\sup_{\left\|\frac{x-iy}{2}\right\|<1}\left|\varphi\left(\frac{x-iy}{2},\frac{x-iy}{2}\right)\right|$$

$$=4\sup_{\|x\|<1}|\varphi(x,\ x)|=4K$$

故 $\|\varphi\|\leqslant 4K$，φ是连续的双线性泛函。

若X为实内积空间，且是厄米的，即$\varphi(x,\ y)=\overline{\varphi(y,\ x)}$，易直接验证有

$$\varphi(x,\ y)=\frac{1}{4}[\varphi(x+y,\ x+y)-\varphi(x-y,\ x-y)]$$

于是，当$\|x\|\leqslant 1$，$\|y\|\leqslant 1$时，有

$$\sup_{\|x\|<1,\ \|y\|<1}|\varphi(x,\ y)|\leqslant\sup_{\|x\|<1,\ \|y\|<1}\frac{1}{4}[|\varphi(x+y,\ x+y)|+|\varphi(x-y,\ x-y|]$$

$$=\sup_{\|x\|<1,\ \|y\|<1}\left[\left|\varphi\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x+y}{2}\right)\right|+\left|\varphi\left(\frac{x-y}{2},\ \frac{x-y}{2}\right)\right|\right]$$

$$\leqslant\sup_{\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1}\left|\varphi\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x+y}{2}\right)\right|+\sup_{\left\|\frac{x-y}{2}\right\|<1}\left|\varphi\left(\frac{x-y}{2},\ \frac{x-y}{2}\right)\right|$$

$$=2\sup_{\|x\|\leqslant 1}|\varphi(x,\ x)|=2K$$

故 $\|\varphi\|\leqslant 2K$，φ 是连续的双线性泛函。

若X为一般实内积空间，φ 不一定连续。例如，若令

$$X\overset{\Delta}{=}\left\{x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots);\ \xi_n\in R,\ \sum_{n=1}^{\infty}|n\xi_n|^2<+\infty\right\}$$

并定义内积为 $\forall x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots),y=(\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots)\in X$，有

$$(x,\ y)\overset{\Delta}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n$$

设有双线性泛函

$$\varphi(x,\ y)\overset{\Delta}{=}\sum_{n=1}^{\infty}n(\xi_{2n}\eta_{2n-1}-\xi_{2n-1}\eta_{2n})$$

虽有 $\varphi(x,\ x)=0$，$\forall x\in X$，但是可证φ 不连续。因为，找不到常数K，使 $\forall x,\ y\in X$，都有

$$|\varphi(x,\ y)|\leqslant K\|x\|\cdot\|y\|$$

如取

$$x=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ \cdots)$$
$$\text{第}2N\text{位}$$

$$y=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ \cdots)$$
$$\text{第}2N\text{位}$$

于是 $\varphi(x,\ y)=2N$，其中 N是任意取定的自然数，且

$$\|x\|=\|y\|=\sqrt{2}$$

故使 $|\varphi(x,y)|\leqslant K\cdot\|x\|\cdot\|y\|$，$\forall x,\ y\in X$的常数$K$不存在，

证毕。

20. 因为 P_1，P_2 均为投影算子，于是

$$(P_1+P_2-P_1P_2)^*=P_1^*+P_2^*-(P_1P_2)^*$$
$$=P_1^*+P_2^*-P_2^*P_1^*$$

$$=P_1+P_2-P_2P,$$

另一方面，由条件 $P_1+P_2-P_1P_2$ 为投影算子，故

$$(P_1+P_2-P_1P_2)^*=P_1+P_2-P_1P_2$$

因此，比较两式即得

$$P_1P_2=P_2P_1$$

21. (Ⅰ) $P_Lx=\sum_{i=1}^{n}(x,\ e_i)e_i,\quad \forall x\in H$

(Ⅱ) $P_Lx=x\Longleftrightarrow\ x\in L$

(Ⅲ) $P_Lx=\theta\ \Longleftrightarrow\ x\in L^{\perp}$.

22. "$\Longrightarrow$" 由$P=P^*=P^2$，即可证明。

"$\Longleftarrow$" 因 $(Px,\ x)=\|Px\|^2\geqslant 0,\ \forall x\in H$，故$P$为自伴算子。再证$P$具有幂等性。由条件 $(Px,\ x)=\|Px\|^2$ $=(Px,\ Px)=(P^2x,\ x),\ \forall x\in H$成立，故由 §4.1 题12即知 $P=P^2$，所以P为投影算子，证毕。

但若H为实空间，命题 不成立。例如，令 $H=R^2$，取

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

P不是对称阵，故 P不是自伴的，从而 P 必不为投影算子，但易计算得

$$Px=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2\\ \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\end{pmatrix},\quad \|Px\|^2=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

$$(Px,\ x)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

其中，$x=(x_1,\ x_2)^T$. 可见虽有 $\|Px\|^2=(Px,x)$，$\forall x\in R^2$，但P 不为投影算子，证毕。

*23. 由条件P_1，P_2为投影算子，且 $P_1P_2=P_2P_1$，于是

$$\begin{aligned}(P_1+P_2-P_1P_2)^*&=P_1^*+P_2^*-P_2^*P_1^*\\&=P_1+P_2-P_2P_1\\&=P_1+P_2-P_1P_2\end{aligned}$$

即 $P=P_1+P_2-P_1P_2$是自伴算子，又因

$$\begin{aligned}(P_1+P_2-P_1P_2)^2=&P_1^2+P_1P_2-P_1^2P_2+P_2P_1\\&+P_2^2-P_2P_1P_2-P_1P_2P_1\\&-P_1P_2P_2+P_1P_2P_1P_2\\=&P_1+P_2-P_1P_2\end{aligned}$$

所以 P为幂等的自伴算子，即为投影算子。

（Ⅰ）因 $PP_1=(P_1+P_2-P_1P_2)P_1$

$$=P_1^2+P_2P_1-P_1P_2P_1=P_1$$

于是

$$\begin{aligned}(P_1x,\ x)=\|P_1x\|^2=\|PP_1x\|^2=\|P_1Px\|^2\\\leqslant(\|P_1\|\cdot\|Px\|)^2\leqslant\|Px\|^2\\=(Px,\ x),\quad\forall x\in H\end{aligned}$$

所以 $P\geqslant P_1$，同理可证 $P\geqslant P_2$.

（Ⅱ）若设$Q\geqslant P_1$，$Q\geqslant P_2$，记Q的投影子空间为M，P_1的投影子空间为L_1，则当$x\in L_1$时，有

$$\|Qx\|^2=(Qx,\ x)\geqslant(P_1x,\ x)$$

$$=\|P_1x\|^2=\|x\|^2$$

$$=\|(x-Qx)+Qx\|^2$$

$$=\|x-Qx\|^2+\|Qx\|^2$$

故 $\|x-Qx\|=0$，即 $Qx=x$. 所以 $x\in M$，即

$$L_1\subset M$$

$\forall x\in H$，有 $P_1x\in L_1\subset M$，即

$$QP_1x=P_1x$$

于是 $QP_1=P_1$，同理可证 $QP_2=P_2$. 因此

$$QP=Q(P_1+P_2-P_1P_2)$$

$$=QP_1+QP_2-QP_1P_2$$

$$=P_1+P_2-P_1P_2=P$$

易知 $Q\geqslant P$，证毕。

24.（Ⅰ）“$\Longrightarrow$” 若$P_L\perp P_M$，即$P_LP_M=O$，则$\forall x\in M$，

$$P_Lx=P_LP_Mx=O$$

故

$$x\perp L，\text{即 } L\perp M.$$

“$\Longleftarrow$” 若 $L\perp M$，则 $\forall x\in H$，$P_Mx\in M$，即 $P_Mx\perp L$. 从而$P_L(P_Mx)=\theta$，即 $P_LP_M=O$，同理$P_MP_L=O$，所以

$$P_L\perp P_M$$

（Ⅱ）“$\Longleftarrow$”设P_L+P_M是投影算子，则

$$P_L+P_M=(P_L+P_M)^2$$

$$=P_L^2+P_LP_M+P_MP_L+P_M^2$$

$$=P_L+P_LP_M+P_MP_L+P_M$$

即

$$P_LP_M+P_MP_L=O$$

两边左(右)乘上P_L，有

$$P_LP_M+P_LP_MP_L=O,\quad P_LP_MP_L+P_MP_L=O$$

于是

$$P_LP_M=P_MP_L$$

故

$$P_LP_M=P_MP_L=O$$

“$\Longrightarrow$”若$P_L\perp P_M$，即 $P_LP_M=P_MP_L=O$，因此

$$(P_L+P_M)^2=P_L^2+P_M^2=P_L+P_M$$

而 P_L+P_M 显然是有界自伴算子，故为投影算子。

$\forall x\in L$，有$x\perp M$，故$(P_L+P_M)x=P_Lx+P_Mx=x$，

同理，若 $y\in M$，$(P_L+P_M)y=y$，则当 $x\in L\oplus M$ 时，有

$$(P_L+P_M)x=x$$

又若 $z\perp(L\oplus M)$，有 $z\perp L$，$z\perp M$，故

$$(P_L+P_M)z=P_Lz+P_Mz=\theta$$

于是，$\forall x\in H$，有 $x=P_{L\oplus M}x+z$，其中 $z\perp L\oplus M$ 所以

$$(P_L+P_M)x=P_{L\oplus M}x$$

即

$$P_L+P_M=P_{L\oplus M}$$

证毕。

25. 设 $|\lambda_k|\leqslant M \quad (k=1, 2, \cdots)$, L_k 是 P_k 的投影子空间，记

$$\overline{Q}_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k P_k,\ Q_n=\sum_{k=1}^{n}P_k$$

故 Q_n为投影算子。因为

$$\sum_{k=1}^{n}\|\lambda_k P_k x\|^2=\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k P_k x\right\|^2$$

$$\leqslant M^2\cdot\left\|\sum_{k=1}^{n}P_k x\right\|^2$$

$$\leqslant M^2\cdot\|Q_n x\|^2$$

$$\leqslant M^2\cdot\|x\|^2$$

即 $\sum_{k=1}^{\infty}\|\lambda_k P_k x\|^2$ 是收敛级数，故 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\sum\limits_{k=m+1}^{n}\|\lambda_k P_k x\|^2=0$.

由勾股定理

$$\|\overline{Q}_n x-\overline{Q}_m x\|^2=\left\|\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k P_k x\right\|^2$$

$$=\sum_{k=m+1}^{n}\|\lambda_k P_k x\|^2\to 0$$

即 $\{\overline{Q}_n x\}$ 为H中基本列。由H的完备性，存在极限点，记

$$Ax\triangleq\lim_{n\to\infty}\overline{Q}_n x$$

即

$$A=(\text{强})\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k P_k=(\text{强})\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k P_k$$

显然 A是线性算子。又由

$$\|Ax\|^2=\lim_{n\to\infty}\|\vec{Q}_n x\|^2$$

$$\leqslant M^2\cdot\lim_{n\to\infty}\|Q_n x\|^2$$

$$\leqslant M^2\cdot\|x\|^2$$

即 $\|A\|\leqslant M$，所以$A\in B(H)$，证毕。

26. （Ⅰ）$\Longrightarrow$ （Ⅱ）因 $\|P_1x\|=\|P_1P_2x\|\leqslant\|P_1\|\cdot\|P_2x\|$

$$\leqslant\|P_2x\|$$

（Ⅱ）$\Longrightarrow$ （Ⅲ）$(P_1x,\ x)=\|P_1x\|^2\leqslant\|P_2x\|^2$

$$=(P_2x,\ x)$$

所以 $P_1\leqslant P_2$.

（Ⅲ）$\Longrightarrow$ （Ⅳ） $\forall x\in N(P_2)$，则$P_2x=\theta$，故 $\|P_1x\|^2\leqslant(P_2x,\ x)=0$，于是 $P_1x=\theta$，$x\in N(P_1)$，所以 $N(P_2)\subset N(P_1)$.

（Ⅳ）$\Longrightarrow$ （Ⅴ）因$R(P_1)=N(P_1)^{\perp}$，$R(P_2)=N(P_2)^{\perp}$，故有

$$R(P_1)\subset R(P_2)$$

（Ⅴ）$\Longrightarrow$（Ⅰ） $\forall x\in H$，$P_1x\in R(P_1)\subset R(P_2)$，故 $P_2(P_1x)=P_1x$，

即 $P_2P_1=P_1$. 因 P_1为自伴算子，则 $P_1P_2=P_2P_1=P_1$，证毕。

27. （Ⅰ）若$P_1P_2=P_2P_1$，记 $P=P_1P_2$，则

$P^2=(P_1P_2)(P_1P_2)=P_1^2P_2^2=P_1P_2=P$，故$P$为自伴的，幂等的，即$P$为投影算子。且易证 $R(P)=R(P_1)\cap R(P_2)$.

反之，若 $P=P_1P_2$ 是 H上的投影算子，由自伴性即知

$$P_1P_2=P_2P_1$$

（Ⅱ）若 $P=P_2-P_1$是一投影算子，则

$$P_2-P_1=(P_2-P_1)^2=P_2^2-P_2P_1-P_1P_2+P_1^2$$

化简得

$$P_1P_2+P_2P_1=2P_1$$

先左乘 P_2，再右乘 P_2，便得

$$P_2P_1P_2+P_2P_1=2P_2P_1$$

$$P_1P_2+P_2P_1P_2=2P_1P_2$$

故

$$P_2P_1P_2=P_2P_1,\ P_2P_1P_2=P_1P_2$$

于是

$$P_2P_1=P_1P_2=P_1$$

即

$$R(P_1)\subset R(P_2)$$

反之，若 $R(P_1)\subset R(P_2)$，由本节题26知 $P_1P_2=P_2P_1=P_1$ 即 $P_1P_2+P_2P_1=2P_1$. 这说明 $P=P_2-P_1$是幂等的，显然P又是自伴的，故P为投影算子。

注 $P=P_2-P_1$ 的投影子空间 $R(P)$为 $R(P_1)$在 $R(P_2)$中的正交补。

28.（Ⅰ）$\forall x\in N(A)$，$y\in Y$，则 $A^*y\in R(A^*)\subset X$

且

$$(x,\ A^*y)=(Ax,\ y)=0$$

即

$$x\in R(A^*)^{\perp}$$

又若

$$\forall x\in R(A^*)^{\perp},\ \forall y\in Y$$

则

$$(Ax,\ y)=(x,\ A^*y)=0$$

即

$$Ax=\theta,\ x\in N(A)$$

从而

$$N(A)=R(A^*)^{\perp}$$

（Ⅱ）由 $N(A^*)=R((A^*)^*)^{\perp}=R(A)^{\perp}$.

（Ⅲ）利用闭子空间正交补的性质，由 $N(A^*)=R(A)^{\perp}$ 有

$$N(A^*)^{\perp}=(R(A)^{\perp})^{\perp}=\overline{R(A)}$$

（Ⅳ）由 $N(A)=R(A^*)^{\perp}$，即得

$$N(A)^{\perp}=(R(A^*)^{\perp})^{\perp}=\overline{R(A^*)}$$

证毕。

29.（Ⅰ）由定理 4.3.4 知 $\|A^*A\|=\|AA^*\|=\|A\|^2$，对正常算子 A，$\forall x\in H$，有

$$(A^*Ax,\ A^*Ax)=(AA^*Ax,\ Ax)$$

$$=(A^*A^2x,\ Ax)$$

$$=(A^2x,\ A^2x)$$

于是

$$\|A^*Ax\|=\|A^2x\|,\qquad \forall x\in H$$

易知 $\|A^*A\|\leqslant\|A^2\|$ 及 $\|A^2\|\leqslant\|A^*A\|$，故 $\|A^2\|=\|A^*A\|=\|A\|^2$.

（Ⅱ）若A为自伴算子，$A=A^*$，即有$AA^*=AA=A^*A$，故 A为正常算子，证毕。

*30. 易知正常算子T的实部和虚部分别为

$$A=\frac{T+T^*}{2},\quad B=\frac{T-T^*}{2i}$$

于是

$$A^2+B^2=\frac{(T+T^*)(T+T^*)}{4}-\frac{(T-T^*)(T-T^*)}{4}$$

$$=TT^*$$

故

$$\|A^2+B^2\|=\|TT^*\|=\|T\|^2$$

证毕.

31. “$\Longrightarrow$” 设A为正常算子，则 $AA^*=A^*A$，有

$$(Ax,\ Ax)=(A^*Ax,\ x)$$

$$=(AA^*x,\ x)$$

$$=(A^*x,\ A^*x)$$

故

$$\|Ax\|=\|A^*x\|,\quad \forall x\in H$$

“$\Longleftarrow$” 若 $\forall x\in H$，$\|A^*x\|=\|Ax\|$，即有

$$(Ax,\ Ax)=(A^*x,\ A^*x)$$

于是

$$(A^*Ax,\ x)=(AA^*x,\ x),\quad \forall x\in H$$

因 H为复 Hilbert 空间，故有 $A^*A=AA^*$，证毕。

注　若H为实空间，因A^*A为自伴算子，故命题仍成立。

32. $A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，

$$A_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a_{21} & -1\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}-1 & a_{12}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

其中 a_{12}，a_{21}为任意实数，则有 $A_1^2=I$，$A_2^2=I$，$A_3^2=I$，$A_4^2=I$，但 $I^{\frac{1}{2}}=A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

33. 因 $A=A^{\frac{1}{2}}\cdot A^{\frac{1}{2}}$，且$A^{\frac{1}{2}}$为自伴的，故$\forall x\in H$，有

$$\begin{aligned}|(Ax,\ y)| &= |(A^{\frac{1}{2}}x,\ A^{\frac{1}{2}}y)|\\ &\leqslant \|A^{\frac{1}{2}}x\|\cdot\|A^{\frac{1}{2}}y\|\\ &= (A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}x)^{1/2}\cdot(A^{\frac{1}{2}}y, A^{\frac{1}{2}}y)^{1/2}\\ &= (Ax,\ x)^{1/2}\cdot(Ay,\ y)^{1/2}\end{aligned}$$

证毕。

34.（Ⅰ）若 $Ax=\theta$，不等式显然成立，现设 $Ax\neq\theta$，记 $y=Ax$，由本节题33有

$$\|Ax\|^2\leqslant(Ax,\ x)^{1/2}\cdot(A^2x,\ Ax)^{1/2}$$

因

$$(A^2x,\ Ax)\leqslant\|A^2x\|\cdot\|Ax\|\leqslant\|A\|\cdot\|Ax\|^2$$

于是

$$\|Ax\|^2 \leqslant (Ax,\ x)^{1/2} \cdot \|A\|^{\frac{1}{2}} \cdot \|Ax\|$$

即

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|^{\frac{1}{2}} \cdot (Ax,\ x)^{1/2}$$

（Ⅱ）“$\Longleftarrow$”显然成立。

“$\Longrightarrow$”由 $0 = (Ax,\ x)$

$$= (A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}x,\ x)$$

$$= (A^{\frac{1}{2}}x,\ A^{\frac{1}{2}}x)$$

$$= \|A^{\frac{1}{2}}x\|^2$$

故 $A^{\frac{1}{2}}x=\theta$，则 $Ax = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}x)=\theta$，证毕。

35.（Ⅰ）“$\Longrightarrow$”由极化恒等式易知，若U为酉算子，有

$$(Ux,\ Uy) = (x,\ y),\ \forall x,\ y \in H$$

于是

$$(U^*Ux,\ y) = (x,\ y)$$

或

$$((U^*U - I)x,\ y) = 0,\ \forall x,\ y \in H$$

所以

$$U^*U = I$$

同理可证 $UU^* = I$.

“$\Longleftarrow$”若已知 $U^*U=I$，则 $\forall x,\ y \in H$，有

$$(U^*Ux,\ y)=(x,\ y)$$

即

$$(Ux,\ Uy)=(x,\ y)$$

特别当 $y=x$时，有

$$\|Ux\|=\|x\|$$

又由 $UU^*=I$，可知$R(U)=H$，即U是满射。

（Ⅱ）由 $\|Ux\|=\|x\|$，$\forall x\in H$，即有 $\|U\|=1$.

（Ⅲ）由 $UU^*=U^*U=I$，即知 $U^{-1}=U^*$，且亦是酉算子。

（Ⅳ）由 $UU^*=U^*U$，即知 U 为正常算子。

注　等距(即保范)算子未必是酉算子，因为它可能不是满射，如右位移算子T：$l^2\to l^2$，

$$(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)\mapsto(0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)$$

易知 $\|Tx\|=\|x\|$，但T不是酉算子。

36. 设 $\{y_n\}\subset R(A)$，且 $y_n\to y\ \ (n\to\infty)$，$\exists x_n\in H$，使 $y_n=Ax_n$，由 $\|x_n\|=\|Ax_n\|$ 知 $\{x_n\}$为H中 Cauchy 列。因H完备，故可设 $x_n\to x\in H$，于是 $y=Ax$，即 $y\in R(A)$，则$R(A)$为H闭子空间。若 $R(A)=H$，A为酉算子，因此

$R(A)\subsetneqq H$，证毕。

37. 由定义易知 U是 $L^2[0,\ 2\pi]\to L^2[0,\ 2\pi]$ 的线性算子。 $\forall f,\ g\in L^2[0,\ 2\pi]$,

$$\begin{aligned}(Uf,\ g)&=\int_0^{2\pi}e^{it}f(t)\ \overline{g(t)}dt\\&=\int_0^{2\pi}f(t)\ \overline{e^{-it}g(t)}\ dt\\&=(f,\ U^*g)\end{aligned}$$

其中 $(U^*g)(t)=e^{-it}g(t)$ 是U的共轭算子。由于

$$(U^*Uf)(t)=e^{-it}\cdot e^{it}f(t)$$

$$=f(t),\quad \forall f\in L^2[0,\ 2\pi]$$

故

$$U^*U=I$$

同理可证 $UU^*=I$. 由本节题35即知 U 为酉算子，证毕。

*38. 设 $\{x_n\}\subset D(A^*)$，且 $x_n\to x_0$，$A^*x_n\to y_0$. 现证 $x_0\in D(A^*)$ 且 $y_0=A^*x_0$.

由于 $\forall x\in D(A)$，有

$$(Ax,\ x_n)=(x,\ A^*x_n)$$

令$n\to\infty$，得

$$(Ax,\ x_0)=(x,\ y_0)$$

故由A^*的定义得知 $x_0\in D(A^*)$ 且$A^*x_0=y_0$，即A^*为闭算子（A^* 亦可能为无界算子）。

*39.（Ⅰ）若取 $x_n=\left(1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \cdots,\ \frac{1}{n^2},\ 0,\ \cdots\right)$，则

$$x_n\to x=\left(1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{n^2},\ \frac{1}{(n+1)^2},\ \cdots\right)\in D(A)$$

但是

$$Ax_n=\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ 0,\ \cdots\right)$$

$$\to y=\left(1,\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \cdots\right)\in l^2$$

故A必不为闭算子 （显然A也不是有界算子）。

（Ⅱ）若定义算子B：$l^2\to D(A_1)$且 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$

有

$$Bx=\left(\xi_1,\ \frac{1}{2}\xi_2,\ \frac{1}{3}\xi_2,\ \cdots,\ \frac{1}{n}\xi_n,\ \cdots\right)$$

显然 $A_1=B^{-1}$，且 B 为有界线性 算子。因 $D(B)=l^2$ 是闭的，所以B为闭线性算子，于是 $B^{-1}=A_1$也是闭线性算子，且 A_1是A的闭扩张，证毕。

*40. “$\Longleftarrow$” 由本节题 38知A^*为闭算子， $A^{**}=(A^*)^*$ 亦为闭算子，设$x\in D(A)$， $\forall y\in D(A^*)$，则

$$(y,\ Ax)=(A^*y,\ x)=(y,\ A^{**}x)$$

因 $\overline{D(A^*)}=H$，故 $A^{**}x=Ax$，即 A^{**}为A的闭延拓，A为可闭的。

“$\Longrightarrow$” 设 A_1为A的闭延拓，即$D(A_1)\supset D(A)$. 因 $\overline{D(A)}=H$，故$\overline{D(A_1)}=H$，即 A_1在H中稠定.由题38知A_1^*为闭线性算子，为证$D(A_1^*)=H$，我们先来证明：

$$G_{A_1^*}=[VG_{A_1}]^{\perp}$$

式中 $G_{A_1^*}$是 A_1^* 的图象，G_{A_1} 是 A_1 的图象， V：$H\times H\to H\times H$，且 $V(\{x,\ y\})=\{y,\ -x\}$ （见题18）事实上，设 $\{x_0,\ y_0\}\in[VG_{A_1}]^{\perp}$，则$\forall x\in D(A_1)$，有

$$0=(\{x_0,\ y_0\},\ \{A_1x,\ -x\})$$

$$=(x_0,\ A_1x)+(y_0,\ -x)$$

即

$$(A_1x,\ x_0)=(x,\ y_0)$$

故 $x_0\in D(A_1^*)$且 $y_0=A_1^*x_0$，即$\{x_0,\ y_0\}\in G_{A_1^*}$. 反之，设 $(x_0,\ y_0)\in G_{A_1^*}$，即 $x_0\in D(A_1^*)$，$y_0=A_1^*x_0$，因

$$\forall x \in D(A_1),\ \{A_1x,\ -x\} \in VG_{A_1}$$

$$(\{x_0,\ A_1^*x_0\},\ \{A_1x,\ -x\})$$

$$= (x_0,\ A_1x) - (A_1^*x_0,\ x)$$

$$= \overline{(A_1x,\ x_0)} - (A_1^*x_0,\ x)$$

$$= \overline{(x,\ A_1^*x_0)} - (A_1^*x_0,\ x)$$

$$= 0$$

故

$$G_{A_1^*} \subset [VG_{A_1}]^{\perp}$$

从而

$$G_{A_1^*} = [VG_{A_1}]^{\perp}$$

现证 $\overline{D(A_1^*)} = H$. 若不然， $\exists y_0 \neq \theta$，且 $y_0 \perp D(A_1^*)$ 。

于是， $\forall x \in D(A_1^*)$，有

$$0 = (\theta,\ A_1^*x) - (y_0,\ x)$$

$$= (\{\theta,\ y_0\},\ \{A_1^*x,\ -x\})$$

$$= (\{\theta,\ y_0\},\ V\{x,\ A_1^*x\})$$

即

$$\{0,\ y_0\} \perp V\{x,\ A_1^*x\} = VG_{A_1^*}$$

易证

$$[VG_{A_1^*}]^{\perp} = \overline{VG_{A_1}} = VG_{A_1}$$

因此

$$y_0 = A_1\theta = \theta$$

059049

导出矛盾，则有$\overline{D(A_1^*)}=H$

又由于A_1是A的延拓，即$D(A_1)\supset D(A)$，由定义可知

$$\overline{D(A^*)}\supset\overline{D(A_1^*)}=H$$

即A^*在H中稠密，证毕。

参 考 文 献

[1] 李延保、楼宇同：应用泛函基础 第一版 南京工学院出版社 1986。

[2] Erwin Kreyszig: Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley and Sons 1978.

[3] J,Tinsley Oden: Applied Functional Analysis. Englewood Cliffs, Prentice-Hall 1979.

[4] 夏道行等：实变函数论与泛函分析 第二版 人民教育出版社 1985。

[5] 郑维行、王声望：实变函数与泛函分析概要 第一版 人民教育出版社 1980。

[6] 程其襄等：实变函数与泛函分析基础 第一版 高等教育出版社 1983。

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝泛函分析习题集
作者＝楼宇同　　李延保编
页数＝３４４
ＳＳ号＝１０８１９８７８
出版日期＝１９８７年０３月第１版

封面页
版权页
习题
第一章　分析初步
１．１　集合与映射
１．２　实直线与连续函数
１．３　Ｌｅｂｅｓｇｕｅ测度与Ｌｅｂｅｓｇｕｅ积分简介
第二章　度量空间
２．１　拓扑空间
２．２　度量空间及其例子
２．３　度量空间中的有关拓扑概念
２．４　度量空间的完备性
２．５　压缩映射原理
２．６　度量空间中的紧性
第三章　Ｂａｎａｃｈ空间
３．１　线性赋范空间与Ｂａｎａｃｈ空间
３．２　有界线性算子
３．３　有界性线泛函与共轭空间
３．４　闭图象定理与有界逆算子定理
３．５　紧算子
第四章　Ｈｉｂｅｒｔ空间
４．１　内积空间与Ｈｉｌｂｅｒｔ空间
４．２　Ｈｉｌｂｅｒｔ空间中的坐标系
４．３　Ｈｉｌｂｅｒｔ空间的自共轭性与伴随算子
提示及解答
１．１　集合与映射
１．２　实直线与连续函数
１．３　Ｌｅｂｅｓｇｕｅ测试与Ｌｅｂｅｓｇｕｅ积分简介
２．１　拓扑空间
２．２　度量空间及其例子
２．３　度量空间中的有关拓扑概念
２．４　度量空间的完备性
２．５　压缩映射原理
２．６　度量空间中的紧性
３．１　线性赋范空间与Ｂａｎａｃｈ空间
３．２　有界线性算子
３．３　有界线性泛函与共轭空间
３．４　闭图象定理与有界逆算子定理

３．５　紧算子
４．１　内积空间与Ｈｉｌｂｅｒｔ空间
４．２　Ｈｉｌｂｅｒｔ空间中的坐标系
４．３　Ｈｉｌｂｅｒｔ空间的自共轭性与伴随算子
参考文献
附录页