泛函分析测验（第一章）

2025.10

1. (50 分) 设$(X, d_1), (Y, d_2)$均为距离空间，在$X \times Y$上定义：

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2), \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y.$$

证明：（1）d为$X \times Y$上距离;

（2） 序列$\{(x_n, y_n)\} \subset X \times Y$收敛于$(x, y) \in X \times Y$当且仅当在$X$中$x_n$收敛于$x$，且在$Y$中$y_n$收敛于$y$;

（3） $\{(x_n, y_n)\}$为$X \times Y$中 Cauchy 列当且仅当$\{x_n\}$为X中 Cauchy 列且$\{y_n\}$为Y中 Cauchy 列；

（4）$X \times Y$可分当且仅当X，Y均可分；

（5）$X \times Y$完备当且仅当X，Y均完备.

2. (20 分) 设$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是有限维线性空间X上的两个范数. 证明: 必存在常数$c, C > 0$，使得

$$c\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1. \quad \forall x \in X.$$

3. (20 分) 设数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$满足$a_n \ge 0$. 给出集合

$$A = \{\{x_n\} \in l^2 \big| \ |x_n| \le a_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

在l^2中列紧时$\{a_n\}$满足的充分必要条件，并证明你的结论.

4. (10 分) 在$C[0,T]$上考虑方程:

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big), & 0 \le t \le T \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

其中函数$f \in C([0,T] \times \mathbb{R})$满足: 存在常数$\alpha > 0$，使得

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le \alpha |x - y|, \quad \forall t \in [0,T], \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

证明该方程存在唯一解$u \in C^1[0,T]$.

(提示：在$C[0,T]$上定义等价范数$|||u||| = \max\{e^{-\alpha t}|u(t)| : t \in [0,T]\}$).