– 图论及其应用–

染色理论

侯新民

计算与应用数学系

xmhou@ustc.edu.cn



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...

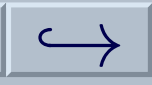












目　录

1 点染色 3

作业 22

2 边染色 24

分类问题 35

作业 39

3 面染色与整数流 41

整数流 48

Tutte整数流猜想 57

4 Fulkerson conjecture 60

5 Some elementary Theorems in Graph Theory 61



1 点染色

- 简单无向图 G 中顶点(简称为点)的 k 染色 (vertex k-coloring) π 是指用 k 种颜色 $\{1,2,\cdots,k\}$ 对 $V(G)$ 中点进行染色, 使得相邻两顶点所染颜色不同.
- 换句话说, G 中点的 k 染色 π 是映射

$$\pi:\ V(G)\to\{1,2,\cdots,k\},$$

使得对每个 $i(i=1,2,\cdots,k)$, $\pi^{-1}(i)$ 是独立集或者空集.

- 若令

$$V_i=\pi^{-1}(i)=\{x\in V(G):\pi(x)=i\},\quad i=1,2,\cdots,k,$$

则记

$$\pi=(V_1,V_2,\cdots,V_k).$$



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...



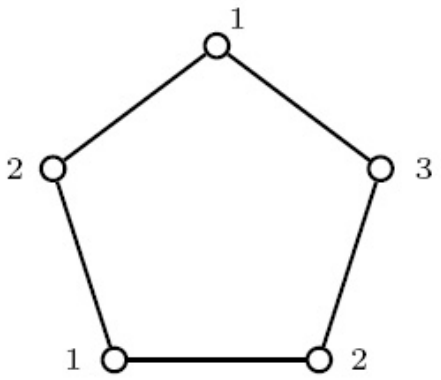












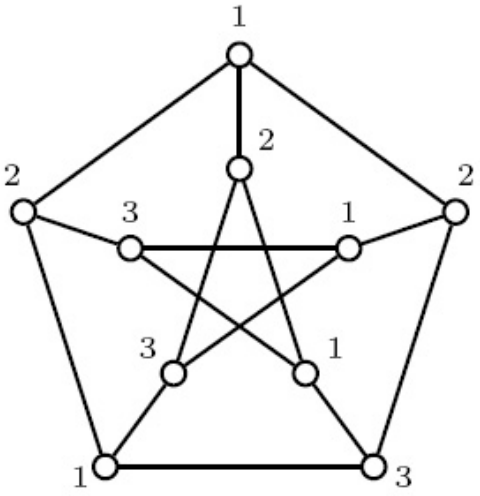


Figure 1: 两个3染色图

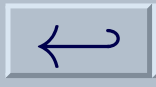
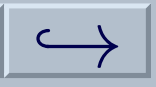
- 若G中点存在k染色，则称G中点k色可染(vertex k-colorable).



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





- 显然, 每个图中点$n(G)$色可染, 而且若G中点k色可染, 则对每个$\ell(\geqslant k)$, G中点ℓ色可染. 由图1给出的染色知, C_5和Petersen图中点3色可染.

- $\chi(G)=\min\{k: G$中点k色可染$\}$称为G的点色数, 简称为色数(chromatic number).

- 由定义, 若$\chi(G)=k$, 则G中点的任何k染色$\pi=(V_1,V_2,\cdots,V_k)$中每个V_i都是非空的独立集. 换言之, G的色数$\chi(G)$是G中点不交独立集的最小数目.

- 容易证明(习题6.1.1): $\chi(G)=1\Leftrightarrow G\cong K_n^c$; $\chi(G)=2\Leftrightarrow G$是非空2部图: $\chi(G)=n\Leftrightarrow G\supseteq K_n$.

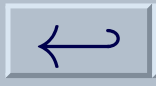
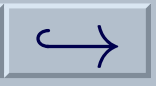
- 若$\chi(G)=k$, 则称G为k色图(k-chromatic graph). 例如, K_n^c是1色图; 非空2部图是2色图; 奇圈$C_{2n+1}(n\geqslant 1)$是3色图, K_n是n色图.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





- 点染色理论中的一个基本问题是：给定图 G, 确定 $\chi(G)$ 的值. 由于点染色只与顶点之间是否相邻有关, 所以, 点染色问题只需讨论简单图就够了.

- 设 $\chi(G) = k \geqslant 1$. 若对任何 $H \subset G$, 均有 $\chi(H) < k$, 则称 G 为临界 k 色图 (critical k-chromatic graph).

- 易证 (习题 6.1.2): G 是临界 1 色图 $\Leftrightarrow G \cong K_1$; G 是临界 2 色图 $\Leftrightarrow G \cong K_2$; G 是临界 3 色图 $\Leftrightarrow G$ 是奇圈. 图 2 所示的 Grötzsch 图是临界 4 色图. 容易证明任何 k 色图都包含一个临界 k 色子图. (例如，k色图的最小k色子图。)

临界 k 色图的概念是由 G. A. Dirac (1952) 首先提出来的, 它在研究染色问题中起了重要作用. 下述定理揭示了色数与边连通度之间的关系, 我们将从 König 定理 (5.3) 导出它.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...

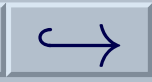












定理 6.1.1 (G. A. Dirac, 1952) 设 G 是临界 $k(\geqslant 2)$ 色图, 则 $\lambda(G) \geqslant k-1$ (或 $k \leq \lambda(G)+1$).

证明

- 若 $k=2$, 则 $G \cong K_2$. 于是, $\lambda(G)=1$, 结论成立.
- 下设 $k \geqslant 3$, 并且设 $\lambda(G) < k-1$.
- 于是, 存在 $S \subset V(G)$ 使 $|E_G(S,\overline{S})| = \lambda(G) < k-1$.
- 因为 G 是临界 k 色图, 所以 $G_1 = G[S]$ 和 $G_2 = G[\overline{S}]$ 中点都 $(k-1)$ 色可染. 设

  $\pi_1 = (U_1, U_2, \cdots, U_{k-1})$ 和 $\pi_2 = (W_1, W_2, \cdots, W_{k-1})$

  分别是 G_1 和 G_2 中点的 $(k-1)$ 染色.
- 构作简单 2 部图 $H = (X \cup Y, E)$, 其中

  $$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}\},\ Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}\},$$



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...








$$x_i y_j \in E(H) \Leftrightarrow E_G(U_i, W_j) = \emptyset.$$

- 由于 $|E_G(S, \overline{S})| = \lambda(G) < k-1$, 所以

$$e(H) > (k-1)^2 - (k-1) = (k-1)(k-2) = (k-2)|X|.$$

- 由König定理的推论5.1.3(即若平衡二部图$G = (X,Y)$的边数大于$(\ell-1)|X|$,则$\beta(G) \geq \ell$, 回顾：$\beta(G)$表示G的点覆盖数.)知, $\nu(H) = \beta(G) \geq k-1$, 即$H$中存在完美匹配, 设为$M$.

- 令

$$M = \{x_i y_{j_i} : i = 1, 2, \cdots, k-1\},$$

$$V_i = U_i \cup W_{j_i},\ i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

则$V_i\,(i = 1, 2, \cdots, k-1)$都是$G$的独立集.

- 所以

$$\pi = (V_1, V_2, \cdots, V_{k-1}).$$



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...








是G中点的$(k-1)$染色，矛盾于$\chi(G)=k$. 故有$\lambda(G)\geqslant k-1$. ∎

推论 6.1.1.1 设G是临界k色图，则$\delta(G)\geqslant k-1$.

证明 由Whitney不等式(推论4.4)和定理6.1.1，立即有$\delta(G)\geqslant\lambda(G)\geqslant k-1$. ∎

推论 6.1.1.2 对任何简单图G，均有$\chi(G)\leqslant\Delta(G)+1$.

证明 设$\chi(G)=k$且H是G的临界k色子图. 由推论6.1.1.1有，$\delta(H)\geqslant k-1$. 因此，$\Delta(G)\geqslant\Delta(H)\geqslant\delta(H)\geqslant k-1=\chi(G)-1$. ∎

R. L. Brooks(1941)指出，满足$\chi(G)=\Delta+1$的简单图G只有两类. 一类是奇圈，另一类是完全图. 这就是著名



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...

的 **Brooks 定理**. 下面的证明是 Lovász (1975) 给出的.

点染色贪婪算法（greedy algorithm）：

- 取图G的有根支撑树，把图G的顶点从最底层到根点按层标号$x_1, x_2, \cdots, x_n$. 显然对任意$x_i (1 \leq i < n)$,存在$j > i$使得$x_i x_j \in E(G)$
- 给顶点按顺序用1,2,$\cdots$ 染色, 使得每个顶点x_i 染尽可能小的颜色，如x_1 染颜色1，若x_2和x_1 不相邻则染颜色1，否则染颜色2.
- 显然至多需要$\Delta(G)+1$ 种颜色就可以给图G一个正常染色，而且上界只有当G为$\Delta(G)$正则图时可以取到.

定理 6.1.2 (Brooks 定理, R. L. Brooks, 1941) 设G 是连



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...













通简单图, 并且G 既不是奇圈又不是完全图, 则$\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.

证明

- 不妨设图G为$\Delta(G)$正则图，否则由点染色贪婪算法，G是$\Delta(G)$色可染的。
- 因为G不是奇圈，因此若$\Delta(G)=2$则G必为偶圈。所以$\chi(G)=\Delta(G)$. 下面不妨设$\Delta(G)\geq 3$.
- 不妨设图G是2-（点）连通的，否则G有割点u，我们可以在割点处把G分成两块，对这两块分别用贪婪算法染色，然后把这两块的染色拼在一起得图G的一个$\Delta(G)$染色.
- 因为G不是完全图，G 中必存在$x,y,z \in V(H)$使$xy \notin E(G)$ 而$xz,yz \in E(G)$.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...







- 若G 3-连通，则$G-\{x,y\}$连通。取根在z的$G-\{x,y\}$的支撑树T。给$V(G)$中元素标号如下：$x_1=x,x_2=y$,对T中顶点，从最底层开始逐层标号$x_3,x_4,\cdots,x_p$. 因此，$x_p=z$, 并且对每个$i=1,2,\cdots,p-1$, 存在$j>i$使$x_ix_j\in E(H)$. 由贪婪算法得图G的一个$\Delta(G)$染色。

- 若G 2-连通，取z使得$G-z$ 1-连通。在$G-z$的两个端点块（end-block, 即只含一个割点的极大2-连通子图）中分别取非割点x,y使得$xz,yz\in E(G)$且$xy\notin E(G)$(因为G 2- 连通，x,y必然存在。)

- 这样取得的点x,y满足$G-\{x,y\}$还是连通图(否则x或y是$G-z$的割点). 同3-连通情形可得图G的一个$\Delta(G)$染色。

  定理得证. ∎



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...

为了弄清以上证明中的染色方法, 我们以图 2 中的 Grötzsch 图为例给出其贪婪染色方案. 设 H 是 Grötzsch 图, H 既不是完全图又不是奇圈.

例 6.1.1 考察 Petersen 图 G. 由于 G 含奇圈, 所以 G 不是 2 部图, 因而 $\chi(G) \geqslant 3$. 另一方面, 由于 G 既不是奇圈, 也不是完全图, 所以由定理 6.1.2 知, $\chi(G) \leqslant \Delta(G) = 3$. 因此, Petersen 图是 3 色图. ∎

对于平面图, Heawood (1890) 证明了如下五色定理.

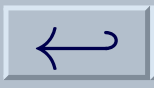
定理 6.1.3 (五色定理, P. J. Heawood, 1890) 对于每个平面图 G, 均有 $\chi(G) \leqslant 5$.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...







全 屏

搜 索

关 闭

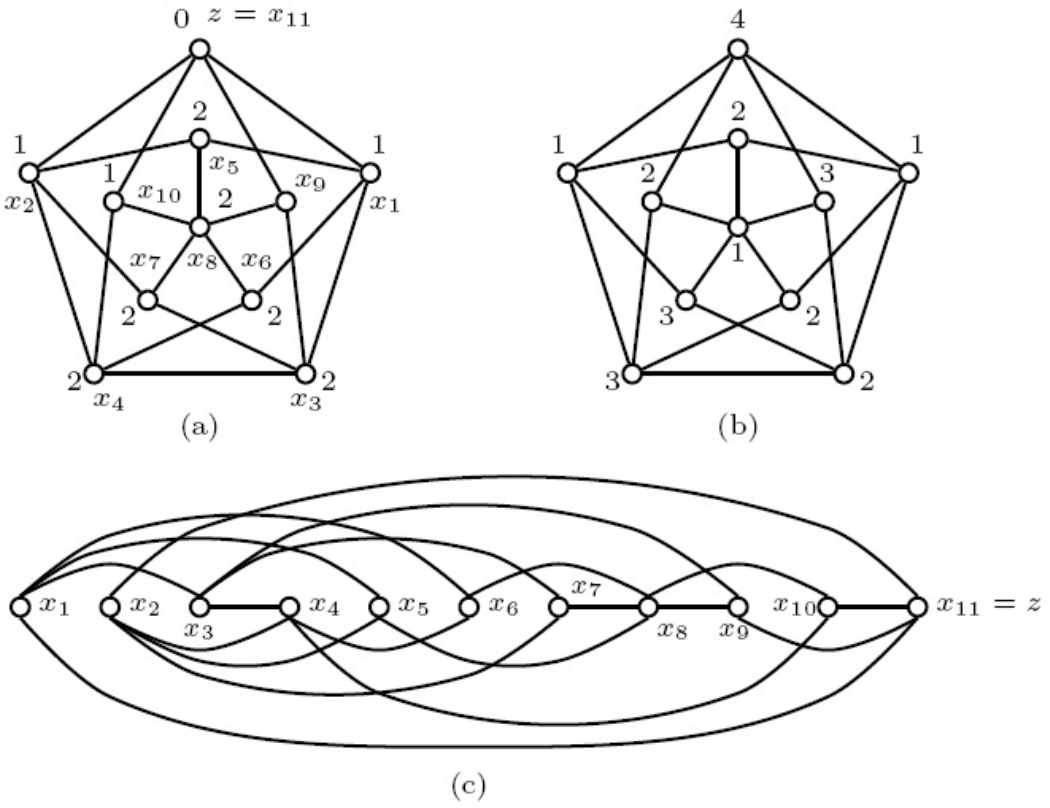


Figure 2: Grótzsch 图

证明

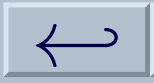
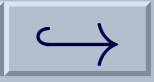
- 反证法. 不妨设G是临界6色图. 由推论3.1.4.2(平面图$\delta(G)\leq 5$)和推论6.1.1.1(k-临界图$\delta(G)\geq k-1$)知, $\delta(G)=5$.
- 设$u\in V(G)$使$d_G(u)=5, N_G(u)=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$(编号按顺时针顺序), $\pi=(V_1,V_2,V_3,V_4,V_5)$是$G-u$中点的5染色.
- 由于$\chi(G)=6$, 所以不妨设$u_i\in V_i(i=1,\cdots,5)$.
- 令$G_{ij}=G[V_i\cup V_j]$.
- 若存在i,j使u_i和u_j在G_{ij}中不连通, 则将G_{ij}中含u_i的分支中颜色i与颜色j对换得$G-u$中点的另一个5染色$\pi'=(V_1',V_2',V_3',V_4',V_5')$, 其中对$u_i\in N_G(u)$, 有$\pi'(u_i)\neq i$. 不妨设$i=1$.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





- 于是, $\pi'' = (V_1' \cup \{u\}, V_2', V_3', V_4', V_5')$ 是 G 中点的 5 染色, 矛盾于 $\chi(G) = 6$.

- 所以对任何 $i, j (1 \leqslant i \neq j \leqslant 5)$, G_{ij} 中存在 (u_i, u_j) 路 P_{ij}. 考虑圈 $C = uu_2 + P_{24} + u_4u$, 则路 P_{13} 必经过 P_{24} 中点. 但它不可能, 因为 P_{13} 中点已被染上颜色 1 和颜色 3, 而且 P_{24} 中任何点都没有这两个颜色. 这个矛盾证明了 $\chi(G) \leqslant 5$. ∎

作为色数 $\chi(G)$ 的应用, 我们举两个例子.

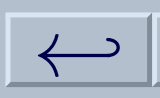
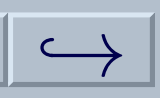
Theorem 1 (B. Roy, 1967, T. Gallai, 1968) 设 D 是有向图, $\chi = \chi(D)$. 则 D 中存在长 $\geqslant \chi - 1$ 的有向路.

证明







- 设 $E' \subset E(D)$ 是使 $D' = D - E'$ 不含有向圈的最小边集(即对任何 $a \in E'$, $D' + a$ 含有向圈), 并设 D' 中有向路的最大长为 k. 只需证明 $k \geqslant \chi - 1$.

- 对 $i = 1, 2, \cdots, k+1$, 令

  $V_i = \{x \in V(D) : D'$ 中存在以 x 为起点最大长为 $i-1$ 的有向路$\}$.

  则 $V(D) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{k+1}$.

- 于是, 只需证明 $\pi = (V_1, V_2, \cdots, V_{k+1})$ 是 D 中点的 $(k+1)$ 染色.

- 断言1: D' 中不存在起点和终点都在 $V_i (i = 1, 2, \cdots, k+1)$ 中的有向路.

  若不然, 设 P 是 D' 中 (x, y) 路, $x, y \in V_i$. 则存在长为 $(i-1)$ 的且起点为 y 的有向路 Q. 因为 D' 不含有向圈, 所以 $P \cup Q$ 为 D' 中起点在 x 且长 $\geqslant i$ 的有向路, 矛盾于 $x \in V_i$.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...

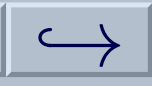












- 断言2: $V_i(i=1,2,\cdots,k+1)$ 是 D 的独立集.
- 设 x 和 y 是 V_i 中相邻两顶点, 不妨设存在 $a \in E(D)$ 使 $a=(x,y)$. 由于 D' 中不存在 (x,y) 路, 所以 $a \in E'$.
- 由 E' 的最小性知, $D'+a$ 含有向圈, 设为 C. 于是 $C-a$ 是 D' 中 (y,x) 路且 $x,y \in V_i$, 矛盾于断言1. 因而 x 和 y 在 D 中不相邻, 即 V_i 是独立集.
- 因此, $\pi=(V_1,V_2,\cdots,V_{k+1})$ 是 D 中点的 $(k+1)$ 染色, 即有 $\chi \leqslant k+1$. ∎

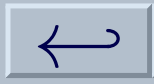
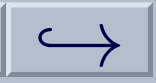
Theorem 2 (V. Chvátal, J. Komlós, 1971) 设 D 是简单有向图, $\chi(D) > mn$, 并设 $\mathbf{f} \in \mathcal{V}(D)$. 则 D 中或者存在有向路 $(x_0,x_1,\cdots,x_m)$ 使得 $\mathbf{f}(x_0) \leqslant \mathbf{f}(x_1) \leqslant \cdots \leqslant \mathbf{f}(x_m)$; 或者存在有向路 $(y_0,y_1,\cdots,y_n)$ 使得 $\mathbf{f}(y_0) > \mathbf{f}(y_1) > \cdots > \mathbf{f}(y_n)$.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





证明

- 构造D 的支撑子图D_1 和D_2. 对于D 中边(x,y),

$$(x,y)\in E(D_1)\Leftrightarrow \mathbf{f}(x)\leqslant \mathbf{f}(y);$$

$$\text{或 } (x,y)\in E(D_2)\Leftrightarrow \mathbf{f}(x)>\mathbf{f}(y).$$

显然, $D=D_1\oplus D_2$.

- 断言: 或者$\chi(D_1)>m$, 或者$\chi(D_2)>n$.
- 若不然, 设$\chi(D_1)\leqslant m$, $\chi(D_2)\leqslant n$, 并设

$$\pi_1=(V_1,V_2,\cdots,V_m) \quad \text{和 } \pi_2=(V_1',V_2',\cdots,V_n')$$

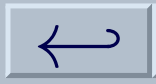
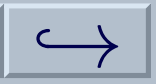
分别是D_1 和D_2 中点的m 染色和n 染色.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





- 令

$$V_{ij} = \{x \in V_i \cap V_j'\},\ 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n.$$

由于V_i 和V_j' 分别是D_1 和D_2 的独立集，故V_{ij}是D 的独立集. 于是，

$$\pi = V_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$$

是D 中点mn 染色. 这矛盾于$\chi(D) > mn$.

- 断言成立。

- 若$\chi(D_1) > m$, 则由定理 1 知D_1 中存在长$\geqslant \chi(D_1) - 1 \geqslant m$ 的有向路P. 令P 中长为m 的一段为$(x_0, x_1, \cdots, x_m)$. 由D_1 的定义有$\mathbf{f}(x_0) \leqslant \mathbf{f}(x_1) \leqslant \cdots \leqslant \mathbf{f}(x_m)$.

- 若$\chi(D_2) > n$, 则同理可证D_2 中存在长为n 的有向路$(y_0, y_1, \cdots, y_n)$. 由D_2 的定义有$\mathbf{f}(y_0) > \mathbf{f}(y_1) > \cdots > \mathbf{f}(y_n)$. ∎



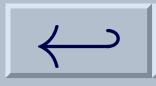
Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...

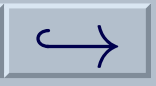












Theorem 3 *[P. Erdős, G. Szekeres, 1935]* 任意 $mn+1$ 个不同整数构成的序列中, 或者包含有 $m+1$ 项的增子序列, 或者包含有 $n+1$ 项的减子序列.

证明

- 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{mn+1}$ 是 $mn+1$ 个不同整数构成的序列.
- 作简单有向图 $D=(V,E)$, 其中

$$V=(a_1,a_2,\cdots,a_{mn+1}), \quad (a_i,a_j)\in E(D) \Leftrightarrow a_i<a_j.$$

- 显然, D 是 $mn+1$ 阶竞赛图, 且 $\chi(D)=mn+1$.
- 令 $\mathbf{f}\in\mathcal{V}(D)$ 使得 $\mathbf{f}(a_i)=i \quad (i=1,2,\cdots,mn+1)$. 由定理 2 知该命题成立. ∎



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...








作业

6.1.8 证明:

(a) 广义 **Brooks 定理**: 若 G 是 $\Delta(G)=2$ 并且不含奇圈连通分支, 或者 $\Delta(G)\geqslant 3$ 并且不含 $K_{\Delta+1}$ 连通分支的图, 则 $\chi(G)\leqslant\Delta(G)$.

(b) 对任何 $m,k\in N$, $2\leqslant k\leqslant m$, 则存在图 G 使 $\Delta=m$, $\chi(G)=k$.

6.1.11 图 G 的色多项式 (chromatic polynomial) $\pi_k(G)$ 是 G 中不同点 k 染色的数目. 证明:

(a) $\pi_k(G)>0\Leftrightarrow\chi(G)\leqslant k$; $\pi_k(K_n^c)=k^n$; $\pi_k(K_n)=k(k-1)\cdots(k-n+1)$;

(b) 若 G 是简单图, 则对任何 $e\in E(G)$, 均有 $\pi_k(G)=\pi_k(G-e)-\pi_k(G\cdot e)$;

(c) $\pi_k(K_{1,3})=k(k-1)^3$, $\pi_k(C_4)=k(k-1)(k^2-3k+3)$;



(c) 若 G 是连通图, 则 $\pi_k(G) \leqslant k(k-1)^{n-1}$, 其中等号仅当 G 是树时成立;

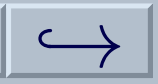
(d) $\pi_k(G)$ 是 k 的 n 阶正负项交错出现的整系数多项式, 首项为 k^n, 常数项为 0, k^{n-1} 的系数为 $e(G)$.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





2 边染色

- 与点染色概念对应的是边染色.
- 无环非空图 G 中边的 k 染色 (edge k-coloring) π' 是指 k 种颜色 $1,2,\cdots,k$ 对边集 $E(G)$ 中元素的一种分配, 使得相邻两条边所染颜色不同.
- 换句话说, G 中边的 k 染色是映射

$$\pi' : E(G) \to \{1,2,\cdots,k\}$$

使得对每个 $i(i=1,2,\cdots,k)$, $\pi'^{-1}(i)$ 是匹配或者空集.

- 若令

$$E_i = \pi'^{-1}(i) = \{e \in E(G) : \pi'(e) = i\},\ i = 1,2,\cdots,k,$$

则记

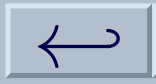
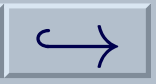
$$\pi' = (E_1, E_2, \cdots, E_k).$$



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





- 图 3 给出了 C_5 中边的 3 染色和 Petersen 图中边的 4 染色, 边旁的数字表示该边所染的颜色.

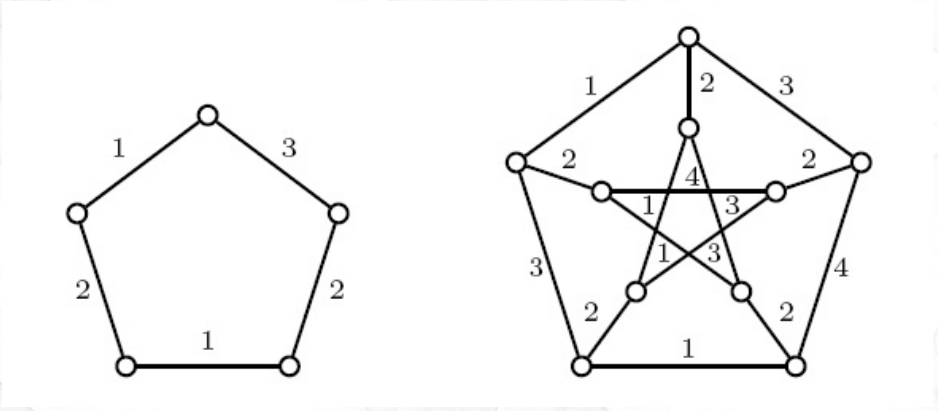


Figure 3: C_5 中边的 3 染色和 Petersen 图中边的 4 染色

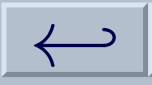
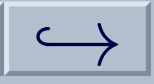
- 若 G 中边存在一种 k 染色, 则称 G 中边 k 色可染 (edge k-colorable).
- 显然, 每个无环非空图的边必 $e(G)$ 色可染, 并且



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





若 G 中边 k 色可染, 则对每个 $\ell(\geqslant k)$, G 中边 ℓ 色可染.

- 由图 3 给出的边染色知, C_5 中边 3 色可染, Petersen 图中边 4 色可染.
-

$$\chi'(G) = \min\{k:\ G \text{ 中边 } k \text{ 色可染}\}$$

称为 G 的 边色数 (edge chromatic number).

- 由定义, 若 $\chi'(G) = k$, 则 G 中边的任何 k 染色 $\pi' = (E_1, E_2, \cdots, E_k)$ 中每个 E_i 都是非空的匹配. 换言之, G 的边色数 $\chi'(G)$ 是 G 中边不交匹配的最小数目. 所以

$$\chi'(G) \geqslant \Delta(G). \tag{1}$$

- 许多实际问题可以归结为图的边染色. 例如, 某个学校有 m 个教师 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 和 n 门课程 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 教师 x_i 对课程 y_j 每周要上 p_{ij} 学



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...








时. 安排一个学时尽可能少的课程表的问题就能归结为图的边染色问题.

- 构造2部图$G=(X\cup Y,E)$, 其中$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$, $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$, x_i与y_j之间连p_{ij}条边. 因为在任何一个课时内, 每位教师至多教授一门课程, 而且每门课程也至多有一位教师在授课. 因此, 一个课时对应G中的一个匹配; 反之, G中的一个匹配对应于一个课时安排. 于是, 最好的课表安排就是求$\chi'(G)$.

- 由推论5.2.2和推论5.3.3知, 完全图K_{2n}有$(2n-1)$个边不交的完备匹配, 2部分图H有$\Delta(H)$个边不交的匹配. 所以,

$$\chi'(K_{2n})=2n-1=\Delta(K_{2n});$$
$$\chi'(H)=\Delta(H).$$

- 容易证明(习题6.2.3): G的点边色数满足下列关



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...








系:

$$\chi'(G) = \chi(L(G)), \tag{2}$$

其中 $L(G)$ 是 G 的线图.

关于边色数 $\chi'(G)$ 的下列结果, 是由 Vizing (1964) 和 Gupta (1966) 独立发现的, 一般文献上都称为 **Vizing 定理**.

定理 6.2 (V. G. Vizing 定理) 设 G 是无环非空图(可以有重边), 则

$$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + \mu(G), \tag{3}$$

其中

$$\mu(G) = \max\{\mu_G(x,y) : \ x,y \in V\}.$$

特别地, 若 G 是非空简单图, 则

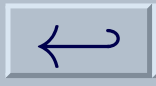
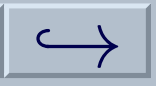
$$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1. \tag{4}$$



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





证明

- 只需证明式(4)成立. 由式(1), 只需证明式(4)右端不等式.
- 用反证法.
- 设存在简单图 G' 使得

$$\chi'(G') > \Delta(G') + 1.$$

- 考虑 G' 的支撑子图 G 使得

$$\chi'(G) = k = \chi'(G'),$$

且存在 $e_0 \in E(G)$ 使得

$$\chi'(G - e_0) = k - 1.$$



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...








即G为G'的边色数临界图，可以取边色数极大支撑子图。

- 于是，

$$k=\chi'(G')>\Delta(G')+1\geqslant\Delta(G)+1. \qquad (5)$$

- 设$e_0=xy_0$，$\pi'=(E_1,E_2,\cdots,E_{k-1})$是$G-e_0$中边的$(k-1)$染色.

- 对任何$u\in V(G)$，用$C_{\pi'}(u)$表示在染色π'下，u处出现的颜色集，并令$\overline{C_{\pi'}}(u)=\{1,2,\cdots,k-1\}\setminus C_{\pi'}(u)$，即在$u$处不出现的颜色集.

- 由于

$$d_{G-e_0}(u)\leqslant\Delta(G)<k-1,$$

所以

$$\overline{C_{\pi'}}(u)\neq\emptyset,\forall u\in V(G).$$



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...








- 取 $\beta_1 \notin C_{\pi'}(y_0)$. 若 $\beta_1 \notin C_{\pi'}(x)$, 则将 e_0 染成 β_1, 便得到 G 中边的一个 $(k-1)$ 染色. 这矛盾于 $\chi'(G) = k$.

- 于是, $\beta_1 \in C_{\pi'}(x)$, 并且存在边 $e_1 \in E_G(x)$ 使得 $\pi'(e_1) = \beta_1$. 令 $e_1 = xy_1$, 并令

$$F_x(1, \pi') = \{e_0, e_1\}.$$

- 由于 $d_G(y_1) \leqslant \Delta(G) < k-1$, 所以存在 $\beta_2 \notin C_{\pi'}(y_1)$.

- 若 $\beta_2 \notin C_{\pi'}(x)$, 则将 e_0 染成 β_1, e_1 染成 β_2 便得到 G 中边的一个 $(k-1)$ 染色. 这矛盾于 $\chi'(G) = k$.

- 于是, $\beta_2 \in C_{\pi'}(x)$, 并且存在边 $e_2 \in E_G(x)$ 使得 $\pi'(e_2) = \beta_2$. 令 $e_2 = xy_2$, 并令

$$F_x(2, \pi') = \{e_0, e_1, e_2\}.$$



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...








- 一般地, 令

$$F_x(n,\pi') = \{e_0, e_1, \cdots, e_n\} \subseteq E_G(x),$$

其中 $n \geqslant 1$, 并且

$$\begin{aligned} &e_i = xy_i,\ i = 0,1,2\cdots,n,\\ &\pi'(e_i) = \beta_i \notin C_{\pi'}(y_{i-1}),\ i = 1,2,\cdots,n,\\ &y_i \neq y_j,\ 0 \leqslant i \neq j \leqslant n. \end{aligned}$$

- 重新染色 $F_x(n,\pi')$ 是指这样一个过程: 将边 e_{i-1} 上的颜色抹去, 改染颜色 $\pi'(e_i)$, $i = 1,2,\cdots,n$ (参见图 4, 其中 $\beta_i = \pi'(e_i) \in C_{\pi'}(y_i), \beta_i \notin C_{\pi'}(y_{i-1})$).
- 重新染色 $F_x(n,\pi')$ 得到 $G - e_n$ 中边的 $(k-1)$ 染色.

- 于是, 对于任何使得 $\chi'(G-e_0) = k-1$ 的 $e_0 \in E(G)$ 和 $G-e_0$ 中边的任何 $(k-1)$ 染色 π', $F_x(n,\pi')$ 满足下面 2 条性质:



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...

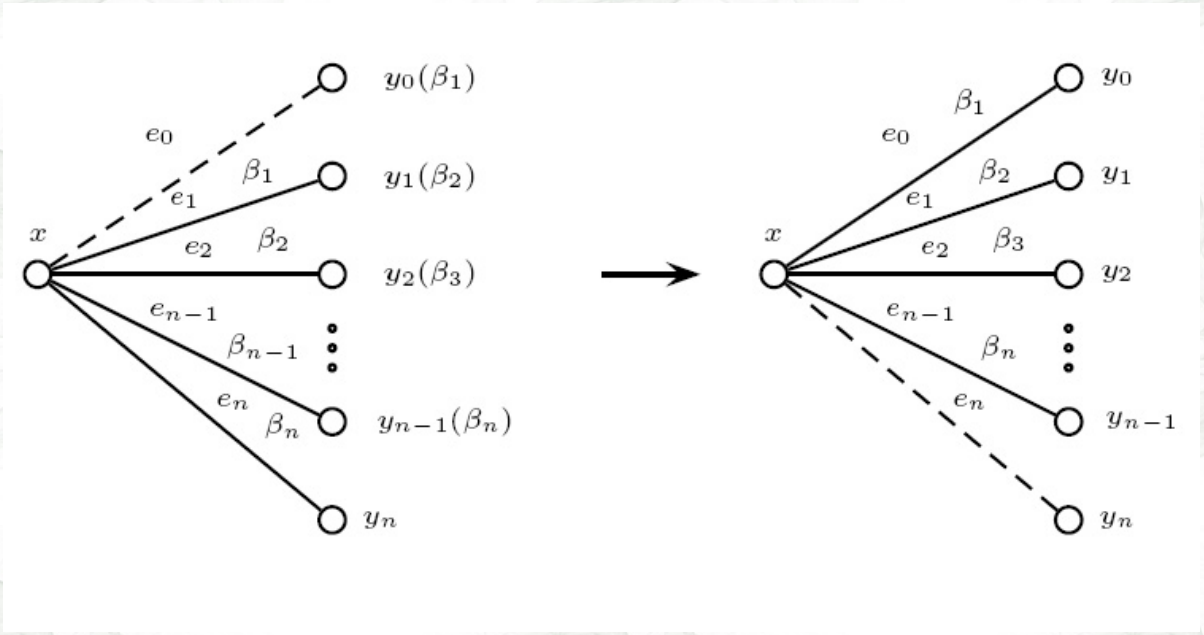


Figure 4: $F_x(n,\pi')$ 的重新染色过程

(i) $\overline{C_{\pi'}}(x)\cap\overline{C_{\pi'}}(y_i)=\emptyset,\ i=0,1,2,\cdots,n.$

若不然, 存在 $i_0, 0\leqslant i_0\leqslant n$ 使得 $\overline{C_{\pi'}}(x)\cap\overline{C_{\pi'}}(y_{i_0})\neq\emptyset$. 取 $\alpha\in\overline{C_{\pi'}}(x)\cap\overline{C_{\pi'}}(y_{i_0})$, 重新染色 $F_x(i_0,\pi')$, 并且将边 e_{i_0} 染上颜色 α. 这样得到 G 中边的 $(k-1)$ 染色, 矛盾于 $\chi'(G)=k$.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...








(ii) $\overline{C_{\pi'}}(y_i) \cap \overline{C_{\pi'}}(y_j) = \emptyset,\ 0 \leqslant i < j \leqslant n.$

- 若不然，存在i和$j, i<j$使得$\overline{C_{\pi'}}(y_i) \cap \overline{C_{\pi'}}(y_j) \neq \emptyset$. 取$\beta \in \overline{C_{\pi'}}(y_i) \cap \overline{C_{\pi'}}(y_j)$使得$i$和$(j-i)$尽可能地小. 于是，对任何$\ell (0 \leqslant \ell \neq i \leqslant j-1)$, $\beta \in C_{\pi'}(y_\ell)$. 设$\alpha \in \overline{C_{\pi'}}(x)$. 由(i)知，$\alpha \neq \beta$, $\beta \in C_{\pi'}(x)$, $\alpha \in C_{\pi'}(y_k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
- 令$H = G[E_\alpha \cup E_\beta]$，则$d_H(x) = d_H(y_j) = d_H(y_i) = 1$. 令$H'$是$H$中含$x$的连通分支. 则由引理5.8知，$H'$是一条起点在$x$的$(E_\beta, E_\alpha)$交错路. 因此，$y_i$和$y_j$至少有一个不在$H'$中. 不妨设$y_i$不在$H'$中. 对换$H$中含$y_i$的连通分支$H''$中边上的颜色$\alpha$和$\beta$，便得到$G-e_0$中边的另一个$(k-1)$染色$\pi''$.
- 重新染色$F_x(i, \pi'')$，并将e_i染成α，便得到G中边的$(k-1)$染色，矛盾于$\chi'(G) = k$.

- 选取$e_0 \in E(G)$和$G-e_0$中边的$(k-1)$染色π'以



及 $F_x(n,\pi')$ 使得 n 尽可能地大.

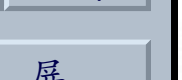
- 考虑 y_n. 由于 $d_G(y_n) \leqslant \Delta(G) < k-1$, 所以存在 $\alpha \in \overline{C_{\pi'}}(y_n)$. 由 (i) 和 n 的最大性, $\alpha \in C_{\pi'}(x)$ 并且存在边 $e_i \in F_x(n,\pi')$ 使得 $\pi'(e_i) = \alpha (1 \leqslant i \leqslant n)$.
- 由 $F_x(n,\pi')$ 的选取知, $\alpha \in \overline{C_{\pi'}}(y_{i-1})$. 于是, $\alpha \in \overline{C_{\pi'}}(y_{i-1}) \cap \overline{C_{\pi'}}(y_n)$. 这矛盾于 (ii). 所以, 式 (4) 得证. ∎

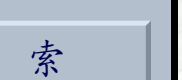
分类问题

- 式 (4) 提出了一个所谓分类问题.
- 使 $\chi'(G) = \Delta(G)$ 的简单图 G 称为第一类图;
- 使 $\chi'(G) = \Delta(G)+1$ 的简单图 G 称为第二类图.
- 2 部图和 K_{2n} 都是第一类图, 而 C_{2n+1} 和 K_{2n+1} 都是第二类图.







- 一般说来, 什么样的简单图属于第一类图, 什么样的简单图属于第二类图的问题目前尚未解决.
- 事实上, I. Holyer (1981) 已经证明了这是个 NPC 问题.
- 第二类图好象是相当地少. 例如: 在 $n \leqslant 6$ 的 143 个连通简单图中仅有 8 个图属于第二类图 (如图 5 所示).
- Erdős 和 Wilson (1977) 已证明: 几乎所有非空简单图都是第一类图, 即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C^1(n)}{C^1(n)\cup C^2(n)} = 1,$$

其中 $C^i(n)$ 表示 n 阶第 i 类图的集合.



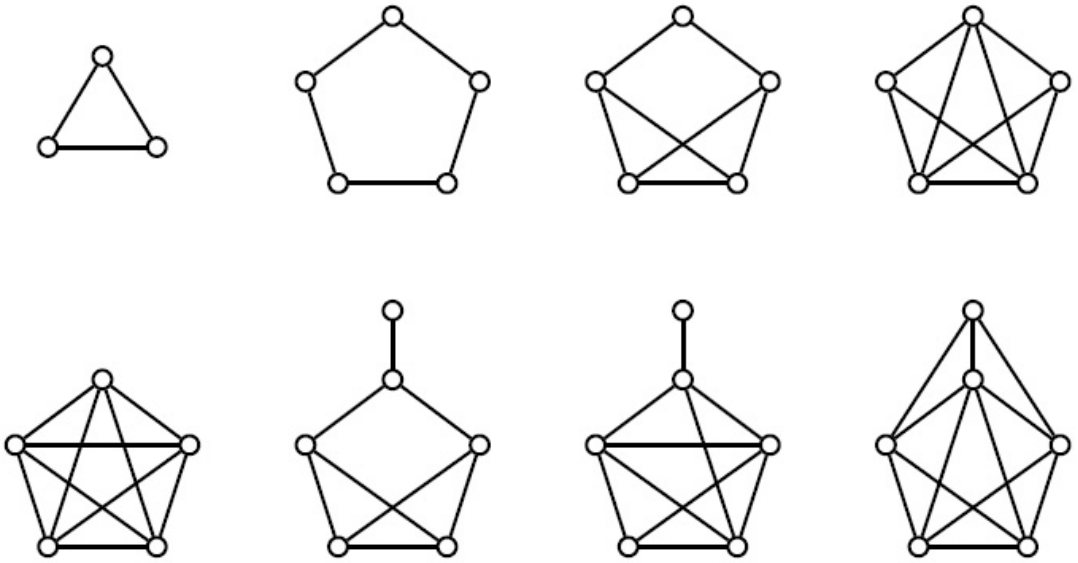


Figure 5: 所有阶数不超过6的第二类连通简单图

- 对于任何 $\Delta \geqslant 2$, 存在最大度为 Δ 的第一类平面图. 例如, 星 $K_{1,\Delta}$, $\chi'(K_{1,\Delta}) = \Delta = \Delta(K_{1,\Delta})$.
- 当 $\Delta = 2,3,4,5$ 时, 存在最大度为 Δ 的第二类平面图. 例如, $\chi'(K_3) = 3 = \Delta(K_3)+1$. 另外三种第二类平面图如图 6 所示.



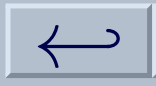
Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...

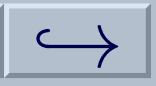












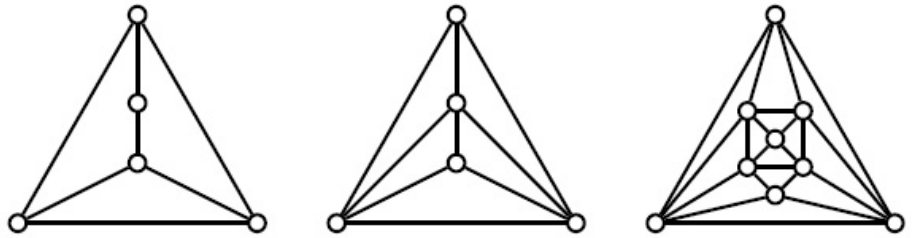


Figure 6: 3个第二类平面图

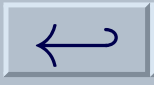
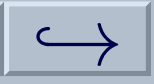
- Vizing (1965) 已证明: 不存在最大度 $\geqslant 8$ 的第二类平面图.
- 同时, Vizing (1968) 猜想: 不存在最大度为6或7的第二类平面图.
- 张利民 (2000) 和 D. P. Sanders & Y. Zhao (2001) 独立证明了: 不存在最大度为7的第二类平面图.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





- 目前还不知道是否存在最大度为6的第二类平面图.

作业

6.2.2 证明:

(a) 2 部简单图和 K_{2n} 是第一类图; (b) C_{2n+1} 和 K_{2n+1} 是第二类图;

(c) Petersen 图是第二类图; (d) 3 正则 Hamilton 图是第一类图.

6.2.4 证明:

(a) 奇阶非空正则简单图是第二类图;

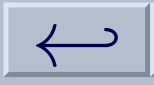
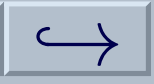
(b) 含割点的正则简单图是第二类图. (V. G. Vizing, 1965)



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





6.2.8 G 称为**边唯一k色可染的**(uniquely edge k-colorable), 如果G中边的任何两个不同的k染色$\pi' = (E_1, E_2, \cdots, E_k)$和$\pi'' = (E'_1, E'_2, \cdots, E'_k)$, 均有$E_i = E'_i$, $i = 1, 2, \cdots, k$. 证明: 边唯一3色可染3正则图必是Hamilton图.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...







全 屏

搜 索

关 闭

3 面染色与整数流

- 平图 G 中面的 k 染色 (face k-coloring) π^* 是指 k 种颜色 $1,2,\cdots,k$ 对 $F(G)$ 中元素的一种分配, 使得有公共边的两个面颜色不同.
- 换句话说, G 中面的 k 染色 π^* 是映射

$$\pi^*:\ F(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$$

使得对每个 $i(1\leqslant i\leqslant k)$, ${\pi^*}^{-1}(i)$ 中元素无公共边.

- 若令

$$F_i={\pi^*}^{-1}(i)=\{f\in F(G):\pi^*(f)=i\},\ i=1,2,\cdots,k,$$

则记

$$\pi^*=(F_1,F_2,\cdots,F_k).$$



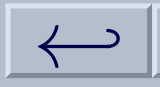
Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...

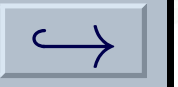












- 若平图 G 中面存在 k 染色, 则称 G 中**面 k 色可染** (face k-colorable).

$$\chi^*(G) = \min\{k: \ G \text{ 中面 } k \text{ 色可染}\}$$

称为 G 的**面色数** (face chromatic number).

- 例如, $\chi^*(K_4) = 4$. 由定义立即可知, 对任何平图 G 有

$$\chi^*(G) = \chi(G^*), \tag{6}$$

其中 G^* 是平图 G 的几何对偶.

- 由定理6.1.3和式(6)知, 对任何平图 G, 均有 $\chi^*(G) \leqslant 5$.

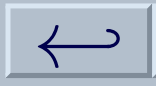
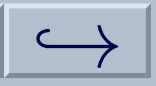
- 于是, 一个自然的问题是: 对每个平图 G, 是否有 $\chi^*(G) \leqslant 4$? 这就是著名的**四色问题** (four color problem).



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





- 这个问题至今没有从数学角度得到解决, 详细的将在6.4介绍. 在冲击四色问题中, 人们发现许多等价定理.

下面的定理揭示了四色问题与点和边染色之间的密切关系 (其中 (iii) 属于 P. G. Tait (1880)).

定理 6.3.1 下述三命题等价:

(i) $\chi(G) \leqslant 4$ **对每个平面图成立**;

(ii) $\chi^*(G) \leqslant 4$ **对每个平图成立**;

(iii) $\chi'(G) = 3$ **对每个简单无割边 3 正则平面图成立.**

证明

- 按 (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) 的顺序来证明.










(i) $\Rightarrow$ (ii): 由于平图的几何对偶图仍然是平图, 所以由 (6) 就得此结论.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 设 (ii) 成立, 并设 G 是简单无割边 3 正则平面图, $\widetilde{G}$ 是 G 的平面表示. 由假设 $\widetilde{G}$ 中面有 4 染色 π^*.

- 由于用什么符号来表达颜色是无关紧要的, 所以可以用 Z_2^2 中的向量 $c_0=(0,0), c_1=(1,0), c_2=(0,1)$ 和 $c_3=(1,1)$ 来表示 π^* 所用的四种颜色.
- 按下列原则确定 $\widetilde{G}$ 的边染色 π':

$$\pi'(e)=c_i+c_j \Leftrightarrow f\cap g=\{e\},$$

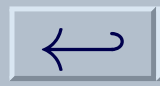
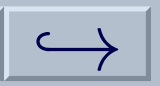
其中 $e\in E(\widetilde{G})$, f, $g\in F(\widetilde{G})$ 且 $\pi^*(f)=c_i, \pi^*(g)=c_j$.

- 例如, 见图 7 (a), 与顶点 u 关联的三个面在 π^* 下被染以颜色 c_i, c_j 和 c_k, 则与 u 关联的三条边在 π'



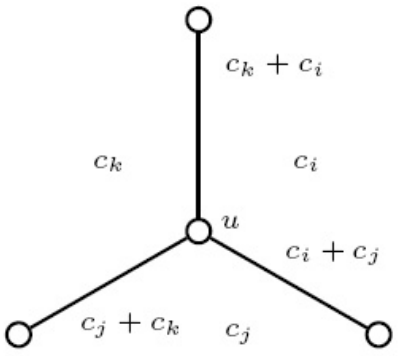




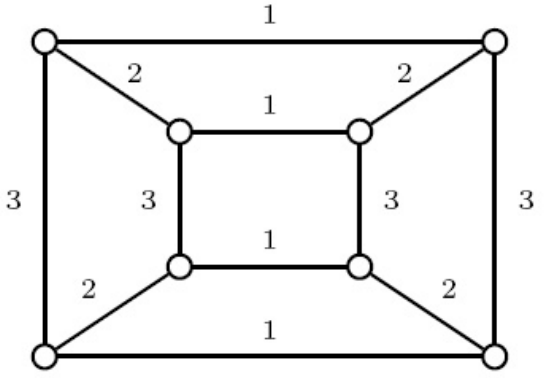



下被染以颜色 c_i+c_j, c_j+c_k 和 c_k+c_i, 而且这三种颜色是不同的.

- 由于 $\widetilde{G}$ 无割边, 所以每条边 e 必是某两个面的公共边, 即 $\widetilde{G}$ 的每条边都在 π' 下被染色, 而且 π' 中只用到颜色 c_1, c_2, c_3. 因此, π' 是 $\widetilde{G}$ 中边的 3 染色.



(a)



(b)

Figure 7: 定理 6.3.1 的证明辅助图



(iii) $\Rightarrow$ (i): 假设 (iii) 成立, 而 (i) 不成立.

- 则存在临界5色平面图 G. 设 $\widetilde{G}$ 是 G 的平面表示, 则 (习题3.1.3) 存在三角剖分图 H 使得 $\widetilde{G}$ 是 H 的支撑子图, 而且 (习题4.3.9) H 的几何对偶图 H^* 是无割边3正则简单平图.
- 根据 (iii), H^* 中边有3染色 $\pi' = (E_1, E_2, E_3)$.
- 对于 $i \neq j$, 设 $H^*_{ij} = H^*[E_i \cup E_j]$. 由于 H^* 中每个顶点既与 E_i 中边关联, 又与 E_j 中边关联, H^*_{ij} 不含奇度点 (见图7 (b)). 因而 (习题6.3.2), H^*_{ij} 中面是2色可染的.
- 令

$$\pi^*_1 : F(H^*_{12}) \to \{\alpha, \beta\} \quad 和 \quad \pi^*_2 : F(H^*_{13}) \to \{\gamma, \delta\}$$



分别是 H_{12}^* 和 H_{13}^* 中面的 2 染色.

- 设 $f \in F(H^*)$. 由于 $f \in F(H_{12}^*) \cap F(H_{13}^*)$, 所以在 π_1^* 和 π_2^* 下, f 被染有两种颜色 x 和 y, 记为 (x,y), 其中 $x = \alpha$ 或 $\beta, y = \gamma$ 或 δ.
- 下证由 $\pi^*(f) = (x,y)$ 而定义的

$$\pi^* : F(H^*) \to \{(\alpha,\gamma),(\alpha,\delta),(\beta,\gamma),(\beta,\delta)\}$$

是 H^* 中面的 4 染色.

- 由于 $H^* = H_{12}^* \cup H_{13}^*$, 而且 H^* 的相邻两个面得到的颜色对 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 不同, 所以 π^* 是 H^* 中面的 4 染色.
- 由于 $\widetilde{G}$ 是 H 的支撑子图, 所以能得到下列

$$5 = \chi(G) = \chi(\widetilde{G}) \leqslant \chi(H) = \chi^*(H^*) \leqslant 4$$

的矛盾. ∎



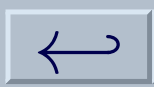
Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...

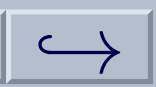












Remarks: (1)四色定理→ 2边连通3正则平面图可以3边染色;

(2)Barentte 猜想(1969): 每个3 连通3 正则的平面2 部图（C3CBP 图）都有哈密尔顿圈.

Tait 在1884 年猜测每个3 连通3 正则平面图都有哈密尔顿圈，这就是著名的Tait 猜想。直到1946 年，Tutte 通过构造一个反例证明了Tait 猜想是错误的。同时，Tutte 提出一个新的猜想：每个3 连通3 正则的2 部图都有哈密尔顿圈。但后来，随着Horton 图的发现，Tutte 猜想也被证明是错误的。于是，Barnette 结合了Tait 猜想和Tutte 猜想，提出了Barentte猜想

整数流

- 整数流是W. Tutte (1917-2002) 提出来的, 它与平图面染色问题密切相关, 是研究四色问题的有力



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...








方法之一.



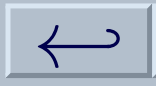
Figure 8: William Thomas Tutte OC FRS FRSC, known as Bill Tutte (May 14, 1917 – May 2, 2002), was a British, later Canadian, codebreaker and mathematician. During World War II he made a brilliant and fundamental advance in Cryptanalysis of the Lorenz cipher, a major German cipher system. The intelligence obtained from these decrypts had a significant impact on the Allied victory in Europe. He also had a number of significant mathematical accomplishments, including foundation work in the fields of graph theory and matroid theory.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...







- 有向图D的圈空间$C(D)$中向量$\mathbf{f}$称为整数流(integer flow), 如果对每个$e \in E(D)$, $\mathbf{f}(e)$都是整数.

- 整数流$\mathbf{f}$称为k流(k-flow), 如果

$$\max\{|f(a)| : a \in E(D)\} < k;$$

整数流$\mathbf{f}$称为全非零的(nowhere-zero), 如果$\mathbf{f}$支撑子图$D_{\mathbf{f}} = D$.

- 对于无向图G, 如果它的一个定向图D有整数流, 则称这个流为G的整数流. 事实上, 容易证明(习题6.3.8): 无向图G的某个定向图D有全非零k流, 那么G的任何定向图D都有全非零k流.

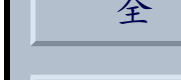
- 注意到, 如果$\mathbf{f}$是有向图D的整数流, $U \subset V(D)$非空, 那么

$$\sum_{e \in E_D^+(U)} \mathbf{f}(e) = \sum_{e \in E_D^-(U)} \mathbf{f}(e). \qquad (7)$$









- 这个事实说明: 如果$e \in E(G)$是割边, 那么对D的任何整数流$\mathbf{f}$, 均有$\mathbf{f}(e) = 0$. 正是这个原因, 讨论全非零流问题, 只需考虑无割边图.

- 显然, 具有全非零1流的图必是空图. 因此, 只有当$k \geqslant 2$时, 考虑全非零k流才有意义.

- 由式(7), 易知(习题6.3.9): 如果$\mathbf{f}$是有向图D的2流, 则$D_{\mathbf{f}}$的基础图不含奇度点. 进一步, 有向图有全非零2流 $\Leftrightarrow$ 它的基础图不含奇度点.

- 再由习题6.3.2知: 2连通平图D的面2色可染 $\Leftrightarrow$ D有全非零2流.

一般地, 整数流与平图面染色之间的关系有下列结论:

定理 6.3.2 (Tutte, 1954) 无割边平图D的面是k色可染的 $\Leftrightarrow$ D有全非零k流.



证明: $(\Rightarrow)$

- 令 $\pi^*: F(D) \to \{0,1,2,\cdots,k-1\}$ 是平图 D 的 k 面染色.
- 因为 D 是2边连通平图, 所以 D 中任何边都是某两个面 f_1 和 f_2 的公共边界, 而且 $\pi^*(f_1) \neq \pi^*(f_2)$.
- 以 D 中有向边 e 的方向为正向, 不妨设 f_1 和 f_2 分别在 e 左边和右边. 取 $\mathbf{f} \in \mathcal{E}(G)$ 如下:

$$\mathbf{f}(e) = \pi^*(f_1) - \pi^*(f_2), \ \forall e \in E(D).$$

- 断言: $\mathbf{f}$ 是D的非零k流。
- 显然, $0 < |\mathbf{f}(e)| < k, \ \forall e \in E(D)$.





- 对任意$v \in V(D)$, 设$E(v)$中的边按$e_1, e_2, \cdots, e_t$逆时针顺序嵌入平面，f_i 是以e_i和e_{i+1}为连续边界的面。定义：

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{若} e_i \in E^+(v) \\ -1, & \text{若} e_i \in E^-(v) \end{cases}$$

- 对μ做归纳，可得，

$$c(f_\mu) = c(f_t) + \sum_{i=1}^{\mu} \varepsilon_i \mathbf{f}(e_i) \qquad (8)$$

对$\mu = 1, 2, \cdots, t$成立。

- 因此，

$$c(f_t) = c(f_t) + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \mathbf{f}(e_i),$$



- 即

$$\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \mathbf{f}(e_i) = 0$$

- 即

$$\sum_{e \in E_D^+(v)} \mathbf{f}(e) \equiv \sum_{e \in E_D^-(v)} \mathbf{f}(e) \qquad (9)$$

- 因此, $\mathbf{f}$ 是 D 的全非零群 k 流.

$(\Leftarrow)$

- 设D 有全非零k 流$\mathbf{f}$, 证明D 的面是k色可染的. 给D的面分配颜色$c : F(G) \to \{0,1,2,\cdots,k-1\}$ 如下:

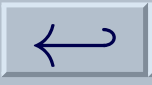
- 从D的任一面f_0出发，定义$c(f_0) = 0$.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...








- 对任意$e \in E(D)$，设f_i, f_i' 是和e相邻的两个面，并且f_i是在e的右侧的面。若$\{f_i, f_i'\}$ 中已有一个已经染色，定义

$$c(f_i') \equiv c(f_i) + \mathbf{f}(e) \pmod{k}.$$

- 断言：c是D的一个面染色。

- 因为$\mathbf{f}$是D的非零流，所以只要证明c 是一个好的定义，即在给D的面染色的过程中，每个面都只染了唯一的颜色即可。

- 设f_1是和两个已经染色的面f_2, f_3都相邻的未染色面，e_i 是f_1和f_i的邻边，$i = 2,3$. 不妨设f_1在e_i $(i = 2,3)$ 的左侧（若不然，改变e_i 的方向并且用$-\mathbf{f}(e_i)$ 代替$\mathbf{f}(e_i)$即可）。即证明

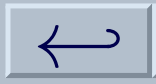
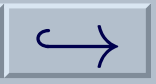
$$c(f_2) + \mathbf{f}(e_2) \equiv c(f_3) + \mathbf{f}(e_3) \pmod{k}.$$



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





- 考虑平图D的对偶图D^*. 令

$$R^* = \{f^* \mid f\text{是}D\text{中已染色的面}\},$$

则$D^*[R^*]$ 是连通图。

- 故D^* 中存在包含f_1^*, f_2^*, f_3^* 及e_2^*, e_3^* 的圈T^*, 且$V(T^*) \setminus \{f_1^*\} \subseteq R^*$.
- 因为D^*中的圈对应D中边割集，故存在$U \subseteq V(D)$使得$T = E_D(U, \overline{U})$.
- 因为$\mathbf{f}$是D的整数流，所以，

$$\sum_{e \in E^+(U,\overline{U})} \mathbf{f}(e) = \sum_{e \in E^-(U,\overline{U})} \mathbf{f}(e).$$

- 由面染色定义及上式易得结论。

∎



推论 6.3.2 无割边平图 D 的面是4色可染的 $\Leftrightarrow$ D 有全非零4 流.

Tutte整数流猜想

定理6.3.2 揭示了整数流与平图面染色之间的关系. 由五色定理(定理6.1.3) 立即知, 无割边平图 D 有全非零5 流. W. Tutte (1956) 曾猜想:

Tutte 5-流猜想: 每个无割边图有全非零5 流.

但这个猜想至今还没有解决, 已知最好的结果是P. Seymour 证明的6流定理.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...













推论6.3.2把四色问题归结为无割边平图的全非零4流的存在性问题. 正是这一点, 引起了人们对整数流的研究兴趣, 特别是全非零4 流的存在性问题. 下面是Tutte关于整数流的3个最重要猜想。

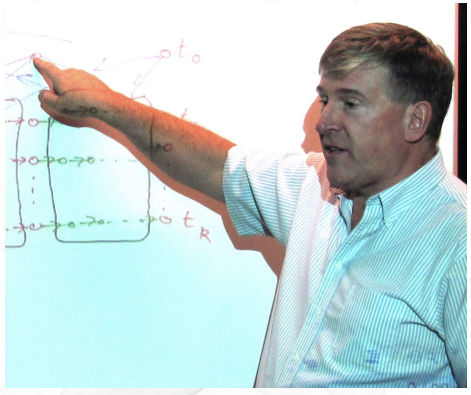




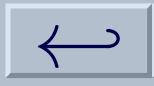
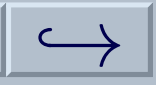
Figure 9: Three people in Princeton University: Paul Seymour (1950-), Maria Chudnovsky (1977) and Noga Alon(1956-)



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





Conjecture 3.1 (Tutte, Integer flow conjectures) *(1) (3-flow conjecture) Every 4-edge-connected graph admits a nowhere-zero 3-flow.*

(2) (4-flow conjecture) Every bridgeless graph containing no subdivision of the Petersen graph admits a nowhere-zero 4-flow.

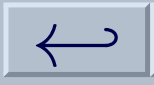
(3) (5-flow conjecture) Every bridgeless graph admits a nowhere-zero 5-flow.



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...







4 Fulkerson conjecture

Conjecture 4.1 (Berge-Fulkerson 猜想) 任一无桥3正则图都可以找到6个完美匹配使得该图的每条边恰好被覆盖两次.

Conjecture 4.2 (Berge 猜想) 任一无桥3正则图都可以找到5个完美匹配使得该图每条边至少属于其中一个匹配.

练习：

（1）上述两猜想对可3边染色的3正则图成立。

（2）上述两猜想对3正则Hamiltonian 图（含Hamilton圈的图）成立。图G 的Hamilton 圈是指包含图G 所有顶点的一个圈。

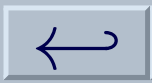
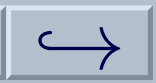
(3)上述猜想对3正则Hypohamiltonian 图成立？一个图G称为Hypohamiltoian 若G 本身不是Hamiltonian，但G 中任意去掉一个顶点所得的图是Hamiltonian。



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary Th...





5 Some elementary Theorems in Graph Theory

Theorem 5.1 (Turán Theorem, 1941) *For* $r \geq 2$

$$ex(n, K_{r+1}) = e(T_r(n))$$

and $T_r(n)$ *is the unique extremal graph for* K_{r+1}.

Fundamental theorem in Extremal graph theory.

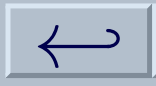
Theorem 5.2 (Ramsey Theorem, 1930) *For every positive integer* r *there exists an integer* n *such that every graph of order at least* n *contains either* K_r *or* $\overline{K_r}$ *as a subgraph.*



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary T . . .







谢谢大家!



Title Page
点染色
边染色
面染色与整数流
Fulkerson conjecture
Some elementary T . . .





