组合数学课程笔记

1 鸽巢原理

1.1 鸽巢原理

我们知道组合数学中的鸽巢原理:

定理 1.1 (鸽巢原理). 在 n 个鸽巢中放入 m 只鸽子，如果 m > n，那么至少有一个鸽巢中有多于一只鸽子。

下面考虑将其推广到更一般的情况上:

命题 1.2. 给定 n 个实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. 若有 $\sum_{i=1}^{n} a_i = M$, 则:

1. 存在 i, 满足 $a_i \geq \frac{M}{n}$;
2. 存在 j, 满足 $a_j \leq \frac{M}{n}$.

证明. 对于 1, 使用反证法: 如果 $\forall i \in [n]$, 都有 $a_i < \frac{M}{n}$, 则有 $\sum_{i=1}^{n} a_i < M$, 矛盾. ■

2 的证明与之类似.

■

将引理 1.2 的情况限制到整数上, 则得到如下命题:

命题 1.3. 给定 n 个整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. 若有 $\sum_{i=1}^{n} a_i = M$, 则:

1. 存在 i, 满足 $a_i \geq \lceil \frac{M}{n} \rceil$;
2. 存在 j, 满足 $a_j \leq \lfloor \frac{M}{n} \rfloor$.

证明. 对于 1, 直接根据引理 1.2 得到 $\exists i \ s.t. \ a_i \geq \frac{M}{n}$. 由于 a_i 为整数, 故有 $a_i \geq \lceil \frac{M}{n} \rceil$. ■

2 的证明与之类似.

■

命题 1.3 的直观理解: 在 n 个鸽巢中放入 M 只鸽子, 则必有至少一个鸽巢, 其中有至少 $\lceil \frac{M}{n} \rceil$ 只鸽子. 从这个角度出发, 显然鸽巢原理是强鸽巢原理在 $M = n + 1$ 时的推论.

命题 1.4. 给定 n 个实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, 以及 n 个实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. 若有 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$, 则:

1. 存在 i, 满足 $a_i \geq x_i$;
2. 存在 j, 满足 $a_j \leq x_j$.

证明. 与命题 1.2 的证明类似, 运用反证法: 假设 $\forall i \in [n]$, 都有 $a_i < x_i$, 则有 $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n} x_i$, 矛盾. ■

2 的证明与之类似.

■

同样将命题 1.4 的情况限制到整数上:

命题 1.5. 给定 n 个整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, 以及 n 个整数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$. 若有 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$, 则:

1. 存在 i, 满足 $a_i \geq x_i$;
2. 存在 j, 满足 $a_j \leq x_j$.

同样可以直观地理解命题 1.5: 如果将 M 只鸽子放进 n 个鸽巢里, 且有 $M = \sum_{i=1}^{n} x_i$, 则不可能每个鸽巢中的鸽子数都少于对应的 x_i.

通过将实数上成立的命题 1.4 限制在整数上得到命题 1.5, 其给出的界是紧的吗?

通过尝试不难观察发现, 要使得每个鸽笼中的鸽子数都少于对应的 x_i 即至多为 $x_i - 1$, 则总鸽子数至多为 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n$. 换言之, 只要 $M \geq \sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1$, 则必有至少某个鸽巢中的鸽子数达到对应的 x_i. 此即所谓强鸽巢原理:

命题 1.6 (强鸽巢原理). 给定 n 个整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, 以及 n 个整数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$. 若有 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1$, 则存在 i, 满足 $a_i \geq x_i$;

1.2 鸽巢原理的应用

下面通过一些例题来展示强鸽巢原理的运用:

问题 1.7. 如图 1 所示, 有大小两个圆盘, 圆心重合, 都被等分为 200 个扇形/扇环区域. 大圆盘可以转动, 且转动的每个角度必定使小圆盘的每个区域恰与大圆盘的某个区域对齐. 已知大圆盘上有 100 个区域被涂成蓝色, 另外 100 个区域被涂成红色; 小圆盘上也有 100 个区域被涂成蓝色, 另外 100 个区域被涂成红色. 证明: 存在某个转动状态, 使得大小圆盘的对应区域颜色相同的数量至少有 100 个.

证明. 证法 1:

用 $a_1, a_2, ..., a_{200} \in \{-1, 1\}$ 和 $b_1, b_2, ..., b_{200} \in \{-1, 1\}$ 分别表示大小圆盘上 200 个内层扇形/外层扇环的颜色. 由此, 第 i 个等分位上大小圆盘的区域颜色相同, 当且仅当 $ai \cdot bj = 1$; 同样, 第 i 个等分位上大小圆盘的区域颜色不同, 当且仅当 $ai \cdot bj = -1$.

将大圆盘顺时针转动 i 个单位后，大小圆盘的扇形的对应关系将从

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{200} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{200} \end{array}$$

变化为

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{200} \\ b_{i+1} & b_{i+2} & \dots & b_{i+200} \end{array}$$

(这里默认 $b_{i+200} = b_i, \forall i \in [200]$.)

则待证命题转化为, 存在某个 i, 使得 $P_i = \sum_{k=1}^{n}(a_i b_{k+i}) \geq 0$. 这是因为如果至少有 100 个位置上对应区域颜色相同, 则这 200 项中应有至少 100 个 1, 以及至多 100 个 -1.

将大圆盘分别顺时针转动 1 格,2 格,...,200 格 (等效于不转动), 则分别可以得到:

$$\begin{aligned} P_1 &= \sum_{k=1}^{200}(a_k b_{k+1}) = a_1 b_2 + a_2 b_3 + \ldots + a_{200} b_1 \\ P_2 &= \sum_{k=1}^{200}(a_k b_{k+2}) = a_1 b_3 + a_2 b_4 + \ldots + a_{200} b_2 \\ &\cdots \\ P_i &= \sum_{k=1}^{200}(a_k b_{k+i}) = a_1 b_{i+1} + a_2 b_{i+2} + \ldots + a_{200} b_i \\ &\cdots \\ P_{200} &= \sum_{k=1}^{200}(a_k b_k) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_{200} b_{200} \end{aligned}$$

根据题意, 我们有:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{200} P_i &= \sum_{1 \leq i \leq 200, 1 \leq k \leq 200} a_i b_{i+k} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 200, 1 \leq j \leq 200} a_i b_j \\ &= (\sum_{i=1}^{200} a_i)(\sum_{j=1}^{200} b_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

由命题 1.5, 存在某个 i 使得 $P_i \geq 0$. 这就完成了原命题的证明.

■

鸽巢原理还可以表示为其逆否命题:

推论 1.8. 将 n 只鸽子放入 n 个鸽巢中，若不存在某个鸽巢放了至少两只鸽子，则一定是每个鸽巢恰好放了一只鸽子。换句话说，给定两个有限集合 A, B 满足 $|A| = |B| = n$, 对于一个从 A 到 B 的映射 $f : A \to B$, 如果 f 是单射或满射, 则一定是双射.

下面我们展示用推论 1.8 证明中国剩余定理:

定理 1.9 (中国剩余定理). 给定两个互素整数 m_1, m_2, 即 $(m_1, m_2) = 1$. 则如下同余方程的解在 $\mathrm{mod} m_1 m_2$ 的意义下有解 (且唯一) :

$$\begin{cases} x \equiv a_1 (\mathrm{mod} m_1) \\ x \equiv a_2 (\mathrm{mod} m_2) \end{cases}$$

证明. 在 $\mathrm{mod} m_1$ 与 $\mathrm{mod} m_2$ 的意义下, 上述方程中的 a_1 有 m_1 种可能的不同取值, a_2 有 m_2 种可能的不同取值, 因此方程整体总共有 $m_1 m_2$ 种可能的状态. 而在 $\mathrm{mod} m_1 m_2$ 的意义下, x 的解也恰有 $m_1 m_2$ 种不同的情况. 根据推论 1.7, 为了证明每个方程均有解, 我们只需证明每个方程的解至多有一个.

运用反证法: 设某组 (a_1, a_2) 对应的方程在 $\mathrm{mod} m_1 m_2$ 的意义下有两种不同的解 x_1, x_2, 即同时有 $x_1 \equiv x_2 (\mathrm{mod} m_1)$ 与 $x_1 \equiv x_2 (\mathrm{mod} m_2)$ 成立. 这就意味着有 $m_1 | x_1 - x_2$ 与 $m_2 | x_1 - x_2$, 从而有 $[m_1, m_2] | x_1 - x_2$. 又根据 $(m_1, m_2) = 1$, 可以得出 $[m_1, m_2] = m_1 m_2$ 从而 $m_1 m_2 | x_1 - x_2$. 这就与反证假设矛盾. ■

■

问题 1.10. 任一由 $mn + 1$ 个实数构成的数列 $\{a_i\} = a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$, 其中要么存在长为 $n+1$ 的递增子列 (任意一项不小于前一项) ; 要么存在长为 $m+1$ 的递减子列 (任意一项不大于前一项) .

证明. 证法 1:

对于每个 i, 考虑以元素 a_i 结尾的的最长递增子列, 设其长度为 n_i; 同样考虑以其为结尾的最长递减子列, 设其长度为 m_i.

运用反证法: 假定该列中不存在长为 $n+1$ 的单调子列, 则对于每个 i, m_i 只能在 $[m]$ 中取值, n_i 只能在 $[n]$ 中取值, 从而有序对 (m_i, n_i) 的情况只有 mn 种可能. 根据鸽巢原理, 这 $n^2 + 1$ 个数中将存在两个数 a_i, a_j 满足 $(m_i, n_i) = (m_j, n_j)$, 不妨设 $i < j$.

但, 对于两个实数 a_i, a_j, $a_i \geq a_j$ 与 $a_i \leq a_j$ 两者必居其一. 如果前者成立, 确定以 a_i 结尾的最长递减子列, 将 a_j 拼接在其后便可得到一个长为 $m_i + 1$ 的递减子列, 与反证假设矛盾; 同理, 如果后者成立, 则可得到一个长为 $n_i + 1$ 的递增子列, 同样矛盾. ■

■

批注 1.11. 我们实际上证明了更强的命题: 数列中必定要么存在长为 $n+1$ 的递增子列, 要么存在长为 $m + 1$ 的严格递减子列.

练习 1.12. 对于正整数 m, n, 给出一个长为 mn 的实数列, 使得其中不存在长为 $n + 1$ 的递增子列或长为 $m + 1$ 的递减子列.

1.3 Ramsey 问题

下面我们通过 Ramsey 问题展示鸽巢原理在图论中的运用.

问题 1.13. 对于完全图 K_6, 将其每条边染成红色或蓝色, 则必定存在导出子图 K_3, 其中的所有边颜色相同 (全为红色或全为蓝色).

证明. 运用反证法: 假定存在一种染色, 图中没有同色的导出子图 K_3.

任取 K_6 中一个点 v_1, 对于其 2 个邻点 v_2, v_3, 若边 v_1v_2 与 v_1v_3 均被染成红色, 则 v_2v_3 应为蓝色. 若 v_1 有至少 3 个以红色边相邻的点 v_2, v_3, v_4, 则这 3 个点之间两两以蓝色边相连, 构成了一个同色的 K_3, 矛盾. 这说明 v_1 至多有 2 个以红色边相邻的顶点. 同理 v_1 至多有 2 个以蓝色边相邻的顶点. 但 v_1 有 5 个邻点, 根据鸽巢原理, 必定存在 3 个顶点与其以同色的边相邻. ■

■

练习 1.14. 对于完全图 K_5, 给出一种进行 2-边染色的方式, 使得图中不存在同色的导出子图 K_3.

问题 1.15 (Ramsey 问题). 任给正整数 a, b, 是否存在正整数 n, 使得对于完全图 R_n 的任意 2-边染色, 都存在红色的导出子图 K_a 或蓝色的导出子图 K_b. 如果存在, 对于一组 (a, b), 求出最小的满足要求的 n. (显然, 如果一个正整数 n 具有此性质, 则任何正整数 $m > n$ 都具有此性质.)

对于一组 (a, b), 称最小的具有此性质的 n 为 (a, b) 的 Ramsey 数, 记为 $R(a, b)$. 自然, 有 $R(a, b) = R(b, a)$.

命题 1.16. 对于任意自然数 a, $R(1,a)=1, R(2,a)=a$.

证明. 这是显然的.

■

Ramsey 数的存在性问题的答案是肯定的. 我们可以归纳地证明这一点 (实际上给出 Ramsey 数的一个上界) .

定理 1.17. 对于任意正整数 $a,b\geq 2$, $R(a,b)\leq R(a,b-1)+R(a-1,b)$.

证明. 记 $n=R(a,b), s=R(a,b-1), t=R(a-1,b)$. 我们使用反证法: 考虑完全图 K_s 上的 2-边染色, 其中既不存在红色的 K_a, 也不存在蓝色的 K_b.

任取其中的一个点 v_1, 假设其与至少 s 个点以蓝色边相邻. 根据假设, 这 s 个点的导出子图中要么存在红色的 K_a, 要么存在蓝色的 K_{b-1}. 再根据反证假设, 图中不存在红色的 K_a, 故只可能存在蓝色的 K_{b-1}. 由于 v_1 与这 s 个点全部以蓝色边相邻, 故与蓝色 K_{b-1} 中的点也全部以蓝色边相邻, 这 b 个点的导出子图就构成了一个蓝色的 K_b, 与反证假设矛盾. 这说明 v_1 至多与 $s-1$ 个点以蓝色边相邻.

同理, v_1 至多与 $t-1$ 个点以红色边相邻. 但在 K_n 中, v_1 有 $n-1=s+t-1$ 个邻点. 根据鸽巢原理, 其要么有 t 个以红色边相连的点, 要么有 s 个以蓝色边相邻的点, 矛盾. ■

■

练习 1.18. 对于任意正整数 a,b, 证明 $R(a,b)\leq \binom{a+b-2}{a-1}$. *提示: 考虑使用数学归纳法.*

2 计数

2.1 加法原理与乘法原理

组合计数的基础是所谓加法原理与乘法原理.

陈述 2.1 (加法原理). 设 A_1, A_2 为两个不交的集合, 记 $|A_1| = a_1, |A_2| = a_2$, 则从 A_1 或 A_2 中选取一个元素, 共有 $a_1 + a_2$ 种选法.

更进一步地, 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为一列两两不交的集合, 记 $|A_i| = a_i$, 则从这些集合中选取一个元素, 共有 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 种选法.

根据加法原理, 我们还可以得到与之对应的所谓减法原理:

陈述 2.2 (减法原理). 设有两个集合 $A \subseteq X$, 记 $|A| = a, |X| = n$, 则从 U 中选取一个元素并确保其不在 A 中, 共有 $n - a$ 种选法.

陈述 2.3 (乘法原理). 设 A_1, A_2 为两个集合, 记 $|A_1| = a_1, |A_2| = a_2$, 则从 A_1 与 A_2 各中选取一个元素, 共有 $a_1 a_2$ 种选法.

更进一步地, 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为一列集合, 记 $|A_i| = a_i$, 则从这些集合的每一个中选取一个元素, 共有 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 种选法.

根据乘法原理我们可以计算所谓的排列数.

定义 2.4 (排列数). 对于两个自然数 $k \leq n$, 定义 (n, k) 的排列数 $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$. 除了 $(n)_k$ 外, (n, k) 的排列数有时也记作 $P(n, k)$ 或 P_k^n.

根据乘法原理容易注意到, 排列数 $(n)_k$ 的组合含义为: 从 $[n]$ 中选取 k 个排成一列, 并认为两种排列相同当且仅当每个位置上的元素都对应相同, 总的排列方法数. 特别地, 当 $k = n$, 即需要将全部元素排成一列时, 总的方法数 $(n)_n = n!$. 这也正好是集合 $[n]$ 到自身的双射的数量.

以下是排列数几个常见的变种.

命题 2.5. (i) (圆排列数) 将集合 $[n]$ 中的元素顺时针排列成一个圆环, 并认为两种排列相同当且仅当它们可以仅通过旋转得到彼此, 则总的排列方法数为 $\frac{n!}{n}$.

(ii) (项链数) 将集合 $[n]$ 中的元素顺时针排列成一个圆环, 并认为两种排列相同当且仅当它们可以仅通过旋转与翻折得到彼此, 则总的排列方法数为 $\frac{n!}{2n} (n \geq 2)$.

证明. (i) 显然排列之间的相同关系是一种等价关系. 对于一个等价类中的一个排列, 考虑其中某个特定元素元素的位置, 容易看出每个排列可以旋转至 n 种不同的状态, 故每个等价类的元素个数均为 n. 则等价类的数量为 $\frac{n!}{n}$.

(ii) 在 (i) 的基础上, 一个排列所在的等价类还包括这个排列沿任何一处翻折得到的排列, 故每个等价类的元素个数变为 $2n$. 则等价类的数量为为 $\frac{n!}{2n}$.

当然, 需要注意当 $n = 1$ 时, 翻折并不会带来新的排列, 故总的排列方法数仍为 $\frac{1!}{1} = 1$. 这也与通过平凡的枚举法得到的数量相符.

■

与排列数关联紧密的是组合数. 在第一章中我们已经接触过组合数, 这里我们引入正式的定义.

定义 2.6 (组合数). 对于两个自然数 $k \leq n$, 定义 (n, k) 的组合数 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. 除了 $\binom{n}{k}$ 外, (n, k) 的排列数有时也记作 $C(n, k)$ 或 C_k^n.

(n, k) 的组合数 $\binom{n}{k}$ 的组合含义同样是明确的: 从集合 $[n]$ 中选取一个 k 元子集, 总的选取方法数. 我们可以基于排列数的组合含义说明二者相等: 注意到集合具有无序性, 因此两个 k 元排列作为子集等价当且仅当它们含有的元素完全相同, 故每个 k 元子集对应的等价类里恰有 $k!$ 个元素.

2.2 不定方程的解

下面我们运用组合数来研究不定方程的整数解的问题.

定理 2.7 (不定方程的正整数解). 对于正整数 n, 给出不定方程 $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$, 其中 x_i 均为正整数. 则此方程的解组的个数为 $\binom{n-1}{k-1}$.

证明. 首先证明此方程的解数量有限: 每个元 x_i 均为正整数故 $x_i \geq 1$. 又因为其它元也为正整数, 故 $x_i \leq n - k + 1$. 因此原方程的一组解 $(x_1, \ldots, x_k) \in [n - k + 1]^k$, 而后者无疑是一个有限集.

下面我们来求解方程的解的数量:

法 1: 隔板法

将 n 个相同的物品排成一列. 在这 n 个物品形成的 $n - 1$ 处间隙共插入 $k - 1$ 个相同隔板, 并确保每处间隙只插入了最多一个隔板. 容易验证, 如果认为 $k - 1$ 个隔板隔开形成的 k 个区间里的物品数量分别代表每个元 x_i 的值, 则每种插板方法与方程的每个整

数解一一对应. 因此方程解的个数等于总的插板方法数, 即从 $n-1$ 个元素中无序地选择 $k-1$ 个的方法数. 答案即为组合数 $\binom{n-1}{k-1}$.

法 2: 数学归纳法

我们固定 n, 对 k 归纳地证明:

① $k=1$ 时, 仅有一组解 $x_1=n$. 这与 $\binom{n-1}{k-1}=\binom{n-1}{0}=1$ 相符.

② 若命题对于 k 成立, 则对于 $k+1$ 的情况:

考虑元 x_{k+1} 的值并对其分类讨论, 注意到其只能在 1 到 $n-k$ 中取值:

$x_{k+1}=1$: 此时有 $\sum_{i=1}^{k}=n-1$. 根据归纳假设, 这种情况下方程的解的数量恰为 $\binom{n-2}{k-1}$;

$x_{k+1}=2$: 此时有 $\sum_{i=1}^{k}=n-2$. 同样, 这种情况下方程的解的数量恰为 $\binom{n-3}{k-1}$;

...

$x_{k+1}=n-k$: 此时有 $\sum_{i=1}^{k}=k$, 这种情况下方程的解的数量恰为 $\binom{k-1}{k-1}=1$.

根据我们先前的结论, 以上情况合起来对原方程的解集构成了一个划分. 根据加法原理, 原方程的解的数量恰为 $\sum_{i=1}^{n-k}\binom{n-i-1}{k-1}=\binom{n-1}{k}$. 这就完成了证明.

■

批注 . 法 2 的证明中用到了等式 $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$. 这个等式可以用等式 $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ 归纳地证明, 也可以利用组合意义证明.

据此我们可以得出如下推论:

推论 2.8. 对于正整数 n, 不定方程 $\sum_{i=1}^{n}x_i=n$ 的满足 $x_i\geq a_i\ \forall i$ (其中 a_i 均为整数) 的整数解有 $\binom{n-\sum_{i=1}^{k}a_i+k-1}{k-1}$ 组.

特别地, 不定方程 $\sum_{i=1}^{n}x_i=n$ 的非负整数解有 $\binom{n+k-1}{k-1}$ 组.

证明. 我们将问题划归到定理 2.7 的情形: 对于每个 i, 设 $b_i=x_i-a_i+1$. 则 b_i 均为正整数, 问题转化为求 $\sum_{i=1}^{k}b_i=n-\sum_{i=1}^{k}a_i+k$ 的正整数解的数量. 直接利用定理 2.7 可得.

■

批注 . 注意为什么在 2.8 中插板法不再适用: 以 $a_1=\ldots=a_k=0$, 即求非负整数解的情况为例: 读者或许会想到为了允许 $x_i=0$ 这一类解存在, 只需允许板插在序列的最外侧的两个位置, 以及允许同一个间隙插多个板即可. 但这意味着我们无法通过组合数方便地计算插板的方法数. 如果改为逐个插板并使用乘法原理计数, 则无法体现板之间的全等, 会使得每种插板方案被计算多次. 越是有同一间隙插了多个板的插板方案, 被重复计算的次数越少, 因此也无法仿照 2.5 的情形用简单的除法求得等价关系的商集的大小.

练习 2.9. 对于正整数 n, 求不定方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ 的满足 $a_i \le x_i \le b_i$ 的解的个数. *提示: 考虑使用容斥原理.*

排列数和组合数还可以用来求解如下多重排列与多重组合问题:

问题 2.10. 现有 n 个球, 每个球可能为 t 种颜色之一, 且其中颜色 c_i 的球共有 k_i 个 (满足 $\sum_{i=1}^{t} k_i = n$) . 颜色相同的球视为相同的. 将这 n 个求排成一列, 求不同的排列方法数.

证明. 首先将这 n 个球看成不同的, 任意排列这 n 个球, 共有 $n!$ 种排法. 由于颜色相同的球被视为相同的, 因此任意交换同种颜色的 k_i 个球得到的新排列与原排列是等价的, 每个等价类里共有 $k_1!k_2!\dots k_t! = \prod_{i=1}^{t} k_i!$ 个排列. 故等价类的数量为 $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{t} k_i!}$.

■

问题 2.11. 现有 n 个球, 每个球可能为 t 种颜色之一, 且其中颜色 c_i 的球共有 k_i 个 (满足 $\sum_{i=1}^{t} k_i = n$) . 颜色相同的球视为相同的. 从这 n 个球中取 r 个球, 求不同的取法数.

证明. 问题等价于求不定方程 $\sum_{i=1}^{t} x_i = r$ 的满足 $\forall i\ 0 \le x_i \le k_i$ 的整数解的数量. 这就划归到问题 2.9.

■

问题 2.12. 在凸 n 边形中 ($n \ge 4$), 已知任意三条对角线不共点, 求所有对角线总共形成的交点个数.

证明. 注意到每 4 个端点唯一确定一个对角线交点. 且由于任意三条对角线不共点, 不同的 4 个端点生成的对角线交点一定不同. 因此问题转换为从 n 个顶点中取 4 个点的取法数, 易知取法数为 $\binom{n}{4}$

■

批注 . 注意为什么直接从对角线个数出发计算交点数会带来困难: 容易求出凸 n 边形共有 $\binom{n}{2} - n$ 条对角线, 但并非任意两条对角线都有交点, 以及交点都一定在凸 n 边形内部. 而对于任意一对具体的对角线, 分类讨论其是否有 n 边形内的交点是不现实的.

2.3 组合恒等式

关于组合数, 我们可以证明许多常用的组合恒等式.

定理 2.13. $\forall n \in N, 2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$

证明. 我们首先提供两种典型的证法: 二项式系数法与组合意义法. 这两种方法都是证明组合恒等式中常用的方法. 除此之外, 归纳法对于某些组合恒等式的证明也十分适用, 我们在此一并展示.

法 1. 二项式系数法:

考虑二项式的幂 $(1+x)^n$, 其完全展开后共有 2^n 项. 而合并同类项后 x 的指数可以取遍 0 到 n 共 $n+1$ 种取法, 故这 $n+1$ 项的系数之和应恰为 2^n.

对于 i 次项 $a_i x^i$, 计算其系数 a_i 可根据组合数: 在 $(1+x)^n$ 的完全展开式中, 如果某一项为 x^i, 则一定是通过在恰好 i 个因式中选取了 x 并在剩余的因式中选取了 1 相乘得到. 因此 x^i 的系数恰好等于从 n 个元素中选取 i 个的选法数, 即组合数 $\binom{n}{i}$. 这就证明了 $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

法 2. 组合意义法:

考虑在一个 n 元集合 A 确定一个子集 X, 求 X 的可能的总数. 我们有两种角度考虑这个过程:

① 考虑 A 中的每一个元素 a, 其可以有在或不在 X 中两种情况, 且每个元素的状态不同都会使得 X 不同. 根据乘法原理, X 的可能数是 $2^{|A|} = 2^n$, 即 A 有 2^n 个不同的子集.

② 考虑 $|X|$, 其取值可以取遍 0 到 n, 且 i 元子集 X 可能的数量为组合数 $\binom{n}{i}$, 且这些情况彼此互斥. 根据加法原理, X 的可能数是 $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

由于两个过程的组合意义相同, 计算出的 X 的可能数自然也理应相同. 这就证明了命题.

法 3. 数学归纳法:

① $n = 0$ 时, 左侧 $LHS = 2^0 = 1$, 右侧 $RHS = \binom{0}{0} = 1$, 命题成立;

② 若对于 n 命题成立, 则对于 $n+1$:

我们知道 $\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$. 又根据归纳假设, 有 $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

考虑 $2^{n+1} = 2\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$, 我们将右侧的项作如下划分: 首先单独分出一个 $\binom{n}{0}$ 和一个 $\binom{n}{n}$, 它们都等于 1, 也就分别等于 $\binom{n+1}{0}$ 和 $\binom{n+1}{n+1}$; 对于剩下的项, 每一组 $\binom{n}{i}$ 与 $\binom{n}{i+1}$ 相

加, 得到 $\binom{n+1}{i+1}$, 其中 i 取遍 0 到 $n-1$, 故得到了 $\binom{n+1}{1}$ 到 $\binom{n+1}{n}$. 这就证明了右式等于 $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i+1}$, 也就完成了证明.

■

批注 2.14. 上述法 1 的过程中, 我们实际上证明了 $(x+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$. 也可以在证明这个命题后, 直接代入 $x=1$ 以完成 2.13 的证明. 这实际上等价于一种形式化的 "统计项数" .

批注 2.15. 上述法 3 的过程中, 我们用到了关于组合数的结论 $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$. 由于求和的项数是固定的, 这个结论可以直接代入组合数的定义证明, 但也同样可以运用组合意义证明: 考虑在 $n+1$ 个元素的集合 A 中确定一个 $k+1$ 元的子集 X, 任取一个固定的元素 a, 则要么有 $a\in X$, 要么有 $a\notin X$. 前者等价于在 n 元集 $A\setminus\{a\}$ 中确定一个 k 元子集 $X\setminus\{a\}$; 后者等价于在 n 元集 $A\setminus\{a\}$ 确定一个 $k+1$ 元子集 X. 这就完成了证明.

上面我们展示了组合意义法证明恒等式的思路: 考虑一个具体的组合过程, 用不同的方法计算其方法数, 这样就证明两种计算法得到的结果是相等的. 组合意义法也因此俗称 "算两遍" .

命题 2.16. $\forall n\in N, 2^{n-1}=\sum_{i\in[n],i=2k}\binom{n}{i}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$

证明. 我们依然使用两种方法分别证明.

法 1. 二项式系数法:

由 2.14, $(x+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$. 在左侧中代入 $x=-1$, 则有 $0=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i$. 将右侧中负项移到左侧, 可知偶数次项 $((-1)^i=1)$ 的系数和与奇数次项 $((-1)^i=-1)$ 的系数和在 2^n 中各占一半. 这就完成了证明.

法 2. 组合意义法:

右侧的组合意义为 n 元集合 A 中元素个数为偶数的子集 X 的总数, 因此我们只需证明这类集合在 A 的全体子集中占恰好一半. 考虑一个固定的元素 a, 对于每个含有/不含有 a 的偶数元子集, 在其中删去/添加 a 就得到了一个奇数元子集, 且容易验证这种变换的过程是一一映射. 这就证明了 A 的子集中偶数元子集与奇数元子集数量相同, 也就完成了证明.

■

命题 2.17. $\forall n\in N, n2^{n-1}=\sum_{i=0}^{n}i\binom{n}{i}=0\cdot\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}\ldots+n\binom{n}{n}$

证明. 我们依然使用两种方法分别证明.

法 1. 二项式系数法:

由 2.14, $(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$. 此式两边都是关于 x 的多项式函数, 故对 x 求导后也应相同. 左式求导为 $n(x+1)^{n-1}$; 右式的每一项求导为 $i\binom{n}{i}x^{i-1}$, 求和后为 $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}x^{i-1}$. 代入 $x=1$ 就完成了证明.

法 2. 组合意义法:

考虑如下组合过程: 在 n 元集合 A 中确定一个非空子集 $X \subseteq A$, 并在 X 中确定一个元素 $a \in X$. 认为两种选法相同当且仅当 $X_1 = X_2$ 且 $a_1 = a_2$. 我们有两种角度求解方法数:

① 先确定元素 a, 共有 n 种选法. 在确定集合 X 同时确保 $a \in X$, 这意味着在逐个判断元素是否属于 X 时不必再判断 a, 即乘法原理的过程中少乘一次 2, 故方法数为 2^{n-1}. 根据乘法原理, 整个过程总的方法数为 $n2^{n-1}$.

② 考虑 $|X|$, 其取值可以取遍 1 到 n, 且 i 元子集 X 可能的数量为组合数 $\binom{n}{i}$. 在 $|X| = i$ 时, 从中取一个元素 a 有 i 种取法. 故 $|X| = i$ 时, 整个过程的方法数为 $i\binom{n}{i}$. 根据加法原理, 总的方法数为 $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}$.

由于两个过程的组合意义相同, 计算出的结果自然也理应相同. 这就证明了命题.

■

2.4 格点游走

计算格点游走过程的方法数是计数中的经典问题, 其与概率论与随机过程中的随机游走有许多相通之处.

问题 2.18. 一只蚂蚁在二维平面的整点 Z^2 上行走, 从 $(0,0)$ 出发, 每步可以向上或向右行走一个单位距离. 求走到 (m,n) 共有多少种走法.

证明. 根据行走规则, 蚂蚁从 $(0,0)$ 到 (m,n), 一定用了恰好 $m+n$ 步, 且其中恰有 m 步是向右行走. 因此求走法数等价于在 $m+n$ 步中选取 m 步的方法数, 也就是 $\binom{n}{m}$.

■

批注 我. 们可以据此重新证明 $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m}$. 考虑蚂蚁到达 (m,n) 的前一步: 其要么处在 $(m-1,n)$ (最后一步向右) ; 要么处在 $(m,n-1)$ (最后一步向上) . 故走到 (m,n) 的走法数应是走到 $(m-1,n)$ 与 $(m,n-1)$ 分别的走法数之和.

问题 2.18. 一只蚂蚁在一维数轴的整点 Z 上行走, 从 0 出发, 每步可以向左或向右行走一个单位距离. 求 t 步后恰好走到 k 共有多少种走法.

证明. 显然, 当 $t < k$ 时, t 步后走到 k 是不可能的, 总的走法数为 0.

容易想到不同的走法来自于折返过程可以有不同安排, 但每次折返到同一个点必然要花偶数步, 因此 t 步后所处的位置 k 应该满足 $k \equiv t(\mathrm{mod}2)$. 所以, 当 $t-k$ 为奇数时, 总的走法数为 0.

当 $t-k$ 为非负偶数时, 蚂蚁从 0 到 k 用了恰好 t 步, 则其中应恰有 $\frac{t-k}{2}$ 步是向负方向即向左行走. 总的走法数为 $\binom{t}{\frac{t+k}{2}}$.

■

问题 2.19. 一只蚂蚁在一维数轴的整点 Z 上行走, 从 0 出发, 每步可以向左或向右行走一个单位距离. 求 t 步后恰好走到 k, 且中途穿过 k (到达过 $k+1$) 共有多少种走法.

证明. 我们只讨论 $t-k$ 为非负偶数的情况. 先改为考虑第 t 步处在 $k+2$ 的走法数, 由 2.18 得走法数为 $\binom{t}{\frac{t+k+2}{2}}$. 对于其中的每一种走法, 找到其第一次到达 $k+1$ 的时刻 t_1, 并将那之后的所有步反向, 则更改后的走法里蚂蚁在 t 时刻会处在位置 k, 且过程中到达过 $k+1$. 由于映射不改变第一次到达 $k+1$ 的时刻 t_1, 且 t_1 时刻后的变换是一个双射, 因此映射整体也是一个双射. 这就证明了 t 步后处于 k 且到达过 $k+1$ 的走法与 t 步后处于 $k+2$ 的走法一一对应, 故总的走法数为 $\binom{t}{\frac{t+k+2}{2}}$.

■

问题 2.20. 一只蚂蚁在一维数轴的整点 Z 上行走, 从 0 出发, 每步可以向左或向右行走一个单位距离. 求 t 步后走到 k, 且中途从未到达过 $k+1$ 共有多少种走法.

证明. 根据 2.18 和 2.19, 由减法原理可得合法情况下走法数为 $\binom{t}{\frac{t+k}{2}} - \binom{t}{\frac{t+k+2}{2}}$.

■

3 容斥原理

3.1 容斥原理

在计算两个已知集合交集的元素数量时, 我们会用到容斥原理:

定理 3.1 容斥原理. 给定两个集合 A, B, 有 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

证明. 我们考虑将所有集合分解为最小的交集单元. 则 $A = (A \cap B) \sqcup (A \cap B^c), B = (A \cap B) \sqcup (A^c \cap B)$ (这里我们用 $\sqcup$ 表示集合的不交并). 由此我们可以写出

$$\begin{aligned}
|A \cup B| &= |(A \cap B) \sqcup (A \cap B^c) \sqcup (A^c \cap B)| \\
&= |A \cap B| + |A \cap B^c| + |A^c \cap B| \\
&= (|A \cap B| + |A \cap B^c|) + (|A \cap B| + |A^c \cap B|) - |A \cap B| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B|
\end{aligned}$$

■

我们可以将抽屉原理推广到多个集合的情况.

定理 3.2 (容斥原理对多个集合情况的推广). 给定 n 个集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$. 记记 $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots A_n\}$, 其中 i 个集合构成的集族具有形式 $\Gamma \in \binom{\mathscr{A}}{i}$, 该集族中所有集合的交记作 $\bigcap \Gamma$. 记 $S_i = \sum_{\Gamma \in \binom{\mathscr{A}}{i}} |\bigcap \Gamma|$. 则有

$$\begin{aligned}
|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} S_i \\
&= \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots \\
&+ (-1)^t \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_t} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_t}| + \ldots \\
&+ (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n|
\end{aligned}$$

证明. 提示: 对 n 使用归纳法.

■

命题 3.3. 给定 n 个集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$. 记记 $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots A_n\}$, 其中 i 个集合构成的集族具有形式 $\Gamma \in \binom{\mathscr{A}}{i}$, 该集族中所有集合的交记作 $\bigcup\Gamma$. 记 $D_i = \sum\limits_{\Gamma\in\binom{\mathscr{A}}{i}} |\bigcup\Gamma|$. 则有

$$\begin{aligned}
|\bigcap_{i=1}^{n} A_i| &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}D_i \\
&= \sum_{1\le i\le n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cup A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cup A_j\cup A_k| - \ldots \\
&+ (-1)^t \sum_{1\le i_1<\ldots<i_t}|A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_t}| + \ldots \\
&+ (-1)^n|A_1\cup\ldots\cup A_n|
\end{aligned}$$

证明. 我们考虑集合论中的德摩根定理: $(A_1\cup\ldots\cup A_n)^c = A_1^c\cup\ldots\cup A_n^c$, 基于此我们可以将集合的交集与并集相互转换.

定义 $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. 则 $|\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i| = |(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i^c)^c| = |S| - |\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i^c|$. 我们只需研究 $|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i^c|$ 即可. 根据多个集合的抽屉原理, 可以写出:

$$\begin{aligned}
|\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c| &= \sum_{1\le i\le n}|A_i^c| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i^c\cap A_j^c| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i^c\cap A_j^c\cap A_k^c| - \ldots \\
&+ (-1)^t \sum_{1\le i_1<\ldots<i_t}|A_{i_1}^c\cap\ldots\cap A_{i_t}^c| + \ldots \\
&+ (-1)^n|A_1^c\cap\ldots\cap A_n^c|
\end{aligned}$$

为了将 $|A_i^c|$ 都转化为 $|A_i|$, 我们再次使用德摩根定理, 可以写出 $|A_{i_1}^c\cap\ldots\cap A_{i_t}^c| = |S| - |A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_t}|$. 而在上式的每一项中, 贡献的 $|S|$ 的数量恰好为 $\binom{n}{t}$. 所以左式含有的 $|S|$ 的数量为 $1 + \sum\limits_{t=1}^{n}(-1)^t\binom{n}{t} = 0$.

这样我们就证明了原式.

■

下面我们来看几个具体的例子.

问题 3.4. 求出 [120] 中不能被 2 或 3 或 5 整除的整数个数.

证明. 我们定义如下集合: $A = \{n\in[120]|n = 2k\}, B\{n\in[120]|n = 3k\}, C = \{n\in[120]|n = 5k\}$. 为了求出 $|A^c\cap B^c\cap C^c|$, 我们可以改为求 $|A\cup B\cup C|$, 从而需要求出 A, B, C 的每一重交集的元素数量. 可以写出:

$$|A| = 60, |B| = 40, |C| = 24$$

$$|A \cap B| = \{n \in [120] | n = 6k\} = 20$$

$$|A \cap C| = \{n \in [120] | n = 10k\} = 12$$

$$|B \cap C| = \{n \in [120] | n = 15k\} = 8$$

$$|A \cap B \cap C| = \{n \in [120] | n = 30k\} = 4$$

故有 $|A^c \cap B^c \cap C^c| = |S| - |A \cup B \cup C| = |S| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|) = 32$.

■

问题 3.5. 有三个班级男女生人数分别为 $(m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3)$, 三个班各取一人, 求都不取男生的选取方法数.

证明. 我们定义如下集合: $A = \{$ 一班取到男生的取法 $\}, B\{$ 二班取到男生的取法 $\}, C = \{$ 三班取到男生的取法 $\}$. 同样, 为了求出 $|A^c \cap B^c \cap C^c|$, 我们改为求 $|A \cup B \cup C|$, 从而需要求出 A, B, C 的每一重交集的元素数量. 可以写出:

$$|A| = m_1(m_2 + n_2)(m_3 + n_3)$$

$$|B| = (m_1 + n_1)m_2(m_3 + n_3)$$

$$|C| = (m_1 + n_1)(m_2 + n_2)m_3$$

$$|A \cap B| = m_1 m_2(m_3 + n_3)$$

$$|B \cap C| = (m_1 + n_1)m_2 m_3$$

$$|A \cap C| = m_1(m_2 + n_2)m_3$$

$$|A \cap B \cap C| = m_1 m_2 m_3$$

故有:

$$\begin{aligned}
|A^c \cap B^c \cap C^c| &= |S| - |A \cup B \cup C| \\
&= |S| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|) \\
&= (m_1 + n_1)(m_2 + n_2)(m_3 + n_3)(1 - \frac{m_1}{m_1 + n_1})(1 - \frac{m_2}{m_2 + n_2})(1 - \frac{m_3}{m_3 + n_3}) \\
&= n_1 n_2 n_3
\end{aligned}$$

这与我们直接用乘法原理得到的结果是一样的.

■

问题 3.6. 对于正整数 n, 定义欧拉函数 $\phi(n)$ 为 $[n]$ 中与 n 互素的正整数的数量. 计算欧拉函数 $\phi(n)$.

证明. 根据质因数分解定理, 我们可以将任一正整数 n 表示成其质因数分解 $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i} = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ (其中 p_i 表示 n 的第 i 个质因数, k 为 n 的不同质因数的个数). 对于 $a \in [n]$, $(a, n) = 1$ 当且仅当对 $p_1 \nmid a, p_2 \nmid a, \dots, p_k \nmid a$.

类似题 3.4 的做法, 当 $p_1, p_2, \dots$ $[n]$ 中满足这一条件的正整数的个数是 $n \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i})$.

■

3.2 错排问题

问题 3.7. 将 n 个数 $\{1, 2, \dots, n\}$ 排列为 $P = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 且满足 $\forall i \in [n], a_i \neq i$. 求满足如此条件的排列的方法数.

证明. 定义集合 A_i 为全体错排了第 i 个元素的排列构成的集合, 即 $A_i = \{P | a_i \neq i\}$, 则错排的数量可以这样计算:

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j} |A_i \cup A_j| + \dots$$

注意到集合 $A_i \cup A_j = \{P | a_i \neq i \text{ 或 } a_j \neq j\}$ 的元素个数并不容易计算, 反而是集合 $(A_i \cup A_j)^c = A_i^c \cap A_j^c = \{P | a_i = i \text{ 且 } a_j = j\}$ 的元素个数容易计算. 因此我们改为这样计算错排的数量:

$$\begin{aligned} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |\overline{A_i}| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\overline{A_i} \cap \overline{A_j}| - \dots \\ + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq n} (-1)^t |\overline{A_{i_1}} \cap \dots \cap \overline{A_{i_t}}| + \dots \\ + (-1)^n |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}| \end{aligned}$$

记 $B_i = \overline{A_i} = \{P : a_i = i\}$, 上述公式转变为:

$$
\begin{aligned}
|\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_n}| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |B_i| + \sum_{i,j} |B_i \cap B_j| - \ldots \\
+ (-1)^t \sum_{i_1,\ldots,i_t} |B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_t}| + \ldots \\
+ (-1)^n |B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n|.
\end{aligned}
$$

因为 $B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_t} = \overline{A_{i_1}} \cap \overline{A_{i_2}} \cap \ldots \cap \overline{A_{i_t}} = \{P | a_{i_1} = i_1, a_{i_2} = i_2 \ldots, a_{i_t} = i_t\}$. 所以 $|B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_t}|$ 表示固定 $i_1, i_2, \cdots, i_t$ 个位置的数字, 其余的 $(n-t)$ 个位置上无限制的方法数, 也即 $(n-t)!$. 将其代入到之前的公式有

$$
|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \ldots \overline{B_n}| = n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^t \binom{n}{t}(n-t)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!.
$$

所以满足题意的错排的排法总数为

$$
\begin{aligned}
|A| &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} (n-i)! \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!}
\end{aligned}
$$

■

定义 3.8 (错排数). 我们将上述结果记作 C_n^0. 它表示将 n 个数排列, 且存在 0 个位置, 也即不存在位置满足 $a_i = i$ 的方法数.

批注 . 注意到

$$
\frac{C_n^0}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}
$$

恰好是 e^x 在 -1 处进行泰勒展开的前 $n+1$ 项和

$$
e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots
$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^0}{n!}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}=e^{-1}$$

这可以被解释为, 对于任意一个长度为 n 的排列, 当 n 足够大的时候, 这个排列是一个错排的概率趋近于 $\frac{1}{e}$.

我们可以考虑更一般的情况 C_n^t, 即将 n 个数进行排列, 其中恰好存在 t 个位置使得 $a_i=i$ 的方法数. 特别地, $t=0$ 时, C_n^0 代表上文所求的错排数; C_n^n 代表对任意 i 都有 $a_i=i$, 显然这样的排列的数量有且只有一个.

定义 3.9 (广义错排数). 将 n 个数 $\{1,2,\ldots,n\}$ 排列为 $P=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, 且满足恰有 t 个 $i\in[n]$ 满足 $a_i=i$. 满足如此条件的排列的方法数记作 C_n^t.

问题 3.10. 求解 C_n^t.

证明. 考虑一般情况的 C_n^t, 代表的是 n 个位置中, 选出 t 个位置, 在这 t 个位置上, 满足 $a_i=i$, 而对于剩余的 $(n-t)$ 个位置, 是一个更小规模的错排, 因此:

$$\begin{aligned}
C_n^t&=\tbinom{n}{t}C_t^tC_{n-t}^0\\
&=\tbinom{n}{t}\cdot 1\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-t}(-1)^i\frac{(n-t)!}{i!}\right)\\
&=\tbinom{n}{t}(n-t)!\left(\sum_{i=0}^{n-t}\frac{(-1)^i}{i!}\right)\\
&=\frac{n!}{t!}\left(\sum_{i=0}^{n-t}\frac{(-1)^i}{i!}\right)
\end{aligned}$$

■

不难理解, C_n^t 对 $0\le t\le n$ 的求和就是所有的排列情况, 因此:

$$C_n^0+C_n^0+\cdots+C_n^n=n!$$

将 C_n^t 的表达式带入到上述等式, 可以得到:

$$\sum_{t=0}^{n}C_n^t=\sum_{t=0}^{n}\frac{n!}{t!}\left(\sum_{i=0}^{n-t}\frac{(-1)^i}{i!}\right)=n!$$

通过两边同时消去 $n!$, 可以得到一个组合恒等式:

命题 3.11. $\sum_{t=0}^{n}\frac{1}{t!}(\sum_{i=0}^{n-t}\frac{(-1)^i}{i!})=1$

上述的求解过程使用了归并的思想, 将问题的求解转化为更小规模错排的求和, 实际上, 我们可以直接从集合的意义上对 C_n^t 进行求解.

考虑之前定义的集合 $B_i = \{P|a_i = i\}$, 则 C_n^0 表示不属于任何集合 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 的元素的个数, 即:

$$\begin{aligned}
C_n^0 &= |\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_n}| \\
&= |\bigcap_{i=1}^{n} \overline{B_i}| \\
&= |S| - \sum_{i=1}^{n} |B_i| + \sum_{i,j} |B_i \cap B_j| - \ldots \\
&+ (-1)^t \sum_{i_1,\ldots,i_t} |B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_t}| \\
&+ \ldots + (-1)^n |B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n|.
\end{aligned}$$

特别地, C_n^1 可以被表示为:

$$C_n^1 = \sum_{i=1}^{n} |B_i \cap (\bigcap_{j \neq i} \overline{B_j})| = |B_1 \cap \overline{B_2} \cdots \cap \overline{B_n}| + |\overline{B_1} \cap B_2 \cdots \cap \overline{B_n}| + \ldots$$

考虑 $n = 3$ 的简单情况, 则 C_3^1 可以被表示为:

$$C_3^1 = |B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}| + |\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3}| + |\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3|$$

注意到:

$$\begin{aligned}
|B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}| &= |B_1| - |B_1 \cap B_2| - |B_1 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3| \\
|\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3}| &= |B_2| - |B_1 \cap B_2| - |B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3| \\
|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3| &= |B_3| - |B_1 \cap B_3| - |B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3|
\end{aligned}$$

因此有

$$C_3^1 = \sum_{i=1}^{3} |B_i| - 2 \sum_{i,j} |B_i \cap B_j| + 3|B_1 \cap B_2 \cap B_3|$$

类似地, 可以得到:

$$\begin{aligned}
C_3^2 &= \sum_{i,j} |B_i \cap B_j| - 3|B_1 \cap B_2 \cap B_3| \\
C_3^3 &= |B_1 \cap B_2 \cap B_3|
\end{aligned}$$

对于更一般的 n 的情况, 将在 Mobius 反演中进行讨论.

3.3 Menage 问题

问题 3.12(Menage 问题). n 对夫妇参加宴席, 围坐一桌, 要求男女相隔, 且夫妇不相邻. 求符合要求的坐法数量?

证明. 当 $n < 3$ 时, 易知这样的排列时不存在的, 当 $n \geq 3$ 时, 考虑先对男生进行排列, 这样的排列等价于一个长度为 n 的圆排列, 数量为 $(n-1)!$.

选定 n 个男生的一种入座方式, 从某一位开始对男生按环形顺序进行编号为 $1, 2, \cdots, n$, 并将编号为 i 的男生的妻子也编号为 i. 记第 i 位男生与第 $i+1$ 位男生之间的位置位 i 号位置.

记 a_i 表示第 i 个男生和第 $i+1$ 个男生之间放置的女生的编号, 由题意可知 $a_i \neq i$ 且 $a_i \neq i+1$. 记事件 $B_i = \{a_i = i \text{ 或 } a_i = i+1\}$, $B_i^c = \{a_i \neq i \text{ 且 } a_i \neq i+1\}$, 所以女生的排法可以表示成下式, 并用容斥原理进行展开:

$$\begin{aligned}|\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_n}| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |B_i| + \sum_{i,j} |B_i \cap B_j| - \ldots \\ + (-1)^t \sum_{i_1,\ldots,i_t} |B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_t}| + \ldots \\ + (-1)^n |B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n|\end{aligned}$$

注意到 $|S|$ 是 n 个女生的全排列, 故 $|S| = n!$. 而 $|B_i| = 2 \times (n-1)!$, 但是对于剩下项的求和并不容易计算, 因此我们转变思路, 将 $\sum_{i_1,\ldots,i_t} |B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_t}|$ 直接作为一个整体进行求解.

考虑到这个求和的组合意义, 我们可以转化为以下问题: 从 n 个指标选取 $i_1, i_2, \ldots, i_t$, 并且满足

$$\begin{aligned}a_{i_1} &\in \{i_1, i_1+1\} \\ a_{i_2} &\in \{i_2, i_2+1\} \\ &\cdots \\ a_{i_t} &\in \{i_t, i_t+1\} \\ a_{i_1} \neq a_{i_2} &\neq \ldots \neq a_{i_t}\end{aligned}$$

考虑到 $a_i = i$ 或 $a_i = i+1$, 上述问题等价于从长度为 $2n$ 的圆排列 $1, 2, 2, 3, 3, 4, \cdots, n, 1$ 中选取 t 个互不相邻的数字. 因此在这个排列中取到两个相邻的数字等价于以下二者之一: 1. 两个数字是一样的; 或 2. 两个数字属于同一个二元集.

可以进一步将这个圆排列的问题转化成线排列的问题, 排列的种数等价于从 $2n$ 个数的线排列中取 t 个两两不相邻的方法数减去从 $2n$ 个数的线排列中取 t 个两两不相邻, 头尾都取到的方法数, 即:

$$\binom{2n-t+1}{t} - \binom{2n-t-1}{t-2}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{i_1,\ldots,i_t} |B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_t}| &= \left(\binom{2n-t+1}{t} - \binom{2n-t-1}{t-2}\right) \cdot (n-t)! \\ &= \frac{2n}{2n-t}\binom{2n-t}{t}(n-t)!\end{aligned}$$

带入一开始的容斥原理的公式, 可以得到:

$$\begin{aligned}|\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_n}| = n! - 2n(n-1)! + \cdots \\ + (-1)^t \frac{2n}{2n-t}\binom{2n-t}{t}(n-t)! \\ + \cdots + (-1)^n 2.\end{aligned}$$

■

3.4 Mobius 反演

问题 3.13. 考虑一个集合 S 及其四子集合 $A_1, A_2, A_3, A_4 \subseteq S$. 用 C_k 表示 S 中恰好属于 k 个集合 A_i 的元素的个数. 用 $\cap_0, \cap_1, \cap_2, \cap_3, \cap_4$ 表示 C_k

其中 $\cap_0 = |S|, \cap_1 = \sum_{i=1}^4 |A_i|, \cap_2 = \sum_{ij} |A_i \cap A_j|, \cap_3 = \sum_{ijk} |A_i \cap A_j \cap A_k|, \cap_4 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

证明.

$$C_0 = \cap_0 - \cap_1 + \cap_2 - \cap_3 + \cap_4$$

$$C_1 = \cap_1 - 2\cap_2 + 3\cap_3 - 4\cap_4$$

$$C_2 = \cap_2 - 3\cap_3 + 6\cap_4$$

$$C_3 = \cap_3 - 4\cap_4$$

$$C_4 = \cap_4$$

写成矩阵形式寻找规律:

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ & 1 & -2 & 3 & -4 \\ & & 1 & -3 & 6 \\ & & & 1 & -4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cap_0 \\ \cap_1 \\ \cap_2 \\ \cap_3 \\ \cap_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & -\binom{3}{0} & \binom{4}{0} \\ & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \binom{3}{1} & -\binom{4}{1} \\ & & \binom{2}{2} & -\binom{3}{2} & \binom{4}{2} \\ & & & \binom{3}{3} & -\binom{4}{3} \\ & & & & \binom{4}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cap_0 \\ \cap_1 \\ \cap_2 \\ \cap_3 \\ \cap_4 \end{pmatrix}$$

■

问题 3.14. 一般地, 考虑 n 个子集 $A_1, \ldots, A_n$, 用 C_k^n 表示 S 中恰好属于 k 个子集 A_i 的元素个数. 用 $\cap_0^n, \ldots, \cap_n^n$ 表示 C_k^n.

其中 $\cap_k^n = \sum_{\binom{n}{k}} |A_{i1} \cap \ldots \cap A_{ik}|$.

证明. 根据上述规律:

$$C_k^n = \binom{k}{k}\cap_k - \binom{k+1}{k}\cap_{k+1} + \binom{k+1}{k}\cap_{k+2} - \ldots + (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\cap_n$$

■

练习 3.15. 采用数学归纳法证明以上结果.

问题 3.16. 考虑四个子集 $A_1, A_2, A_3, A_4 \subseteq S$. 用 C_k 表示 $\cap_0, \ldots, \cap_4$.

证明.

$$\cap_0 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$\cap_1 = C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4$$

$$\cap_2 = C_2 + 3C_3 + 6C_4$$

$$\cap_3 = C_3 + 4C_4$$

$$\cap_4 = C_4$$

写成矩阵形式寻找规律:

$$\begin{pmatrix} \cap_0 \\ \cap_1 \\ \cap_2 \\ \cap_3 \\ \cap_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & 1 & 3 & 6 \\ & & & 1 & 4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cap_0 \\ \cap_1 \\ \cap_2 \\ \cap_3 \\ \cap_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \binom{4}{0} \\ & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} \\ & & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} \\ & & & \binom{3}{3} & \binom{4}{3} \\ & & & & \binom{4}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

■

问题 3.17. 一般地, 考虑 n 个子集 $A_1, A_2, ..., A_n$. 用 C_k^n 表示 $\cap_0^n, \ldots, \cap_n^n$.

证明. 根据上述规律:

$$\cap_k^n = \binom{k}{k} \cap_k - \binom{k+1}{k} C_{k+1} + \binom{k+2}{k} C_{k+2} + \ldots + \binom{n}{k} C_n$$

■

练习 3.18. 采用数学归纳法证明上述结论.

定理 3.19. (**Mobius 反演**) 考虑 n 个子集 $A_1, A_2, ..., A_n \subseteq S$. 对于 $X \subseteq [n]$, 用 I_X 表示 S 中恰好属于所有的 A_i ($i \in X$) 的元素的个数. 对于 $X \subseteq [n]$, 记 $f(X) = |\cap_X| = |\cap_{i \in X} A_i|, g(X) = |I_X|$. 则:

$$f(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq [n]} g(Y)$$

$$g(X) = \sum_{X \subseteq Y \subseteq [n]} (-1)^{|Y|-|X|} f(Y)$$

问题 3.20. (**Mobius 反演 → 容斥原理**) 通过 Mobius 反演证明容斥原理.

证明. 令 $X=\phi$, 由 Mobius 反演可得:

$$g(\phi)=\sum_{X\subseteq[n]}(-1)^{|Y|}f(Y)$$

$$\begin{aligned}|I_\phi|&=|S/A_1\cup A_2...\cup A_n|\\&=\sum_{Y\subseteq[n]}(-1)^{|Y|}|\cap_{i\in Y}A_i|\\&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{|Y|=k}(-1)^{k}|\cap_{i\in Y}A_i|\\&=\sum_{k=0}^{n}(-)^{k}\sum_{i_1i_2...i_k}|A_{i1}\cap A_{i2}...\cap A_{ik}|\end{aligned}$$

■

问题 3.21. (**Mobius 反演 $\to C_k^n$ 通项公式**) 通过 Mobius 反演证明 C_k^n 的通项公式.

证明.

$$\begin{aligned}C_k^n&=\sum_{|X|=k}|I_X|\\&=\sum_{|X|=k}\sum_{X\subseteq Y\subseteq[n]}(-1)^{|Y|-k}|\cap_{i\in Y}A_i|\\&=\sum_{Y\subseteq[n]}\sum_{X\subseteq Y,|X|=k}(-1)^{|Y|-k}|\cap_{i\in Y}A_i|\\&=\sum_{Y\subseteq[n]}\binom{|Y|}{k}(-1)^{|Y|-k}|\cap_{i\in Y}A_i|\\&=\sum_{l=k}^{n}\sum_{|Y|=l}(-1)^{l-k}\binom{l}{k}|\cap_{i\in Y}A_i|\\&=\sum_{l=k}^{n}(-1)^{l-k}\binom{l}{k}\sum_{i_1i_2,...i_l}|A_{i1}\cap A_{i2}...\cap A_{il}|\\&=\sum_{l=k}^{n}(-1)^{l-k}\binom{l}{k}\cap_l^n\end{aligned}$$

■

问题 3.22. (**容斥原理 $\to$ Mobius 反演**) 通过容斥原理证明 Mobius 反演.

证明.

$$A_i=\{g(Y)|i\in Y\subseteq[n]\}$$

$$|A_i| = \sum_{i \in \subseteq [n]} g(Y) = f(\{i\})$$

$$A_i \cap A_j = \{g(Y) | i, j \in Y \subseteq [n]\}$$

$$|A_i \cap A_j| = \sum_{i,j \in Y \subseteq [n]} g(Y) = f(\{i,j\})$$

$$\begin{aligned}
|g_\phi| &= |S/A_1 \cup A_2 ... \cup A_n| \\
&= |S| - \sum |A_i| + \sum_{|} A_i \cap A_j| - ... + (-1)^n |A_1 \cap A_2 ... \cap A_n| \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{|Y|=k} (-1)^k | \cap_{i \in Y} A_i| \\
&= f(\phi) - \sum f(\{i\}) + \sum f(\{i,j\}) - ... + (-1)^n f([n]) \\
&= \sum_{Y \subseteq [n]} (-1)^{|Y|} f(Y)
\end{aligned}$$

■

3.5 数论上的 Mobius 反演

问题 3.23. 设 f、g 是分别是定义在 $\mathbb{Z}^+$ 上的函数。若对 $\forall a \in \mathbb{Z}^+$,

$$f(a) = \sum_{b \leq a} g(b)$$

求解 $g(a)$ 的表达式?

证明.

$$f(a) = \sum_{1 \leq b \leq a} g(b) \tag{1}$$

$$f(a-1) = \sum_{1 \leq b \leq a-1} g(b) \tag{2}$$

(1)−(2) 得:

$$g(a) = \begin{cases} f(a) - f(a-1) & \text{if } a \geq 2 \\ f(a) & \text{if } a = 1 \end{cases}$$

■

若将上述问题中的求和的下标从 $b \leq a$ 替换为 $b \mid a$，即 $\forall a \in \mathbb{Z}^+$，

$$f(a) = \sum_{b|a} g(b)$$

那么 $g(a)$ 该如何使用 $f(a)$ 进行表达?

首先考虑 $a = 6$ 的简单情况，根据定义，我们可以写出以下表达式:

$$\begin{aligned}
f(1) &= g(1) \\
f(2) &= g(1) + g(2) \\
f(3) &= g(1) + g(3) \\
f(4) &= g(1) + g(2) + g(4) \\
f(5) &= g(1) + g(5) \\
f(6) &= g(1) + g(2) + g(3) + g(6)
\end{aligned}$$

我们可以定义如下三个集合:

$$\begin{aligned}
A &= \{g(1), g(2)\} \\
B &= \{g(1), g(3)\} \\
S &= \{g(1), g(2), g(3), g(6)\}
\end{aligned}$$

那么我们有:

$$\begin{aligned}
|A| &= g(1) + g(2) = f(2) \\
|B| &= g(1) + g(3) = f(3) \\
|S| &= g(1) + g(2) + g(3) + g(6) = f(6)
\end{aligned}$$

根据容斥原理，可以写出 $g(6)$ 的表达式:

$$g(6) = |S \setminus A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = f(6) - f(3) - f(2) + f(1)$$

考虑更复杂的 $g(30)$，我们仍然可以类似的写出:

$$f(30) = g(1) + g(2) + g(3) + g(5) + g(6) + g(10) + g(15) + g(30)$$

可以类似的定义集合:

$$\begin{aligned}
A &= \{g(1), g(2), g(3), g(6)\} \\
B &= \{g(1), g(2), g(5), g(10)\} \\
C &= \{g(1), g(3), g(5), g(15)\} \\
S &= \{g(1), g(2), g(3), g(5), g(6), g(10), g(15), g(30)\}
\end{aligned}$$

$$|A| = g(1) + g(2) + g(3) + g(6) = f(6)$$
$$|B| = g(1) + g(2) + g(5) + g(10) = f(10)$$
$$|C| = g(1) + g(3) + g(5) + g(15) = f(15)$$
$$|S| = g(1) + g(2) + g(3) + g(5) + g(6) + g(10) + g(15) + g(30) = f(30)$$

由容斥原理，可以得到：

$$\begin{aligned} g(30) &= |S \setminus (A \cup B \cup C)| \\ &= |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| \\ &= f(30) - f(6) - f(10) - f(15) + f(2) + f(3) + f(5) - f(1) \end{aligned}$$

问题 3.24. 现在考虑一个更加一般的情况，假设 $n = \prod_{i=1}^{k} p_i$（$p_i \neq p_j$ 且每个 p_i 都是素数），求解 $g(n)$ 的表达式？

证明. 首先定义如下集合：

$$A_1 = \left\{ g(d) \mid d \mid \frac{n}{p_1} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ g(d) \mid d \mid \frac{n}{p_2} \right\}$$

$$\cdots$$

$$A_k = \left\{ g(d) \mid d \mid \frac{n}{p_k} \right\}$$

$$S = \{ g(d) \mid d \mid n \}$$

其中，

$$|A_1| = \sum_{d \mid \frac{n}{p_1}} g(d) = f\left(\frac{n}{p_1}\right), |A_2| = f\left(\frac{n}{p_2}\right), \cdots, |A_k| = f\left(\frac{n}{p_k}\right)$$

接着考虑两个集合的交集

$$\begin{aligned} A_i \cap A_j &= \left\{ g(d) \mid d \mid \frac{n}{p_i} \text{ and } d \mid \frac{n}{p_j} \right\} \\ &= \left\{ g(d) \mid d \mid \frac{n}{\operatorname{lcm}(p_i, p_j)} \right\} \\ &= \left\{ g(d) \mid d \mid \frac{n}{p_i \cdot p_j} \right\} \end{aligned}$$

因此，

$$|A_i \cap A_j| = \sum_{d|\frac{n}{p_i \cdot p_j}} g(d) = f\left(\frac{n}{p_i \cdot p_j}\right)$$

将以上形式拓展到任意个集合的交集，可以得到：

$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_t}| = f\left(\frac{n}{p_{i_1} \ldots p_{i_t}}\right)$$

因此，根据容斥原理，我们可以得到 $g(n)$ 的表达式：

$$\begin{aligned}
g(n) &= |S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)| \\
&= |S| - \sum_{i=1}^{k} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le k} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < l \le k} |A_i \cap A_j \cap A_l| + \ldots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_k| \\
&= f(n) - f\left(\frac{n}{p_1}\right) - f\left(\frac{n}{p_2}\right) - \ldots - f\left(\frac{n}{p_k}\right) + f\left(\frac{n}{p_1 \cdot p_2}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{p_{k-1} \cdot p_k}\right) \\
&\quad + (-1)^t \sum_{i_1, \ldots, i_t} f\left(\frac{n}{p_{i_1} \ldots p_{i_t}}\right) + \ldots + (-1)^k f\left(\frac{n}{p_1 \cdot p_2 \ldots p_k}\right) \\
&= f(n) - f\left(\frac{n}{p_1}\right) - f\left(\frac{n}{p_2}\right) - \ldots - f\left(\frac{n}{p_k}\right) + f\left(\frac{n}{p_1 \cdot p_2}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{p_{k-1} \cdot p_k}\right) \\
&\quad + (-1)^t \sum_{i_1, \ldots, i_t} f\left(\frac{n}{p_{i_1} \ldots p_{i_t}}\right) + \ldots + (-1)^k f(1) \\
&= f(n) + \sum_{t=1}^{k} (-1)^t \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_t \le k} f(\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_t}})
\end{aligned}$$

■

问题 3.25. 考虑一个特殊的情况，$n = p^k$，求解 $g(n)$ 的表达式？

证明.

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) = g(p) + g(p^2) + \ldots + g(p^{k-1}) + g(p^k) \tag{3}$$

$$f(\frac{n}{p}) = \sum_{d|\frac{n}{p}} g(d) = g(p) + g(p^2) + \ldots + g(p^{k-1}) \tag{4}$$

(3)−(4) 得：

$$g(n) = g(p^k) = f(n) - f(\frac{n}{p}) \tag{5}$$

■

可以看到这个表达式和 $k=1$ 时问题 3.24 的表达式是一致的，即 $g(n)$ 的表达式只与 n 的素因子有关，而与具体的素因子出现的次数无关。这是可以理解的，因为所有在集合 $A^{'}=\left\{g(d)\mid d\mid \frac{n}{p_1^{l_i}}\right\}$ 出现的元素，一定也在集合 $A=\left\{g(d)\mid d\mid \frac{n}{p_1}\right\}$ 中出现，因此无需考虑更小的集合。

问题 3.26. 考虑 $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{l_i}$，求解 $g(n)$ 的表达式?

证明. 与问题 3.24 类似，可以写出集合 A_i 的定义，运用容斥原理，可以得出和问题 3.24 一样的表达式：

$$g(n)=f(n)+\sum_{t=1}^{k}(-1)^t\sum_{1\le i_1<\ldots<i_t\le k}f(\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_t}})$$

■

3.6 数论上的 Mobius 函数

定理 3.20. 给定定义在自然数集合 N 上的函数 f 和 g，对于任意的 $n\ge 1$，如果

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d)$$

那么

$$g(n)=\sum_{d|n}f(\frac{n}{d})\mu(d)$$

其中 $\mu(d)$ 是 Mobius 函数

从上一节我们可以知道，对于任意的 $n\ge 1$，我们可以将 n 表示为多个素数相乘的形式：

$$n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\ldots p_k^{r_k}$$

。

因此 $g(n)$ 可以被表示为：

$$\begin{aligned}g(n)&=f(n)-\sum_{i=1}^{k}f(\frac{n}{p_i})+\sum_{i,j}f(\frac{n}{p_ip_j})+\ldots\\&\quad+(-1)^t\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_t}f(\frac{n}{p_{i_1},p_{i_2},\ldots,p_{i_t}})+\ldots+(-1)^kf(1)\\&=\sum_{d|n}f(\frac{n}{d})\mu(d)\end{aligned}$$

其中 $\mu(d)$ 可以被表示为：

$$\mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } d = 1 \\ (-1)^k & \text{if } d = p_1 p_2 \dots p_k \\ 0 & \text{if } d = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}, \exists r_i > 1 \end{cases}$$

引理 3.21. 对于任意的 $n \geq 1$，由如下等式成立：

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

证明. 当 $n = 1$ 时，

$$\sum_{d|1} \mu(d) = \mu(1) = 1$$

当 $n > 1$ 时，n 可以被表示为：

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$$

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(1) + \sum_{i=1}^{k} \mu(\frac{n}{p_i}) + \sum_{i,j} \mu(\frac{n}{p_i p_j}) + \dots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_t} \mu(\frac{n}{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_t}}) + \dots + \mu(\frac{n}{n}) \\ &= 1 + k(-1)^1 + \binom{k}{2}(-1)^2 + \dots + \binom{k}{t}(-1)^t + \dots + \binom{k}{k}(-1)^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

引理 3.22. 给定定义在自然数集合 N 上的函数 f 和 g，对于任意的 $n \geq 1$，如果

$$g(n) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d}) \mu(d)$$

那么

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

其中 $\mu(d)$ 是 Mobius 函数

证明.

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} g(d) &= \sum_{d|n}(\sum_{d'|d}\mu(d')f(\frac{d}{d'})) \\ &= \sum_{d|n}\sum_{d'|d}\mu(d')f(\frac{d}{d'}) \\ &= \sum_{d'|d|n}\mu(d')f(\frac{d}{d'}) \\ &= \sum_{d'\cdot r|n}\mu(d')f(r) \\ &= \sum_{r|n} f(r)(\sum_{d'|\frac{n}{r}}\mu(d')) \\ &= f(n)\end{aligned}$$

■

3.7 集合上的 Mobius 函数

定理 3.23. 对于定义在集合 S 上的函数 f、g，若:

$$f(X) = \sum_{Y\subseteq X} g(Y)$$

则:

$$g(X) = \sum_{Y\subseteq X}(-1)^{|X|-|Y|}f(Y)$$

证明.

$$\begin{aligned}\sum_{Y\subseteq X}(-1)^{|X|-|Y|}f(Y) &= \sum_{Y\subseteq X}(-1)^{|X|-|Y|}\sum_{Z\subseteq Y} g(Z) \\ &= \sum_{Z\subseteq X}\sum_{Z\subseteq Y\subseteq X}(-1)^{|X|-|Y|}g(Z) \\ &= \sum_{Z\subseteq X}\sum_{Y'\subseteq X\setminus Z}(-1)^{|Y'|}g(Z) \\ &= \sum_{Z\subseteq X}\sum_{Y'\subseteq X\setminus Z}\mu(Y')g(Z) \qquad (6)\end{aligned}$$

其中

$$\sum_{Y\subseteq X}\mu(Y) = \begin{cases}1 & if \quad X=\emptyset \\ 0 & if \quad X\neq\emptyset\end{cases} \qquad (7)$$

i)$X=\emptyset$:

$$\sum_{Y\subseteq X}\mu(Y)=(-1)^{|\emptyset|}=1$$

ii)$X\neq\emptyset$:

$$\sum_{Y\subseteq X}\mu(Y)=\sum_{Y\subseteq X\wedge|Y|\ is\ even}1-\sum_{Y\subseteq X\wedge|Y|\ is\ odd}1$$

其中:

$$\sum_{Y\subseteq X\wedge|Y|\ is\ even}1=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{|X|}{2}\rfloor}\binom{|X|}{2i} \tag{8}$$

$$\sum_{Y\subseteq X\wedge|Y|\ is\ odd}1=\sum_{i=1}^{\lceil\frac{|X|}{2}\rceil}\binom{|X|}{2i-1} \tag{9}$$

(8)−(9) 得:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{|X|}{2}\rfloor}\binom{|X|}{2i}-\sum_{i=1}^{\lceil\frac{|X|}{2}\rceil}\binom{|X|}{2i-1}&=\sum_{i=0}^{|X|}(-1)^i\binom{|X|}{i}\\&=(1-1)^{|X|}\\&=0\end{aligned}$$

即:

$$\sum_{Y\subseteq X}\mu(Y)=0$$

(7) 得证。

所以:

$$\begin{aligned}\sum_{Y\subseteq X}(-1)^{|X|-|Y|}f(Y)&=\sum_{Z\subseteq X}\big(\sum_{Y'\subseteq X\setminus Z}\mu(Y')\big)g(Z)\\&=\mu(\emptyset)g(X)+\sum_{Z\subset X}\big(\sum_{Y'\subseteq X\setminus Z}\mu(Y')\big)g(Z)\\&=g(X)+0=g(X)\end{aligned}$$

定理 3.23 得证。其中 $\mu(X)$ 即为集合上的 Mobius 函数。

■

4 群论与 Pólya 计数原理

4.1 群的基本概念

定义 4.1. 给定一个集合 S，以及 S 上的二元运算 $\times$，S 是一个群，当且仅当满足以下条件：

1. 运算封闭：$\forall a, b \in S, a \times b \in S$
2. 满足结合律 $\forall a, b, c \in S, (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
3. 存在单位元 $\exists e \in S, s.t. \ \forall a \in S, a \times e = e \times a = a$
4. 存在逆元 $\forall a \in S, \exists a^{-1} \in S, s.t. \ a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$

举例来说，所有的整数集合 Z 在二元运算加法 $+$ 上，构成了一个群，记作 $< Z, + >$，其中 0 是单位元。而所有的整数集合 Z 在二元运算乘法 $\times$ 上并不构成一个群，因为 0 没有逆元。

而正整数集合 Z^+ 在二元运算乘法 $\times$ 上，并不构成一个群，因为 $< Z^+, \times >$ 只满足我们在群的定义中给出的前两条。像这样的只满足定义前两条的集合与定义在集合元素上的运算，我们称之为半群。而上述提到的 $< Z, \times >$ 满足前三条定义，我们称这样的半群为含幺半群。

我们可以给出更多的群的例子，例如有理数集合 Q，以及二元运算乘法 $\times$ 并不构成一个群，因为元素 0 没有逆元，但是去除了元素 0 的集合 $Q \backslash \{0\}$ 以及乘法运算就可以构成一个群，记作 $< Q \backslash \{0\}, \times >$。类似的，去除了 0 的实数集合以及复数集合，都可以构成一个群，记作 $< R \backslash \{0\}, \times >$，$< C \backslash \{0\}, \times >$。

另外一个例子来自于矩阵集合，以及定义在矩阵上的运算。以及 2×2 的矩阵为例，显然，所有的 2×2 的矩阵以及矩阵加法 $+$ 可以构成一个群，记作 $< R_{2\times 2}, + >$，但是在矩阵乘法上，$< R_{2\times 2}, \times >$ 并不是一个群，原因是显然的，不是所有的矩阵都是可逆的。而如果我们限制矩阵集合的范围，那么 $< R_{2\times 2, det=1}, \times >$ 是一个群，$< R_{2\times 2, det=2}, \times >$ 不是一个群，因此每个元素的逆元都属于集合 $R_{2\times 2, det=1/2}$，而 $< R_{2\times 2, det=\pm 1}, \times >$ 是一个群。

更进一步的，$< R_{2\times 2, det=e^{\frac{k2\pi i}{n}}, k\in[n]}, \times >$ 和 $< R_{2\times 2, det\in Q\backslash\{0\}}, \times >$ 都是群。

下面开始考虑另一种运算，模。很容易想到，整数集合 $\{1, 2, ..., m-1\}$ 在模 m 加法下，可以构成一个群 $< Z_m, +_{mod\ m} >$，元素 a 的逆元即是 $m - a$。那么在乘法之下，是否依旧可以构成一个群呢?

可以容易举出一个反例，当 $m = 4$ 的时候，元素 2 无法找到一个逆元 x 使得 $2 \times b \ mod \ m = 1$。实际上，$< Z_m^*, \times_{mod\ m} >$ 是一个群，其中 $Z_m^* = \{a \in [m] | (a, m) = 1\}$。作为一个练习，可以试着证明如下定理：

对于任意正整数 a, m，$\exists b$ 使得 $a \times b \equiv 1 \ mod \ m$，当且仅当 $(a, m) = 1$。

接下来给出几个关于单位元与逆元的定理：

引理 4.2. 关于集合的逆元与单位元，以下定理成立：

1. $e^{-1} = e$
2. 单位元唯一
3. 逆元唯一

证明. 1. $e \cdot e = e$，因此单位元的逆元即是单位元本身。

2. 反证法：假设存在两个不同的单位元 e_1, e_2 且 $e_1 \neq e_2$，那么我们可以得到：$e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$，与假设矛盾。

3. 反证法：假设对于元素 a，存在两个不同的逆元 a_1, a_2，那么我们根据逆元的定义可以知道：

$$a \cdot a_1 = a_1 \cdot a = e$$

$$a \cdot a_2 = a_2 \cdot a = e$$

进一步，我们可以得到：

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \cdot e \\ &= a_1 \cdot (a \cdot a_2) \\ &= (a_1 \cdot a) \cdot a_2 \\ &= e \cdot a_2 \\ &= a_2 \end{aligned}$$

与假设矛盾，说明逆元唯一。

■

定义 4.3. 群 $< H, \cdot >$ 是 $< G, \cdot >$ 的子群，如果 $H \subseteq G$。

引理 4.4. 若 H 是 G 的子群，且 G 是有限群，则 $|H| \mid |G|$

证明. 若 $|H| = |G|$, 显然 $|H| \mid |G|$.

不妨考虑 $|H| < |G|$, 则 $\exists \ x_1 \in G, x_1 \notin H$, 构建 H_1：$H_1 = x_1 \cdot H = \{x_1 \cdot y \mid y \in H\}$

引理 4.4.1. $|H| = |H_1|$

证明. 即证 $\forall \ y_1, y_2 \in H, y_1 \neq y_2, \ x_1 \cdot y_1 \neq x_1 \cdot y_2$

反证：设 $x_1 \cdot y_1 = x_1 \cdot y_2$, x_1 在群 $|G|$ 存在 $x_1^{-1}, (x_1^{-1} \cdot x_1) \cdot y_1 = (x_1^{-1} \cdot x_1) \cdot y_2, e \cdot y_1 = e \cdot y_2$

推出 $y_1 = y_2$ 矛盾

■

引理 4.4.2. $H \cap H_1 = \emptyset$

证明. 反证：假设存在 $y \in H, x_1 \cdot y \in H$, 取 y^{-1}, 有 $y^{-1} \in H$,
又 $x_1 \cdot y \in H, (x_1 \cdot y) \cdot y^{-1} \in H$, 推出 $x_1 \cdot (y \cdot y^{-1}) = x_1 \cdot e = x_1 \in H$ 矛盾

■

由此，若 $H \cup H_1 = G, |H| = \frac{|G|}{2} \mid |G|$。若 $H \cup H_1 \neq G, \exists\ x_2 \in G, x_2 \notin H, x_2 \notin H1$,
令 $H_2 = x_2 \cdot H = \{x_2 \cdot y \mid y \in H\}$, 同理有 $|H_2| = |H|, H \cap H_2 = \emptyset$,

引理 4.4.3. $H_1 \cap H_2 = \emptyset$

证明. 假设存在 $y \in H,\ s.t.\ x_2 \cdot y \in H_1 = x_1 \cdot H, then\ \exists\ z \in H,\ s.t.\ x2 \cdot y = x_1 \cdot z$, 取 $y^{-1} \in H,\ x_2 \cdot y \cdot y^{-1} = x_1 \cdot z \cdot y^{-1},\ x_2 = x_1 \cdot (z \cdot y^{-1})$, 又 $z \cdot y^{-1} \in H$, 推出 $x_2 \in x_1 \cdot H = H_1$ 矛盾

■

若 $H \cup H_1 \cup H_2 = G,\ |H| = \frac{|G|}{3} || |G|$
否则递推可得 $H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_k = G$, 且有 $\forall i \in \{1, 2, ..., k\},\ |H_i| = |H_0|$
$\forall\ i, j \in \{0, 1, 2, ..., k\},\ H_i \cap H_j = \emptyset$, 则可得 $|H| = \frac{|G|}{k+1} \mid |G|$

■

称 $G = H \cup x_1 \cdot H \cup x_2 \cdot H \cup ... \cup x_k \cdot H$ 为 G 关于子群的（左）陪集分解;
$G = H \cup H \cdot y_1 \cup H \cdot y_2 \cup ... \cup H \cdot y_k$ 为 G 关于子群的（右）陪集分解

4.2 置换群

接下来来介绍一下置换群的基本概念。

定义 4.5. 有限集合 D 上的一一映射被称为 D 上的置换。

以集合 $[n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$ 为例，$[n]$ 上的一个置换是将 $\{1, 2, ..., n\}$ 映射为 $\{\delta(1), \delta(2), ..., \delta(n)\}$ 的一个一一映射。

在此基础上，可以定义置换的复合运算 $\circ$。一个置换 $\delta_1 \circ \delta_2$ 等价于这样一个置换：对于有限集合 D 中的元素 x，先将 x 通过置换映射为 $\delta_1(x)$，然后将 $\delta_1(x)$ 映射为 $\delta_2(\delta_1(x))$。

将 $\delta_1 \circ \delta_2$ 作用在 $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ 上，$[n]$ 会被映射为 $\{\delta_1(\delta_2(1)), \delta_1(\delta_2(2)), ..., \delta_1(\delta_2(n))\}$。

定理 4.6. $[n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$ 上所有置换的集合 S_n 关于置换的复合运算 $\circ$ 构成群，叫做 n 元对称群，通常记为 S_n。

证明. 1. 封闭性。由上述复合运算的定义可以看到，$\delta_1 \circ \delta_2 \in S_n$，即运算满足封闭性。

2. 由于映射的复合运算符合结合律，因此置换的复合运算也满足结合律。

3. 单位元。群 $< S_n, \circ >$ 的单位元是这样的一个置换 $e_n(i)$，使得每个元素都被映射到它本身。

因此 $\forall \delta, \forall i \in [n]$，$e_n \circ \delta(i) = e_n(\delta(i)) = \delta(i)$，因此 $e_n \circ \delta = \delta$ 同样的，$\forall \delta, \forall i \in [n]$，$\delta \circ e_n(i) = \delta(e_n(i)) = \delta(i)$，因此 $\delta \circ e_n = \delta$。

4. 逆元。一个置换 δ 的逆元 δ^{-1} 被定义为 $\delta^{-1}(\delta(i)) = i$,容易验证 $\delta^{-1} \circ \delta = \delta \circ \delta^{-1} = e_n$

■

S_n 的阶数为 $|n!|$，S_n 的子群叫做 n 元置换群。

定义 4.7. 对任意群 G，任意集合 X，且 G 是一个有限群，X 是一个有限集合。定义一个二元函数 $G \times X \to X$ 为群 G 在集合 X 上的作用。满足如下两条公理

1. $\forall g \in G, \forall a \in X, g(a) \in X$
2. $\forall g_1, g_2, \forall a \in X, (g_1 \circ g_2)(a) = g_1(g_2(a))$

考虑置换群 A_n 以及集合 $[n]$ 上的作用，满足以下:

1. $\forall \delta \in A_n, \delta(i) \in [n]$
2. $\forall \delta_1 \delta_2 \in A_n, (\delta_1 \circ \delta_2)(i) = \delta_1(\delta_2(i))$

考虑集合 $O_a : \{g(a) | g \in G\}$，称之为集合中的一个元素 a 在群 G 的作用下的轨道。可以看到，其代表的含义为元素 a 在群 G 的作用下，所有的可能的取值。

接着考虑集合 $G_a : \{g \in G | g(a) = a\}$。下面证明，$G_a$ 关于置换的复合运算 $\circ$ 构成一个群。

1. 封闭性。$\forall g_1, g_2 \in G, (g_1 \circ g_2)(a) = g_1(g_2(a)) = g_1(a) = a$，因此 $g_1 \circ g_2 \in G$
2. 结合律。置换的结合律由映射的结合律保证。
3. 单位元。容易验证恒等变换 e_n 是群的单位元。
4. 逆元。$\forall g \in G, g^{-1}(a) = g^{-1}(g(a)) = (g^{-1} \circ g)(a) = e(a) = a$，即 $g^{-1} \in G$。

由引理 4.4，G_a 是 G 的一个子群，可以知道 $G = G_a \cup g_b \circ G_a \cup g_c \circ G_a \cup \cdots$。其中 $g_b \circ G_a = \{g_b \circ g | g \in G_a\}$，是所有将元素 a 映射为 b 的集合。因此我们可以得到轨道公式: $|G| = |G_a| \cdot |O_a|$

接下来考虑轨道公式的一个应用。

问题 4.8. 存在多少种不同的旋转方式，使得正方体的位置保持不变。

证明. 正方体的旋转方式可以使用一个在 [8] 上的置换进行表示，因此保持正方体位置不变的置换构成 S_8 的子群。

首先考虑所有保持顶点 1 不变的置换方式，容易想到，一共只有三种方式：绕着体对角线旋转 120°, 240°, 以及保持不动。即 $|G_a| = 3$, 此外, 顶点 a 在置换的作用下, 一共有 8 种可能的取值（对应立方体的八个顶点），因此 $|O_a| = 8$，因此 $|G| = |G_a| \cdot |O_a| = 24$ ■

练习 4.9. 考虑可重复圆排列问题

以一个简单的例子来说明轨道定理在解决可重复圆排列的作用。考虑长为 4 的圆排列，且仅有两个元素 $\{R, B\}$，那么集合 X 可以被定义为：$X : \{\{1, 2, 3, 4\} \to \{R, B\}\}$，并且考虑置换群 A_4。那么我们需要求的是，在置换群 A_4 的作用下，所有不同的集合元素的个数。若是没有置换群的作用，那么显然不同元素的数量是 2^4。但是在置换群 A_4 的作用下，某些圆排列会变成等价的。因此，求圆排列的方案数，可以等价于在群 A_4 作用下的轨道数量。

考虑 X 中的元素 δ，$\delta(1) = R, \delta(2) = R, \delta(3) = R, \delta(4) = R$，容易看到，所有的置换都会保持元素 δ 不变，即 $|G_\delta| = 4$，可以得到 $|O_\delta| = |A_4|/|G_\delta| = 1$，即在所有的置换的作用下，与元素 δ 等价的只有一个，即 δ 本身。

再考虑 X 中的元素 α，$\alpha(1) = R, \alpha(2) = B, \alpha(3) = R, \alpha(4) = B$，在这种情况下，保持 α 不变的只有两个元素，即 $|G_\alpha| = 2$，可以得到 $|O_\alpha| = |A_4|/|G_\alpha| = 2$，即在所有的置换的作用下，与元素 α 等价的有两个。

我们的目标就是要求出，在置换群 A_4 的作用下，所有不同的元素的个数，此处元素的相同可以理解为在群 A_4 的作用下的相同。相同的元素被称为处于同一轨道，也被称为处于同一等价类中。我们的目标是求出轨道的个数。

4.3 Burnside 引理

定理 4.10. 设 G 是集合 X 上的置换群，在群 G 的作用下的 X 的轨道数量为

$$l = \frac{1}{|G|} \sum_{\delta \in G} C(\delta) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in X} |G_f|$$

其中 $C(\delta)$ 表示在置换 δ 作用下，集合 X 中保持不变的元素的个数。

证明. 考虑置换 g 以及集合中的元素 x，x 在置换 g 的作用下保持不变。引入符号 s_{ij} 表示置换 g_i 作用在元素 x_j 上，是否保持 x_j 不变，即：

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 \ if \ g_i(x_j) = x_j \\ 0 \ if \ g_i(x_j) \neq x_j \end{cases}$$

容易知道，先对 g_i 求和再对 x_j 求和与先对 x_j 求和再对 g_i 求和是等价的。即：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{|G|}\sum_{j=1}^{|X|} s_{ij} &= \sum_{i=1}^{|G|} C(\delta_i) \\ &= \sum_{j=1}^{|X|}\sum_{i=1}^{|G|} s_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{|X|} |G_{x_j}| \\ &= \sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{|O_x|} |G_x| \\ &= \sum_{j=1}^{l} |G| \\ &= l \times |G| \end{aligned}$$

其中对集合元素的求和转变为了对先对所有等价类求和，再对等价类中的元素进行求和。由轨道定理可知，第二个求和就是群的大小。因此可以得到：

$$l = \frac{1}{|G|}\sum_{i}^{|G|} C(\delta_i)$$

可以用另一个视角来看待 Burnside 引理所求出的轨道数。我们知道集合中的每一个元素，在群 G 的作用下，会被划分到不同的轨道中，那么我们可以在求群作用的轨道数的时候，为每一个元素赋值一个权重 $\frac{1}{|O_f|}$，即所有同处于一个轨道的元素的权重的求和为 1，那么轨道数可以被表示为：

$$\sum_{f\in X}\frac{1}{|O_f|}$$

由轨道公式，我们可以得到：

$$\begin{aligned} \sum_{f\in X}\frac{1}{|O_f|} &= \sum_{f\in X}\frac{|G_f|}{|G|} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{f\in X}|G_f| \end{aligned}$$

■

Burnside 引理实际上提供了一种求轨道个数的方法，对所有置换作用下保持不变的元素的个数的平均，即是轨道的数量。

问题 4.11. 长度为 4 的圆排列进行红蓝着色，有多少种不同方案。

证明. 一共存在四种置换，只需要分别求在每种置换下，保持不变的排列的数量。

在置换 $G_1 = \{1 \to 1, 2 \to 2, 3 \to 3, 4 \to 4\}$ 的作用下，所有排列均保持不变，因此 $C(G_1) = 16$。同理可得 $C(G_2) = 2, C(G_3) = 4, C(G_4) = 2$，因此不同的排列的数量为 $\frac{(16+2+4+2)}{4} = 6$

■

问题 4.12. 考虑使用 3 种颜色对 6 个珠子进行染色，求圆排列数。

证明. 容易知道存在六种置换，只需要分别求在每种置换下，保持不变的排列的数量。

我们可以像上一题一样，考虑每一种置换下保持不变的排列的数量，但是我们在此将轮换换一种形式表示。

$$\delta_0 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$$
$$\delta_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$$
$$\delta_2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$$
$$\delta_3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$$
$$\delta_4 = (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)$$
$$\delta_5 = (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ )$$

例如 $\delta_2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$ 表示的是位置 $1, 3, 5$ 上的元素只会在这三个位置上进行轮换，同理 $2, 4, 6$ 上的元素也只会在对应的位置上进行轮换。

因此，在置换 δ_2 的作用下保持不变的元素，必定是 $1, 3, 5$ 上取值相同，$2, 4, 6$ 上取值相同，且每个位置上可能的取值为 3（3 种颜色进行染色），因此在 δ_2 作用下保持不变的元素个数为 3^2。

更一般的来说，使用 m 种颜色进行染色，在置换 δ 的作用下保持不变的元素个数为 $m^{k(\delta)}$，其中 $k(\delta)$ 表示置换 δ 中不相交的轮换的个数。

因此，对于该问题，我们可以知道圆排列数为：

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\delta \in G} C(\delta) = \frac{1}{6} \cdot (3^6 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^2 + 3^6) = 130$$

■

下一节我们将讨论更一般的 Polya 计数原理。

4.4 Polya 计数原理

定理 4.13. 给定一个 n 个元素上的置换群 G，考虑 G 在集合 $X = \{f : [n] \to [m]\}$ 上的作用，轨道数为：

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\delta\in G} m^{k(\delta)}$$

其中 $k(\delta)$ 是置换 δ 的轮换个数。

接下来，我们考虑为每一个集合中的元素赋予一个权重。例如，我们对六个珠子进行染色，记染色为红色的的权重为 5，染色为蓝色的权重为 1，那么对于一种染色方案，或者对于集合中的一个元素 f，我们可以得到其对应的权重为 $w(f) = 1^{\#blue} \cdot 5^{\#red}$。

在上一节，我们知道轨道的数量可以被表示为：

$$l = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in X}|G_f| = \frac{1}{|G|}\sum_{\delta\in G}|C_\delta|$$

引入了权重之后，轨道的数量可以被表示为：

$$l' = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in X}|G_f|\cdot w(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{\delta\in G}\sum_{f\in C_\delta} w(f)$$

例如，对于上述的六个珠子的红蓝染色问题，可以被表示为：

$$\begin{array}{lll}
\delta_0 = (1)(2)(3)(4)(5)(6) & |C_{\delta_0}| = 2^6 & \sum_{f\in C_{\delta_0}} w(f) = \binom{6}{0}5^0 + \binom{6}{1}5^1 \cdots + \binom{6}{6}5^6 = (1+5)^6 \\
\delta_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) & |C_{\delta_1}| = 2 & \sum_{f\in C_{\delta_1}} w(f) = 1^6 + 5^6 \\
\delta_2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6) & |C_{\delta_2}| = 2^2 & \sum_{f\in C_{\delta_2}} w(f) = 1^6 + 2\cdot 1^3\cdot 5^3 + 5^6 = (1^3+5^3)^2 \\
\delta_3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6) \Rightarrow & |C_{\delta_3}| = 2^3 \Rightarrow & \sum_{f\in C_{\delta_3}} w(f) = (1^2+5^2)^3 \\
\delta_4 = (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4) & |C_{\delta_4}| = 2^2 & \sum_{f\in C_{\delta_4}} w(f) = 1^6 + 2\cdot 1^3\cdot 5^3 + 5^6 = (1^3+5^3)^2 \\
\delta_5 = (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ ) & |C_{\delta_5}| = 2^1 & \sum_{f\in C_{\delta_5}} w(f) = 1^6 + 5^6
\end{array}$$

定理 4.14. 给定一个 n 个元素上的置换群 G,考虑 G 在集合 $X = \{f : [n] \to \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}\}$ 上的作用，带权轨道数为：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|G|}\sum_{\delta\in G} P(\delta) &= \frac{1}{|G|}\sum_{\delta\in G}\sum_{f\in C_\delta} w(f) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{\delta\in G}(w_1 + w_2 + \cdots + w_m)^{k_1}(w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_m^2)^{k_2}\cdots(w_1^t + w_2^t + \cdots + w_m^t)^{k_t}
\end{aligned}$$

其中 $P(\delta)$ 是被称为置换 δ 的轮换多项式。

5 生成函数

5.1 引论

定义 5.1. 对于一个有限或无限数列

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$$

用幂级数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

使之成为一个整体，称 $A(x)$ 为序列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的生成函数，并记为 $G\{a_n\}$。

也可以表示为 $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

对于组合数序列 $\{a_i\}_{i\geq 0}$ $a_i = \binom{n}{i}$, 由二项式定理知 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$。

对于组合数序列 $\{a_k\}_{k\geq 0}$ $a_k = \binom{i}{k}$，$if\ k > n, a_k = 0$，生成函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n}(\sum_{i=0}^{n} a_k)x^k = \sum_{k=0}^{n}(\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}x^k) \\ &= \sum_{i=0}^{n}(\sum_{k=0}^{n}\binom{i}{k}x^k) \\ &= \sum_{i=0}^{n}(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}x^k) \\ &= \sum_{i=0}^{n}(1+x)^i \\ &= \frac{(1+x)^{n-1}-1}{(1+x)-1} \\ &= \frac{(1+x)^{n-1}-1}{x} \end{aligned}$$

得 $f(x) = \frac{(1+x)^{n-1}-1}{x} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, 故 $\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

推论 5.2. 一般地, 令 a_k 为 $x_1+x_2+\cdots+x_n = k$ 解的序列, 求满足 $0 \leq x_1 \leq t_1, 0 \leq x_2 \leq t_2$, $\cdots$, $0 \leq x_n \leq t_n$ 条件的正整数解的个数，等价于于求 $\sum_{i=0}^{\infty} a_k x^k$ 中 x^k 的系数。

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i &= (\sum_{i=0}^{t_1} x^i)(\sum_{i=0}^{t_2} x^i)\cdots(\sum_{i=0}^{t_n} x^i) \\ &= \frac{1-x^{t_1+1}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{t_2+1}}{1-x}\cdots\frac{1-x^{t_n+1}}{1-x} \\ &= (1-x^{t_1+1})(1-x^{t_2+1})\cdots(1-x^{t_n+1})(1-x)^{-n} \\ &= (1-x^{t_1+1})(1-x^{t_2+1})\cdots(1-x^{t_n+1})(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+n-1}{n-1}x^i) \end{aligned}$$

推论 5.2.1. $(1-x)^{-n}=(\sum_{i=0}^{\infty}x^i)^n=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+n-1}{n-1}x^i$

$$
\begin{aligned}
(1-x)^n&=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n}{i}(-x)^i\\
(1-x)^{-n}&=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-n}{i}(-x)^i=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-n}{i}(-1)^ix^i\\
\binom{n}{i}&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{i!}\\
(-1)^i\binom{-n}{i}&=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-i+1)}{i!}\cdot(-1)^i\\
&=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-i+1)}{i!}\cdot(-1)^i\\
&=\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}\\
&=\binom{i+n-1}{i}\\
&=\binom{i+n-1}{n-1}
\end{aligned}
$$

推论 5.3. 更一般地，a_k 为 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 解的序列，a_k 满足 $x_1\in S_1$，$x_2\in S_2$，$\cdots$，$x_n\in S_n$，则生成函数 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=(\sum_{i_1\in S_1}x^{i_1})(\sum_{i_2\in S_2}x^{i_2})\cdots(\sum_{i_n\in S_n}x^{i_n})$

5.2 形式幂级数

定义 5.2.1. 对于实数域 $\mathbf{R}$ 上的数列 $\{a_0,a_1,a_2,\cdots\}$，x 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的未定元，表达式 $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ 称为 $\mathbf{R}$ 上的形式幂级数。$\mathbf{R}$ 上的形式幂级数的全体记为 $\mathbf{R}[[x]]$。一般情况下，形式幂级数中的 x 只是一个抽象符号，并不需要对 x 赋予具体数值，因而不需要考虑它的敛散性。

定义 5.2.2. 设 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 与 $B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ 是 $\mathbf{R}$ 上的两个形式幂级数，将 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相加定义为 $A(x)+B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k$，将 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相乘定义为 $A(x)\cdot B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k)x^k$

定理 5.2.3. 对 $\mathbf{R}[[x]]$ 中的任何一个元素 $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$，$A(x)$ 有乘法逆元当且仅当

$a_0 \neq 0$。若 $\widetilde{A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{a}_k x^k$ 是 $A(x)$ 的乘法逆元，则有

$$\widetilde{a}_0 = a_0^{-1},$$

$$\widetilde{a}_k = (-1)^k a_0^{-(k+1)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-3} & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 \end{vmatrix} (k \geq 1)$$

证明. 设 $\widetilde{A}(x)$ $A(x)$ 的乘法逆元，则有

$$1 = A(x)\widetilde{A}(x) = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)(\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{a}_k x^k) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i+j=k} a_i \widetilde{a}_j) x^k$$

比较等式两边 $x^k (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 的系数，得一个无穷线性方程组

$$\begin{cases} a_0\widetilde{a}_0 = 1, \\ a_1\widetilde{a}_0 + a_0\widetilde{a}_1 = 0, \\ a_2\widetilde{a}_0 + a_1\widetilde{a}_1 + a_0\widetilde{a}_2 = 0, \\ \cdots, \\ a_k\widetilde{a}_0 + a_{k-1}\widetilde{a}_1 + \cdots + a_0\widetilde{a}_k = 0, \\ \cdots \end{cases}$$

由方程组的第一个方程式得 $a_0 \neq 0$，且 $\widetilde{a}_0 = a_0^{-1}$。

反之，当 $a_0 \neq 0$ 时，对任意固定的正整数 k，把 $\widetilde{a}_0$，$\widetilde{a}_1$，$\cdots$，$\widetilde{a}_k$ 当作未知量，解前 $k+1$ 个方程的系数行列式为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \cdots & 0 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = a_0^{k+1} \neq 0,$$

而

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \cdots & a_0 & 0\\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} & a_k\\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1}\\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-3} & a_{k-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

可得 $\widetilde{a}_k=\frac{\Delta_k}{\Delta}$。因此，若 $a_0\neq 0$，则方程组有解 $(\widetilde{a}_0,\widetilde{a}_1),\widetilde{a}_2,\cdots$，它所对应的形式幂级数 $\widetilde{A}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{a}_kx^k$ 就是 $\widetilde{A}(x)$ 的乘法逆元。

例如，设 $A(x)=1-x$，它的逆元记为 $\frac{1}{1-x}=\widetilde{a}_0+\widetilde{a}_1x+\widetilde{a}_2x^2+\cdots$，由 $(1-x)(\widetilde{a}_0+\widetilde{a}_1x+\widetilde{2}x^2+\cdots)=1$，求得 $\widetilde{a}_k=1(k=0,1,2,\cdots)$，即 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}x^i$。

■

5.3 非负整数的拆分

问题 5.3.1. 将非负整数 n 分成 k 个非负整数的和，即 $x_1+x_2=\cdots+x_k=n$，有多少种分法，即满足 $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_k$ 非负整数解的个数有多少种？

证明. 对于 n 的拆分，非负整数 x_i 的取值范围 1 为 $\{0,1,2,\cdots,n\}$，每种分解的方式对应于 t_0 个 0，t_1 个 1，$\cdots$，t_1 个 n。

$$\begin{cases} t_0+t_1+\cdots+t_n=k\\ 0\cdot t_0+1\cdot t-1+\cdots+n\cdot t_n=n \end{cases}$$

原问题转化为求该方程组都为非负整数解的个数。

$$\begin{array}{lllllll} t_0=1 & 1 & & & & & \\ t_1=1 & 2 & \bullet & & & & \\ t_2=1 & 3 & \bullet & \bullet & & & \\ t_3=1 & 4 & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_n=1 & k & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}$$

正整数 n 的一个示例拆分如图，对应于 t_0 个 0，t_1 个 1，$\cdots$，t_1 个 n。换个视图理解，n 可以分成若干堆，每堆对应于图示的一列，易知每堆至少为 1，至多为 k, 原问题等价于 $\exists\, t\ s.t. y_1+y_2+\cdots+y_t=n$，满足 $1\leq y_i\leq k$ 的解的个数。

分成的若干堆中，设有 S_1 个 $1, S_2$ 个 $2, \cdots, S_k$ 个 k，满足 $S_1 \cdot 1 + S_2 \cdot 2 + \cdots + S_k \cdot k = n$，转化为求 $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n x^n = (\sum_{i=0}^{\infty} x^i (\sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} \ \cdots (\sum_{i=0}^{\infty} x^{ki})$ 都为非负整数解的个数。即有

$$f(x) = (x^0 + x^1 + \cdots)(x^0 + x^2 + \cdots)(x^0 + x^k + \cdots) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - x^i}$$

■

推论 5.3.2. 将一个非负整数 n 拆分成恰好 k 份，要求每一份 t_i 满足 $R_i \geq 1$，记该划分方法 A' 的方案数量为 a'^k_n；将一个非负整数 n 拆分成若干份，要求每一份 C_i 满足 $1 \leq C_i \leq k$，且 C_i 最大值可以取到 k，记该划分方法 B' 的方案数量为 b'^k_n；有 $a'^k_n = b'^k_n$

证明. 与问题 5.3.1 类似，我们可以给出一个矩阵。不同之处在于，第一列必须是满的，这是因为如果 $t_i \geq 1$，则 $t_1 \geq 1$；如果 c_i 最大值可以取到 k，则 $c_1 = max(C_i) = k$，因此第一行第一列的元素必然为 1。

$$\begin{array}{cccccc} t_1 & \bullet & & & & \\ t_2 & \bullet & & & & \\ t_3 & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \cdots & & & & & \\ t_k & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ & C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_t \end{array} \tag{10}$$

其中

$$n = \sum_{i=1}^{k} t_i = \sum_{i=1}^{t} C_i$$

显然，在此基础上，有 $a'^k_n = b'^k_n$

■

上述的拆分，每一种拆分方法可以唯一对应于将 n 拆分成 l_1 份的 1，l_2 份的 2，以此类推，直至 l_k 份的 k。特别地，与 b^k_n 的拆分方法不同的是，b'^k_n 要求 $l_k \geq 1$。形式化的表述为 $n = \sum_{i=1}^{k} k l_k$。设 $y_i = i l_i$，则有不定方程 $y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n$，其中 $i \mid y_i$ 且 $y_1 y_2 \cdots y_{k-1} \geq 0$ 且 $y_k \geq 1$，该不定方程解的个数为 m'，根据上述对拆分方法的描述可知，$a^k_n = b^k_n = m'$。

考虑数列 $\{a'^k_n\}$ 和 $\{b'^k_n\}$，以 n 为变量构建生成函数，例如 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b'^k_n x^n$，可以

写成如下形式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}{b'}_n^k x^n \tag{11}$$

$$=(x^0+x^1+\cdots)(x^0+x^2+\cdots)(x^k+\cdots) \tag{12}$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-x^k}-\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1}{1-x^k} \tag{13}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^k x^n-\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{k-1}x^n \tag{14}$$

和 b_n^k 的区别在于最后一个多项式是从 x^k 开始而不是从 x_0 开始。对应地，由生成函数可以得到 ${b'}_n^k$ 和 b_n^k 的关系 ${b'}_n^k=b_n^k-b_{n-1}^k$。或者我们有 ${a'}_n^k=a_n^k-a_{n-1}^k$。

推论 5.3.3. 将一个整数 $n\geq 0$, 拆分成时若干份, 每份 ≥ 1 拆分方法 c_n

可以观察到：

$$c_n=\sum_{k=0}^{\infty}{a'}_n^k$$

故 c_n 的生成函数为：

$$\begin{aligned}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_n'^k\right)x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n'^kx^n\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{1-x^i}\right)-\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{1-x^i}\right)\right)\\&=\prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^i}\right)\end{aligned}$$

还有另一种方法求 c_n 的生成函数：

c_n: l_1 份 1, l_2 份 $2\cdots$ l_k 份 k $\cdots$, 且满足 $l_1+2l_2+\cdots+kl_k+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}kl_k=n$。故 c_n 的生成函数为：

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\\&=\left(x^0+x^1+\ldots\right)\left(x^0+x^2+\ldots\right)\cdots\left(x^0+x^k+x^{2k}+\cdots\right)+(\cdots)+\cdots\\&=\left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{1-x^k}\right)\cdots\\&=\prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^i}\right)\end{aligned}$$

5.4 指数型生成函数

我们已经考虑了组合数的生成函数，下面考虑排列数的生成函数。对于排列数，可以写出如下形式的生成函数：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{k!} x^k \tag{15}$$

$$= n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{16}$$

$$= n! e^x \tag{17}$$

由此，可以引出定义 5.4.1。

定义 5.4. 给定数列 $\{a_k\}(k \geq 0)$，记 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{k!}$ 为 $\{a_k\}$ 的指数型生成函数。

我们先来回顾一下多重排列问题，以理解指数型生成函数。

问题 5.4.1. 有 m 种颜色的球，每种颜色可以重复使用，取出 k 个排列，有多少种排列方式？当限定每种颜色取 $(k_1, k_2, \cdots, k_m)$ 个时（$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = k$），问有多少种排列方法？

第一问显然是 m^k。对于第二问先排 k 个数的排列 $k!$ 种，在这 $k!$ 种中，对于每个颜色 i 都会重复计数 $k_i!$ 次，故总排列数应为：$\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$

可以看出上面两个式子有如下联系：

$$m^k = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=k} \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

我们可以用指数型生成函数建立这两者的关系。我们把 m 种颜色的球取出 k 个来排列记作 a_k, a_k 的指数型生成函数：

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{k!} \\ &= (x^0 + x^1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)^m \\ &= e^{mx} \\ &= 1 + mx + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^3}{3!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!} x^k \end{aligned}$$

由上式可知 $a_k = m^k$.

可以说，普通生成函数是解决多重组合问题，指数型生成函数解决的是多重排列问题。我们给出形式化的总结如下：

多重组合： 有 m 种颜色的小球，记 i 种颜色可以选的范围为 S_i，从这些小球种取 k 个的取法为 a_k，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{18}$$

$$= (\sum_{k_1 \in S_1} x^{k_1})(\sum_{k_2 \in S_2} x^{k_2}) \cdots (\sum_{k_m \in S_m} x^{k_m}) \tag{19}$$

从不定方程的视角出发，该生成函数对应的问题是不定方程 $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$ 满足 $k_i \in S_i$ 的解的个数。

多重排列： 有 m 种颜色的小球，记 i 种颜色可以选的范围为 S_i，从这些小球种取 k 个并排列的方法数为 b_k，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \tag{20}$$

$$= (\sum_{k_1 \in S_1} \frac{x^{k_1}}{k_1!})(\sum_{k_2 \in S_2} \frac{x^{k_2}}{k_2!}) \cdots (\sum_{k_m \in S_m} \frac{x^{k_m}}{k_m!}) \tag{21}$$

6 递推关系

6.1 引论

以 Hanoi 塔为例，Hanoi 塔有三个柱子，A 柱上有三个圆盘，每次只能移动一个圆盘，任意时刻任意柱子上都不存在大圆盘压在小圆盘之上的情况，问至少需要多少步能完成 A 柱上的圆盘全部移动到 C 柱上。

不难考虑出 7 步的移动方案，例如$A \to C$,$A \to B$,$C \to B$,$A \to C$,$B \to A$,$B \to C$,$A \to C$，且无法给出移动次数更少的方案了。

更一般地，我们发现，1 个圆盘的 Hanoi 塔问题最优解是 1 步，2 个圆盘的是 3 步，3 个圆盘的是 7 步，以此类推，k 个圆盘至少需要移动 $2^k - 1$ 步。

我们可以把 Hanoi 塔问题的解分为三个步骤，第一步为将上面的 $n-1$ 个圆盘从 A 移动到 B，第二步为把最下面的大圆盘从 A 移动到 C，第三步为将 B 上的 $n-1$ 个圆盘从 B 移动到 C。我们设 T_n 为将 n 个圆盘完成 A 柱上的圆盘全部移动到 C 柱上的最小可能

的步数，那么对于上面的三个步骤，第一步的步数为 T_{n-1}，第二步的步数为 1，第三步的步数为 T_{n-1}，因此有 $T_n = 2T_{n-1} + 1$，不难求解出 $T_n = 2^n - 1$。

再考虑图上的递推关系，设有简单图 $G = (V, E)$，需要求图 G 的独立点集个数 I_G。

考虑在图上任取一个顶点 v，则 $I_G = I_{G\setminus\{V\}} + I_{G\setminus\{N(V)\}}$。这一递推关系的求解是 #P-hard 的，这里不再展开介绍。

6.2 常系数线性齐次递推关系

我们考虑形如 $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta$ 的递推关系，设 $a_n + x = \alpha(a_{n-1} + x)$，可以通过待定系数法求解出 $x = \frac{\beta}{\alpha-1}(\alpha \neq 1)$，因此有 $a_n = \alpha_{n-1}(a_1 + \frac{\beta}{\alpha-1}) - \frac{\beta}{\alpha-1}(\alpha \neq 1)$。特别地，如果 $\alpha = 1$，则显然 $a_n = a_1 + (n-1)\beta$

如果递推关系从两项扩展到更一般的情形，记 $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$，我们称之为线性齐次递推关系。

问题 6.2.1. 给定由 $\{0, 1, 2\}$ 三个数字组成的字符串，其中没有连续的两个 0，求长度为 n 的满足条件的字符串的个数 a_n。

考虑第 1 位的数字分别取 0，1，2 的情况，如果第一位数字是 0，则其下一位数字只能是 1 或者 2，对应地各自有 a_{n-2} 种取法；如果第一位数字是 1 或者 2，则后面取得数字不受条件制约，对应地各自有 a_{n-1} 种取法。因此，递推关系为 $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$。

求解这个递推方程，可以设两个待定系数，即 $a_n - \lambda a_{n-1} = \mu(a_{n-1} - \lambda a_{n-2})$，则有

$$\begin{cases} \lambda + \mu = -c_1 \\ \lambda\mu = c_2 \end{cases}$$

由韦达定理可知，λ 和 μ 是方程 $x^2 + c_1 x + c_2 = 0$ 的两个根，求解出 λ 和 μ 后，即完成了递推关系的求解。

考虑一般情形，有线性齐次递推关系：

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + C_3 a_{n-3} + ... + C_k a_{n-k} = 0$$

对应的特征方程 P(x)：

$$x^k + C_1 x^{k-1} + C_2 x^{k-2} + C_3 x^{k-3} + ... + C_k = 0$$

有 k 个根,$q_1, q_2, ..., q_k$。

考虑无重根的情形：对于特征方程任意的根 q_i, 显然 $a_n = q_i^n$ $(n \geq k)$ 满足原递推关系。

数列 $q_1^n, q_2^n, ..., q_k^n$ 均满足递推关系，易知其任意的线性组合也满足递推关系，有：

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

$$a_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n + \ldots + \lambda_k q_k^n$$

而对于任意满足递推关系的数列，都可以表示成上述形式，即原递推关系的**通解**。因此对于给定的 $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$，有：

$$\lambda_1 q_1^0 + \ldots + \lambda_k q_k^0 = a_0$$

$$\lambda_1 q_1^1 + \ldots + \lambda_k q_k^1 = a_1$$

$$\ldots$$

$$\lambda_1 q_1^{k-1} + \ldots + \lambda_k q_k^{k-1} = a_{k-1}$$

得到矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} q_1^0 & q_2^0 & \ldots & q_k^0 \\ q_1^1 & q_2^1 & \ldots & q_k^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & \ldots & q_k^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_{k-1} \end{pmatrix}$$

系数矩阵为 **Vandermonde** 矩阵，在 $q_1, \ldots, q_k$ 均不相等的情形下满秩，因此方程有唯一解。可以唯一确定 $a_n = \lambda_1 q_1^n + \ldots + \lambda_k q_k^n$。

考虑有重根的情形：当特征方程存在重根时，例如 $q_1 = q_2$，原通解方法不再适用，因为对应的特征矩阵将不再是满秩的。我们通过一个具体的例子来说明这种情况。

问题 6.2.2. 考虑递推关系：

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$$

对应的特征方程为：

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 = 0$$

这里特征方程有一个二重根 $x = 2$。解得其通解为：

$$a_n = (A + Bn) \cdot 2^n$$

其中 A 和 B 是待定系数。

回到我们的问题，先考虑 q_1 是特征方程 $f(x) = x^k + C_1 x^{k-1} + C_2 x^{k-2} + C_3 x^{k-3} + ... + C_k = 0$ 的二重根的情形。

令 $P(x) = x^{n-k} f(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_k x^{n-k}$，

则 $P'(x) = nx^{n-1} + C_1(n-1)x^{n-2} + \ldots + C_k(n-k)x^{n-k-1}$，

$xP'(x) = nx^n + C_1(n-1)x^{n-1} + \ldots + C_k(n-k)x^{n-k}$。

因为 q_1 是 $f(x)$=0 的二重根,所以 q_1 也是 $P(x) = x^{n-k}f(x) = 0$ 的二重根,是 $P'(x) = 0$ 的一重根, 是 $xP'(x) = 0$ 的一重根，即满足

$$nq_1^n + C_1(n-1)q_1^{n-1} + \ldots + C_k(n-k)q_1^{n-k} = 0$$

由此可知 nq_1 也满足原递推关系。

同理可以推出，若 q_1 是特征方程的 m 重根，则 $q_1^n, nq_1^n, n^2q_1^n, \ldots, n^{m-1}q_1^n$ 都满足原递推关系。

更一般的，若特征方程有 m_1 重根 q_1,m_2 重根 q_2,...,m_t 重根 q_t ,$m_1+m_2+\ldots+m_t = k$, 则

$$a_n = \lambda_{11}q_1^n + \lambda_{12}nq_1^n + \ldots + \lambda_{1m_1}n^{m_1-1}q_1^n$$

$$+\lambda_{21}q_2^n + \lambda_{22}nq_2^n + \ldots + \lambda_{2m_2}n^{m_2-1}q_2^n$$

$$\ldots$$

$$+\lambda_{t1}q_t^n + \lambda_{t2}nq_t^n + \ldots + \lambda_{tm_t}n^{m_t-1}q_t^n$$

任意满足原递推关系的数列，可由前 k 项 $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ 唯一确定，可唯一地解出 $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{tm_t}$ 这 k 个系数, 从而唯一确定 a_n。

6.3 常系数线性非齐次递推关系

通常，一个常系数线性非齐次递推关系可以被表示为:

$$a_n + c_1a_{n-1} + \ldots + c_ka_{n-k} + f(n) = 0$$

对其齐次部分 $a_n + c_1a_{n-1} + \ldots + c_ka_{n-k}$ 有特征方程:

$$P(x) = x^k + c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \ldots + c^k$$

对于非齐次线性递推关系的求解方式，我们将把非齐次转换为齐次形式，然后通过齐次递推关系的方式求解。

问题 6.3.1. 考虑如下线性非齐次递推关系，如何将其变成齐次的情形:

$$a_n + c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + t = 0$$

设 $P(x)$ 表示递推关系的齐次部分：

$$P(x) = a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

我们有：

$$a_{n+1} + c_1 a_n + \cdots + c_k a_{n-k+1} + t = 0$$

通过将上述两式相减，得到：

$$(a_{n+1} + c_1 a_n + \cdots + c_k a_{n-k+1}) - (a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}) = 0$$

即可定义 $Q(x)$ 如下：

$$Q(x) = (x-1) \cdot P(x)$$

问题 6.3.2. 考虑并求解如下线性非齐次递推关系：

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + t \cdot S^n = 0$$

其中 S 是递推关系的增长率或系数。
考虑线性非齐次递推关系：

$$S \cdot (a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + t \cdot S^n) = 0$$

我们可以展开得到：

$$a_{n+1} + c_1 a_n + c_2 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k+1} + t \cdot S^{n+1} = 0$$

通过作差，我们有：

$$(a_{n+1} + c_1 a_n + \cdots + c_k a_{n-k+1}) - S \cdot (a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}) - S \cdot P(x) = 0$$

其中，$P(x)$ 是递推关系的齐次部分。
即可定义 $Q(x)$ 如下：

$$Q(x) = (x - S) \cdot P(x)$$

1）$P(S) \neq 0$，即 S 不是 $P(x) = 0$ 的根，解的基为 $P(x) = 0$ 的基加上 S^n，即解为 $a_n + \lambda S^n$，将解带回原方程得到（注意 $P(a_n) = 0$）

$$\lambda S^n + c_1 \lambda S^{n-1} + \cdots + c_n \lambda S^{n-k} + S^n = 0$$

解得

$$\lambda = \frac{tS^k}{S^k + c_1 S^{k-1} + \cdots + c_k \cdot S^0} = \frac{S^k}{P(S)}$$

2）$P(S) = 0$，设 S 是 $P(x) = 0$ 的 m 重根，解的基为 $P(x) = 0$ 的基加上 $n^m S^n$，即解为 $a_n + \lambda n^m S^n$。

问题 6.3.3. $f(n)$ 形如 n^α 的非齐次线性递推关系，即：

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k} + n^\alpha = 0$$

先讨论 $\alpha = 1$ 的简单形式，我们与 2.1 中问题使用相同的方法，列出连续两个关系式：

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k} + n = 0$$

$$a_{n+1} + c_1 a_n + \ldots + c_k a_{n-k+1} + n + 1 = 0$$

通过相减的方式消除 n，得出下式

$$(a_{n+1} + c_1 a_n + \ldots + c_k a_{n-k+1}) - (a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}) + 1 = 0$$

可以看出式中仍有非齐次部分 1，我们再多列一式尝试消除

$$a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + \ldots + c_k a_{n-k+2} + n + 2 = 0$$

通过第一次相减得出下式：

$$(a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + \ldots + c_k a_{n-k+2}) - (a_{n+1} + c_1 a_n + \ldots + c_k a_{n-k+1}) + 1 = 0$$

最终相减可以得到

$$\begin{aligned}&[(a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + \ldots + c_k a_{n-k+2}) - (a_{n+1} + c_1 a_n + \ldots + c_k a_{n-k+1})] - \\ &[(a_{n+1} + c_1 a_n + \ldots + c_k a_{n-k+1}) - (a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k})] = 0\end{aligned}$$

通过相减最后得出的式子可以将所有非齐次部分消除，同之前的思路，我们将原递推关系中非齐次部分的特征方程设为 $P(x)$，那么原递推关系的特征方程设为 $Q(x)$ 得出下式:

$$Q(x) = x^2 P(x) - xP(x) - xP(x) + P(x) = (x-1)^2 P(x)$$

此处 $x = 1$ 作为 $Q(x)$ 额外带来的二重根，我们同问题 6.3.2 中的求解方式区分 $x = 1$ 是 $P(x)$ 的根的情况和不是根的情况，讨论后即可求出非齐次的特解部分。

例如，$x = 1$ 是 $P(x)$ 的根时，设 $a_n + \lambda 1^n + \mu n 1^n$ 后求出 λ 和 μ 即可。当 $x = 1$ 是 $P(x)$ 的 m 重根时，那么 $x = 1$ 是 $Q(x)$ 的 $m+2$ 重根，将特解部分设为 $\lambda_{m+1} n^m 1^n + \lambda_{m+2} n^{m+1} 1^n$ 即可。

我们进一步讨论 $\alpha = 2$ 的情况，即：

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k} + n^2 = 0$$

我们使用同样的思路，多列几项

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k} + n^2 = 0$$

$$a_{n+1} + c_1 a_n + \ldots + c_k a_{n-k+1} + (n+1)^2 = 0$$

$$a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + \ldots + c_k a_{n-k+2} + (n+2)^2 = 0$$

$$a_{n+3} + c_1 a_{n+2} + \ldots + c_k a_{n-k+3} + (n+3)^2 = 0$$

$$a_{n+4} + c_1 a_{n+3} + \ldots + c_k a_{n-k+4} + (n+4)^2 = 0$$

$$a_{n+5} + c_1 a_{n+4} + \ldots + c_k a_{n-k+5} + (n+5)^2 = 0$$

相减后，通过后式迭代地进行此类相减，可以最终消除所有非齐次项，最终的特征方程可表示为:

$$Q(x) = (x-1)^3 P(x)$$

显然 $x = 1$ 是 $Q(x)$ 的根，我们同前面的方式讨论 $x = 1$ 是否也是 $P(x)$ 的重根的不同情况即可。

因此可以看出，对于非齐次项形如 n^α 的递推关系，我们都可以通过相减消除的方式得出消除非齐次部分的最终式，然后讨论非齐次部分带来的额外根是否是齐次部分的根即可。

6.4 变系数线性递推关系

问题 6.4.1. 求解递推关系

$$f(n) = \frac{n+1}{2n} f(n-1) + 1, f(0) = 1$$

令

$$f(n) = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n}{2(n-1)} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{2 \cdot 1} \cdot h(n) = \frac{n+1}{2^n} h(n)$$

带入上述递推关系并化简，得到

$$h(n) = h(n-1) + \frac{2^n}{n+1}, h(0) = 1$$

解得

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1}$$

从而

$$f(n) = \frac{n+1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1}$$

更一般地，一阶线性递推关系可以表示成：

$$a_n = f(n)a_{n-1} + g(n)$$

与非齐次递推关系求解思路一致，我们想办法将变系数改为常系数，故设：

$$b_n = h(n)a_n$$

使得 b_n 可以满足常系数递推关系：

$$b_n = cb_{n-1} + g'(n)$$

结合以上公式式可得

$$h(n)a_n = ch(n-1)a_{n-1} + g'(n)$$

得到 a_n 表达式:

$$a_n = c\frac{h(n-1)}{h(n)}a_{n-1} + \frac{g'(n)}{h(n)}$$

此处 c 为 b_n 的常系数，简单起见这里取 $c = 1$，那么与原式对比，令 $f(n) = c\frac{h(n-1)}{h(n)} = \frac{h(n-1)}{h(n)}$，我们的目的是通过给定的 $f(n)$ 求出可以转换成常系数的 $h(n)$，这里使用累乘求出：

$$f(1)f(2)\dots f(n-1)f(n) = \frac{h(0)}{h(1)}\frac{h(1)}{h(2)}\frac{h(n-2)}{h(n-1)}\frac{h(n-1)}{h(n)} = \frac{h(0)}{h(n)}$$

得出

$$h(n) = \frac{h(0)}{\prod_{i=1}^{n} f(i)}$$

得到 $h(n)$ 后，我们就可以将变系数递推关系 a_n 转为齐次线性递推关系 b_n 求解。

6.5 非线性递推关系

问题 6.5.1. 给定一个特殊的非线性递推关系：

$$a_{n+1} = 2a_n^2$$

我们尝试将非线性的递推关系通过转换成线性的递推关系 b_n，对于这类幂次型的，容易联想到两边同时取对数：

$$loga_{n+1} = log2 + 2loga_n$$

令 $b_n = loga_n$ 即可转换为：

$$b_{n+1} = 2b_n + log2$$

6.6 生成函数与递推关系

对于生成函数：

$$G(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$$

和齐次线性递推关系：

$$a_n+c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_ka_{n-k}=0$$

他们有什么关系？由于生成函数中有无穷多项，因此我们多列几个 a_k 起始到 a_∞ 递推关系

$$a_k+c_1a_{k-1}+c_2a_{k-2}+\ldots+c_{k-1}a_1+\underline{c_ka_0}=0$$

$$a_{k+1}+c_1a_k+c_2a_{k-1}+\ldots+c_{k-1}a_2+\underline{c_ka_1}=0$$

$$a_{k+2}+c_1a_{k+1}+c_2a_k+\ldots+c_{k-1}a_3+\underline{c_ka_2}=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

对于最后一列 (下划线列) 做累加即可得到 $c_k\sum_{i=0}^{\infty}a_i$，与生成函数相比少了 x，故我们对每一行 (第 i 行) 两边同乘一个 x^i 即可使得最后一列做累加得到 $c_k\sum_{i=0}^{\infty}x^ia_i=c_kG(x)$。将最后一列视为第 k 列，对第 t 列同理累加和为 $c_t\frac{G(x)-\sum_{i=0}^{k-t-1}a_ix^i}{x^{k-t}}$。令 $G_t(x)=\sum_{i=0}^{t}a_ix^i$，将所有列的累加和再做累加即可得到：

$$\frac{G(x)-G_{k-1}(x)}{x^k}+c_1\frac{G(x)-G_{k-2}(x)}{x^{k-1}}+\ldots+c_{k-1}\frac{G(x)-G_0(x)}{x}+c_kG(x)=0$$

两边同乘 x^k 化简得到：

$$G(x)\underline{[1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{k-1}x^{k-1}+c_kx^k]}=\sum_{i=0}^{k-1}x^{k-1-i}G_i(x)=A(x)$$

将划线部分视为 $Q(x)$ 得 $G(x)=\frac{A(x)}{Q(x)}$ 可以观察到,$Q(x)$ 和特征方程 $x^k+c_1x^{k-1}+\cdots+c_k$ 关系密切，可以做转化：$Q(x)=x^kP(\frac{1}{x})$

进一步的，将 $P(x)$ 转换为特征根的形式 $P(x)=(x-q_1)^{m_1}(x-q_2)^{m_2}\ldots(x-q_t)^{m_t}$，则 $Q(x)=(1-q_1x)^{m_1}(1-q_2x)^{m_2}\ldots(1-q_tx)^{m_t}$

得出 $G(x)$ 与递推关系的最终关系形式：

$$G(x)=\frac{A(x)}{(1-q_1x)^{m_1}(1-q_2x)^{m_2}\ldots(1-q_tx)^{m_t}}$$

由于上式是有理分式，且分母次数高于分子，故存在一组唯一的基集

$$d_{11},d_{12},\cdots,d_{1m_1},$$

$$d_{21}, d_{22}, \cdots, d_{2m_2},$$

$$\vdots$$

$$d_{t1}, d_{t2}, \cdots, d_{tm_t}$$

使得分式有分项表示

$$G(x) = \frac{d_{11}}{1 - q_1 \cdot x} + \frac{d_{12}}{(1 - q_1 \cdot x)^2} + \cdots + \frac{d_{1m_1}}{(1 - q_1 \cdot x)^{m_1}} +$$

$$\frac{d_{21}}{1 - q_2 \cdot x} + \frac{d_{22}}{(1 - q_2 \cdot x)^2} + \cdots + \frac{d_{2m_2}}{(1 - q_2 \cdot x)^{m_2}} +$$

$$\vdots$$

$$\frac{d_{t1}}{1 - q_t \cdot x} + \frac{d_{t2}}{(1 - q_t \cdot x)^2} + \cdots + \frac{d_{tm_t}}{(1 - q_t \cdot x)^{m_t}}$$