泛函分析

作者：Sirius.

四川大学计算机学院

目录

第一章 Banach 空间上的有界线性算子 **1**

1.1 纲 1

1.2 Hahn-Banach 定理 2

1.3 一致有界原理 3

1.4 开映射定理 4

1.5 闭图像 (形) 定理 5

1.6 对偶空间 5

1.7 自反空间 6

1.8 共轭算子 7

1.9 闭值域定理 8

1.10 商空间 8

1.11 弱收敛和弱 * 收敛 9

第一章　Banach 空间上的有界线性算子

1.1　纲

Def

定义 1.1.1 (无处稠密)**.** 设 X 是距离空间，$S \subset X$. 如果 $int\,\overline{S} = \varnothing$，即对于任意 $x \in X$ 和任意 $r > 0$，都有 $B(x,r) \not\subset \overline{S}$，则称 S 是无处稠密的.

注释. 无处稠密集具有以下基本性质：

1. **闭集判定**：若 S 已闭，则 S 无处稠密当且仅当 S 没有内点。
2. **子集继承性**：若 S 无处稠密，且 $T \subset S$，则 T 也无处稠密。
3. **有限并**：有限个无处稠密集的并仍然是无处稠密。
4. **可数并与第一纲**：可数个无处稠密集的并是第一纲集合，但可能不再无处稠密。
5. **补集稠密**：无处稠密集的补集在 X 中稠密，即其闭包是整个空间。

定理 1.1.1 (Baire 纲定理)**.** 完备的距离空间 X 必是第二纲的.

注释. 纲的定义是一个相对的概念，Baire 纲定理指的是完备的距离空间是相对于自身的第二纲子集.

定理 1.1.2 (纲推理 1)**.** 假设 X 是 *Banach* 空间，且 $\dim X = \infty$. 如果 Y 是 X 中的有限维子空间，则

1. Y 是 X 的闭子空间.*(找一组线性基，构造 $\mathbb{R}^n$ 到 Y 的同构映射，利用完备性可知 Y 闭)*
2. Y 是 X 的第一纲子集，实际上是无处稠密子集.*(因为如果 Y 包含一个开球，可以通过平移缩放得到 Y 包含 $B_X(0,n)$，从而包含整个空间 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_X(0,n)$)*
3. Y 是 Y 的第二纲子集.*(利用纲定理显然)*

定理 1.1.3 (纲推理 2(择一))**.** 假设 X 是 *Banach* 空间，且 $\dim X = \infty$. 如果 Y 是 X 中的闭子空间，则

1. 要么 Y 是 X 的第一纲子集.

2. 要么 $Y = X$.

*(*因为如果 Y 包含某个开球，则一定会包含整个空间 X；反之 Y 不包含任何开球，故为第一纲子集*)*

定理 1.1.4 (纲推理 3)**.** 假设 X 是 *Banach* 空间，且 $\dim X = \infty$，则 X 的 *Hamel* 基是不可数的.

证明. (反证法，假设 X 有可数个基，则 X 可表示为可数个有限维子空间的并，纲性矛盾)

具体来说，假设 X 的 Hamel 基是可数的：

$$\{e_1, e_2, e_3, \dots\}.$$

根据 Hamel 基的定义，空间中任意向量 $x \in X$ 都可以表示为有限多个基向量的线性组合：

$$x = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_{i_k}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R},\ i_k \in \mathbb{N},\ N < \infty.$$

因此我们可以定义有限维子空间：

$$X_n := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

每个 X_n 是有限维的，因此是闭的，并且由于 X 是无限维的，$X_n \neq X$，所以 X_n 不包含任何开集，即 X_n 是无处稠密的。

又因为每个 $x \in X$ 都可以表示为有限基向量的线性组合，所以一定存在某个 n，使得 $x \in X_n$。于是

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

但是可数个闭无处稠密集的并仍然是第一纲集合，而 Banach 空间不能被第一纲集合覆盖（Baire 纲定理），因此得到矛盾。

所以假设 Hamel 基可数是错误的，X 的 Hamel 基必须是不可数的。 □

1.2 Hahn-Banach 定理

定理 1.2.1 (Hahn-Banach 扩张定理)**.** 设 X 是赋范空间，$G \subset X$ 是 X 的子空间，$f : G \to \mathbb{R}$（或 $\mathbb{C}$）是连续线性泛函。则存在一个有界线性泛函 $F : X \to \mathbb{R}$（或 $\mathbb{C}$），使得

$$F|_G = f \quad \text{且} \quad \|F\| = \|f\|_G,$$

其中

$$\|f\|_G = \sup_{\substack{x\in G\\ \|x\|\le 1}} |f(x)|.$$

也就是说，f 可以扩张到整个空间 X，而范数保持不变。

推论 1.2.1 (分离非零元)**.** 设 X 是赋范空间，$x_0 \in X$ 且 $x_0 \neq 0$。则存在一个有界线性泛函 $f : X \to \mathbb{R}$（或 $\mathbb{C}$），使得

$$f(x_0) = \|x_0\| \quad 且 \quad \|f\| = 1.$$

推论 1.2.2 (分离闭子空间)**.** 设 E 是赋范线性空间 X 的闭子空间，且 $x_0 \in X \setminus E$。则存在一个有界线性泛函 $f : X \to \mathbb{R}$（或 $\mathbb{C}$），使得

$$f(x_0) = 1, \quad f|_E = 0, \quad 且 \quad \|f\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(x_0, E)},$$

其中

$$\operatorname{dist}(x_0, E) = \inf_{y\in E} \|x_0 - y\|$$

表示 x_0 到子空间 E 的距离。

定理 1.2.2 (凸集分离定理)**.** 设 X 是赋范向量空间，$A, K \subset X$ 是两个非空凸集。如果 A 是闭集，K 是紧集，且 $A \cap K = \varnothing$，则存在一个非零连续线性泛函 $f \in X'$, 一个常数 $c \in \mathbb{R}$ 和一个 $\delta > 0$，使得

$$\operatorname{Re} f(x) \le c - \delta < c + \delta \le \operatorname{Re} f(y), \quad \forall x \in A,\ y \in K.$$

也就是说，可以找到一个线性泛函将两个凸集严格分离开来。

1.3　一致有界原理

定理 1.3.1 (一致有界原理)**.** 设 X 是 *Banach* 空间，Y 是赋范空间，$\{T_\alpha\} \subset L(X, Y)$ 是一族有界线性算子。假设对每个 $x \in X$，

$$\sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty.$$

则存在一个常数 $M \ge 0$，使得

$$\sup_\alpha \|T_\alpha\| \le M.$$

也就是说，这一族算子在算子范数下是一致有界的。

推论 1.3.1. 设 X 是 *Banach* 空间，$\{x_\alpha\} \subset X$。如果对每个 $f \in X'$（即 X 的对偶空间），都有

$$\sup_\alpha |f(x_\alpha)| < \infty,$$

则存在常数 $M \ge 0$，使得

$$\sup_\alpha \|x_\alpha\| \le M.$$

证明. 回忆每个 $x \in X$ 的典型映射

$$\tau(x) \in X'', \quad \tau(x)(f) = f(x), \quad f \in X'.$$

对每个 α，考虑 $\tau(x_\alpha) \in X''$。根据定义，

$$\|\tau(x_\alpha)\| = \sup_{\|f\| \le 1} |\tau(x_\alpha)(f)| = \sup_{\|f\| \le 1} |f(x_\alpha)| = \|x_\alpha\|.$$

假设给出条件：对每个 $f \in X'$，

$$\sup_\alpha |f(x_\alpha)| < \infty.$$

这意味着对每个 $f \in X'$，$\{\tau(x_\alpha)(f)\}_\alpha$ 有界。

由一致有界原理（Banach–Steinhaus 定理）应用于 X''，可知

$$\sup_\alpha \|\tau(x_\alpha)\| \le M$$

对某个常数 $M \ge 0$ 成立。

因此

$$\sup_\alpha \|x_\alpha\| = \sup_\alpha \|\tau(x_\alpha)\| \le M < \infty,$$

证明完成。 □

1.4 开映射定理

定理 1.4.1 (开映射定理)**.** 设 X, Y 为 *Banach* 空间，$T \in L(X, Y)$ 是一个有界线性算子。如果 T 的值域 $R(T)$ 在 Y 中是第二纲的，则 T 是开映射。也就是说，对于 X 中任意开集 U，$T(U)$ 在 Y 中也是开集。*(有一个常用的推论：如果 T 是满射，则 T 是开映射)*

定理 1.4.2 (逆算子定理)**.** 设 X, Y 为 *Banach* 空间，$T \in L(X, Y)$ 是一个双射。则 $T^{-1} \in L(Y, X)$，即 T^{-1} 也是有界线性算子。*(由开映射定理易证)*

定理 1.4.3 (等价范数定理)**.** 设 X 是线性空间，$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数。如果 $(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X, \|\cdot\|_2)$ 都是 *Banach* 空间，且存在常数 $c > 0$ 使得

$$\|x\|_1 \le c\|x\|_2, \quad \forall x \in X,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是等价范数。*(由逆算子定理易证)*

1.5 闭图像 (形) 定理

Def

定义 1.5.1 (闭算子)**.** 设 X, Y 是赋范空间，$T : D(T) \subset X \to Y$ 是定义在 X 的子集 $D(T)$ 上的线性算子。如果对于任意序列 $\{x_n\} \subset D(T)$，当 $x_n \to x \in X$ 且 $Tx_n \to y \in Y$ 时，总有 $x \in D(T)$ 且 $Tx = y$，则称 T 是闭算子。

定理 1.5.1 (闭图像定理)**.** 设 X, Y 是 *Banach* 空间，$T : D(T) \subset X \to Y$ 是定义在 X 的子集 $D(T)$ 上的线性算子。如果 T 是闭算子，且其定义域 $D(T)$ 在 X 中是全空间（即 $D(T) = X$），则 T 是有界线性算子。

1.6 对偶空间

定理 1.6.1 (可分传递)**.** 设 X 是一个赋范线性空间。如果 X' 是可分的，则 X 也是可分的。

证明. 由于 X' 可分，取 X' 的一个可数稠密子集

$$\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X'.$$

不妨限制在单位球面上，则稠于单位球面上。

假设 X 不可分。我们将在单位球

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

中构造一个序列 $\{x_n\} \subset X$，使得

$$|x'_n(x_n)| > \frac{1}{2}$$

成立。

对每个 $x_n \in X$，利用范数的定义，存在 $x'_n \in X'$，使得

$$\|x'_n\| = 1, \quad |x'_n(x_n)| > \frac{1}{2}.$$

由于 X 不可分，所以 $\{x_n\}$ 张开的子空间的闭包不是 X 。

由 Hahn-Banach 定理，存在 $x'_0 \in X'$，使得

$$x'_0(x_n) = 0$$

从而，

$$\|x'_0 - x'_n\| \geq |(x'_0 - x'_n)(x_n)| = |x'_n(x_n)| > \frac{1}{2}.$$

这表明 x'_0 与 $\{x'_n\}$ 之间的距离至少为 $\frac{1}{2}$，与 $\{x'_n\}$ 在 X' 中稠密矛盾。因此假设不成立，X 必须是可分的。 □

例题 1.6.1 (对偶空间的例子)**.** 常见的对偶空间包括：

1. $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$，$(c_0)' \cong \ell^1$。
2. 对 $1 < p < \infty$ 且 $1/p + 1/q = 1$，有

$$(\ell^p)' \cong \ell^q, \quad (L^p[a,b])' \cong L^q[a,b].$$

3. $(C[a,b])' \cong V_0[a,b]$，其中 $V_0[a,b] = \{g \in BV[0,1] : g(0) = 0$且$g$是右连续的$\}$。

1.7　自反空间

Def

定义 1.7.1 (自反空间)**.** 设 X 是赋范线性空间。如果典型映射 $\tau : X \to X''$ 是满射，即 $\tau(X) = X''$，则称 X 是自反空间。

注释. 常见自反空间：

1. 有限维赋范线性空间
2. Hilbert 空间
3. ℓ^p, $L^p[a,b]$（$1 < p < \infty$）

常见不自反空间：

1. $\ell^1, L^1[a,b]$
2. $\ell^\infty, L^\infty[a,b]$
3. $(c_0), (c), C[a,b]$

定理 1.7.1 (自反传递)**.** *设 X 是 Banach 空间，M 是 X 的闭子空间，则*

1. *如果 X 是自反空间，则 M 和 X/M 也是自反空间。*
2. *X 自反当且仅当 X' 自反。*
3. *如果 $X \cong Y$，那么 X 自反当且仅当 Y 自反。*

1.8　共轭算子

Def

定义 1.8.1 (共轭算子)**.** 设 X, Y 是赋范线性空间，$T \in L(X, Y)$ 是一个有界线性算子。定义 T 的共轭算子 $T' : Y' \to X'$ 满足

$$(T'y')(x) = y'(Tx), \quad \forall x \in X,\ y' \in Y'.$$

显然 T' 也是有界线性算子，且有

$$\|T'\| = \|T\|.$$

Def

定义 1.8.2 (零化子)**.** 设 X 是 Banach 空间。

1. 子空间 $M \subset X$，其零化子 M^0 为

$$M^0 = \{x' \in X' : x'(m) = 0, \forall m \in M\}.$$

2. 子空间 $G \subset X'$，其零化子 ${}^0G$ 为

$$ {}^0G = \{x \in X : g(x) = 0, \forall g \in G\}.$$

显然 $M^0 \subset X'$ 和 ${}^0G \subset X$ 都是闭子空间。

定理 1.8.1 (二次零化子)**.** *设 X 是 Banach 空间，$M \subset X$ 是 X 的子空间，$G \subset X'$ 是 X' 的子空间，则*

$$ {}^0(M^0) = \overline{M}, \quad ({}^0G)^0 \supset \overline{G}.$$

当 X 是自反空间时，$({}^0G)^0 = \overline{G}$ 也成立。

定理 1.8.2 (值域和零空间的关系)**.** *设 X, Y 是 Banach 空间，$T \in L(X, Y)$。则：*

1. $(\overline{R(T)})^0 = N(T')$.
2. ${}^0(\overline{R(T')}) = N(T)$.
3. $\overline{R(T)} = {}^0N(T')$.
4. $\overline{R(T')} \subset N(T)^0$. *若 X 是自反空间，则* $\overline{R(T')} = N(T)^0$.

这里面蕴含着一个事实：

$$\overline{R(T)} = Y \iff N(T') = \{0\}.$$

$$\overline{R(T')} = X' \iff N(T) = \{0\}.$$

1.9 闭值域定理

定理 1.9.1 (闭值域定理)**.** 设 X, Y 是 *Banach* 空间，$T \in L(X, Y)$。则下列命题等价：

1. $R(T)$ 在 Y 中闭。
2. $R(T')$ 在 X' 中闭。
3. $R(T) = {}^0N(T')$
4. $R(T') = N(T)^0$
5. T 是一个从 X 到 $R(T)$ 的开映射。
6. T' 是一个从 Y' 到 $R(T')$ 的开映射。

闭值域定理在 *Hilbert* 空间中有类似的表述。

推论 1.9.1 (闭值域定理推论)**.** 设 X, Y 是 *Banach* 空间，$T \in L(X, Y)$。则下列命题等价：

1. T 是满射。
2. 存在常数 $c > 0$，使得
$$\|T'y'\| \geq c\|y'\|, \quad \forall y' \in Y'.$$
(即 T' 的逆连续)
3. T' 是单射且 $R(T')$ 在 X' 中闭。

特别地，如果 T 是双射，则 T' 也是双射。

1.10 商空间

定理 1.10.1 (完备传递)**.** 设 X 是 *Banach* 空间，$M \subset X$ 是 X 的闭子空间，则商空间 X/M 也是 *Banach* 空间。

Def

定义 1.10.1 (商映射). 设 X 是赋范线性空间，$M \subset X$ 是 X 的子空间。定义商映射 $\pi : X \to X/M$ 满足

$$\pi(x) = x + M, \quad \forall x \in X.$$

显然，商映射是线性的，若进一步有 M 是闭子空间，则有

$$\|\pi(x)\| = \text{dist}(x, M) = \inf_{m \in M} \|x - m\|, \quad \forall x \in X.$$

商映射还是满射，故也是开映射；商映射还是压缩的，即

$$\|\pi(x)\| = \|x + M\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

定理 1.10.2 (满射下的同构映射). 设 X 和 Y 是 *Banach* 空间，$T \in L(X, Y)$ 且 $R(T) = Y$。定义 $S : X/N(T) \to Y$ 满足

$$S(x + N(T)) = T(x), \quad \forall x \in X.$$

则 S 是一个同构映射，且有

$$\|S\| = \|T\|.$$

定理 1.10.3 (同构定理). 设 X 是 *Banach* 空间，$M \subset X$ 是 X 的闭子空间。则有

$$(X/M)' \cong M^0.$$

$$X'/M^0 \cong M'.$$

且上述同构是保范的。

1.11 弱收敛和弱 * 收敛

Def

定义 1.11.1 (弱收敛). 设 X 是赋范线性空间，$\{x_n\} \subset X$ 是 X 中的一个序列。如果存在 $x \in X$，使得对于任意 $f \in X'$，都有

$$f(x_n) \to f(x) \quad (n \to \infty),$$

则称序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x，记作 $x_n \xrightarrow{w} x$。

定义 1.11.2 (弱 * 收敛). 设 X 是赋范线性空间，$\{f_n\} \subset X'$ 是 X' 中的一个序列。如果存在 $f \in X'$，使得对于任意 $x \in X$，都有

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty),$$

则称序列 $\{f_n\}$ 弱 * 收敛于 f，记作 $f_n \xrightarrow{w^*} f$。

定理 1.11.1 (弱收敛的充要条件)**.** 设 X 是 *Banach* 空间，$\{x_n\} \subset X$ 是 X 中的一个序列。则下列命题等价:

1. $x_n \xrightarrow{w} x$。
2. 序列 $\{x_n\}$ 有界，且对于任意 f 属于 X' 的一个稠密子集，有

$$f(x_n) \to f(x) \quad (n \to \infty).$$

定理 1.11.2 (Pettis 定理)**.** 自反空间中的闭单位球是弱列紧的。

定理 1.11.3 (Banach-Alaoglu 定理)**.** 如果 X 是 *Banach* 空间，则 X 的对偶空间 X' 的闭单位球在弱 * 拓扑下是紧的。