– 图论及其应用–

网络流与连通度

侯新民

计算与应用数学系

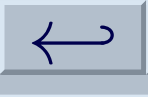
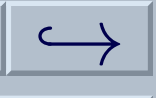
xmhou@ustc.edu.cn



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





目　录

1 网络流 4

作业 14

2 Menger 定理 16

Menger定理点形式 24

作业 30

3 连通度 32

作业 48

4 运输方案的设计-容量网络最大流算法 50

作业 61



5 最优运输方案的设计-最小费用最大流算法* 62
作业* 76

6 中国投递员问题 77
欧拉图情形 78
非欧拉图情形 81
作业 91

7 方化矩形的构造 93



1 网络流

- 所谓网络 (network) 是指具有两个不同的特定顶点 x 和 y 的加权连通图 $(D, \mathbf{w})$, 记为 $N = (D_{xy}, \mathbf{w})$, 其中 x 和 y 分别称为发点 (source) 和收点 (sink).
- 若 $\mathbf{w}$ 为非负的**容量函数** (capacity function) $\mathbf{c}$, 则称网络 $N = (D_{xy}, \mathbf{c})$ 为容量网络 (capacity network), 其中 $\mathbf{c}$ 在边 a 上的值 $\mathbf{c}(a)$ 称为边 a 的容量 (capacity).
- 若对任何 $a \in E(D), \mathbf{c}(a)$ 都是非负整数, 则称 N 为整容量网络 (integer capacity network). 图 1 (a) 所示的是整容量网络, 边 a 上的数值为 $\mathbf{c}(a)$.
- 设 $N = (D_{xy}, \mathbf{c})$ 为容量网络. 若存在 $\mathbf{f} \in \mathcal{E}(D)$ 使得

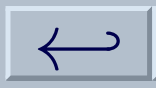
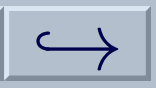
$$0 \leqslant \mathbf{f}(a) \leqslant \mathbf{c}(a), \quad \forall\, a \in E(D), \tag{1}$$



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





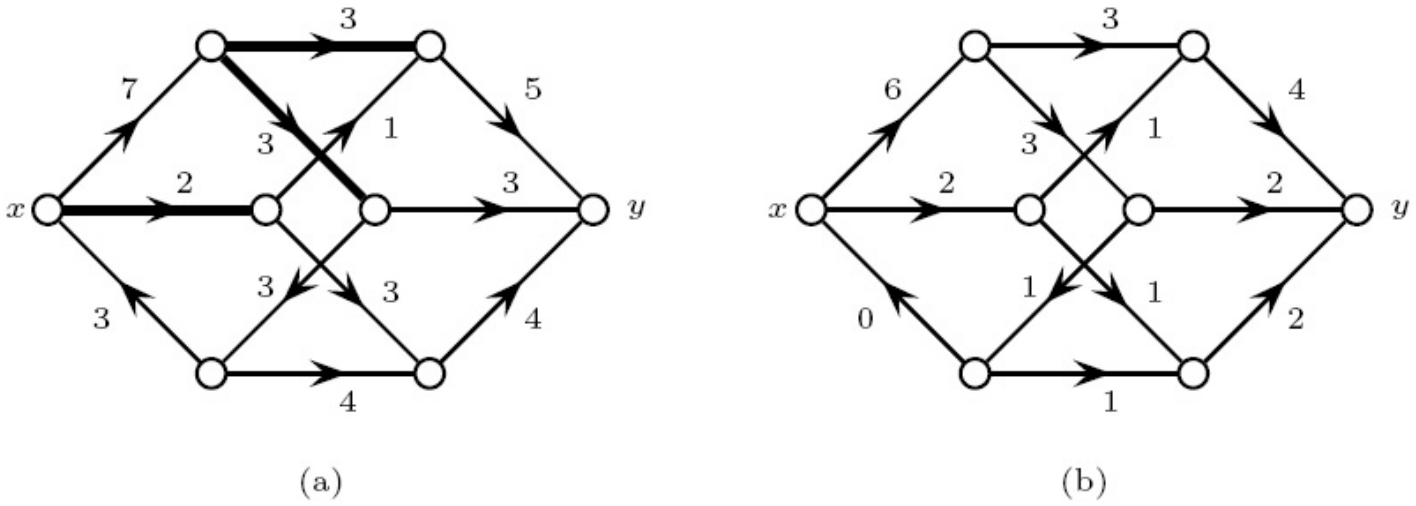


Figure 1: (a) 网络 $N=(D_{xy},\mathbf{c})$ (b) N 中 (x,y) 流 $\mathbf{f}$

并且

$$\mathbf{f}^{+}(u)=\mathbf{f}^{-}(u),\quad \forall\, u\in V(D)\setminus\{x,y\}. \tag{2}$$

则称 $\mathbf{f}$ 是 N 中从 x 到 y 的流 (flow), 简记 (x,y) 流.

- 每个网络至少存在一个流，例如 $f(a)=0,\forall a\in$

$E(D)$, 称之为零流. 图 1 (b) 所示的是 (a) 中整容量网络 $N=(D_{xy},\mathbf{c})$ 的 (x,y) 流 $\mathbf{f}$, 边 a 上的数值为 $\mathbf{f}(a)$.

- 由条件 (2) 容易验证, 对于 $N=(D_{xy},\mathbf{c})$ 中任何一个 (x,y) 流 $\mathbf{f}$ 均有

$$\mathbf{f}^+(x)-\mathbf{f}^-(x)=\mathbf{f}^-(y)-\mathbf{f}^+(y). \quad \text{(HOW TO PROVE IT?)} \tag{3}$$

上式中等号两边的值称为 (x,y) 流 $\mathbf{f}$ 的流量 (value of a flow), 记为 val $\mathbf{f}$.

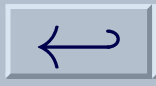
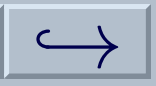
- 例如, 图 1 (b) 所示的 (x,y) 流 $\mathbf{f}$ 的流量 val $\mathbf{f}=8$.
- N 中具有最大流量的 (x,y) 流称为 N 中最大流 (maximum flow).
- D 中形如 $E_D^+(S,\overline{S})$ 的有向边集 B 称为 (x,y) 有向



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





边割集 (directed edge-cut set), 如果 $x \in S, y \in \overline{S}$.

$$\mathrm{cap}B = \mathbf{c}(B) = \sum_{a \in B} \mathbf{c}(a).$$

称为 B 的**容量**. 具有最小容量的 (x,y) 有向边割集称为最小割 (minimum cut set).

- 例如, 在图 1 (a) 所示的容量网络 $N = (D_{xy}, \mathbf{c})$ 中, 粗边所示的是 (x,y) 有向边割集 B, 其容量 $\mathrm{cap}\,B = 8$.

我们将在 4.4 节介绍求最大流和最小割的有效算法. 这里先证明关于最大流量和最小割容量之间关系的下列著名结果:

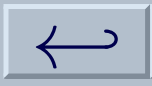
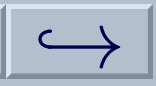
定理 4.1 (最大流最小割定理 (L. R. Jr. Ford & D. R. Fulkerson, 1956)) 在任何容量网络 N 中, 最大流量等



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





于最小割容量.

$$\max_f\{val(f) : f \text{ is a (x,y)-flow}\}$$
$$= \min_B\{cap(B) : B \text{ is a (x,y)-cut}\}.$$

证明

- 设 $N=(D_{xy},\mathbf{c})$ 是容量网络, $\mathbf{f}$ 是 N 中最大流而 $B=(S,\overline{S})$ 是 N 中的最小割.
- 由流和流量的定义, 对任何 $u\in S$ 有

$$\mathbf{f}^+(u)-\mathbf{f}^-(u)=\begin{cases}\mathrm{val}\,\mathbf{f}, & \text{若 } u=x;\\ 0, & \text{若 } u\in S\setminus\{x\}.\end{cases}$$

于是 (习题 4.1.2),

$$\begin{aligned}\mathrm{val}\,\mathbf{f} &= \mathbf{f}^+(x)-\mathbf{f}^-(x)=\sum_{u\in S}(\mathbf{f}^+(u)-\mathbf{f}^-(u))\\ &= \mathbf{f}^+(S)-\mathbf{f}^-(S)\le \mathbf{f}^+(S)\leqslant \mathbf{c}^+(S)=\mathrm{cap}\,B.\end{aligned}$$



- 所以$\max \operatorname{val} \mathbf{f} \leq \min \operatorname{cap} B$.
- 下面只需证明$\max \operatorname{val} \mathbf{f} \geq \min \operatorname{cap} B$.
- 为此, 用D' 表示在D 中每条边a 的两端点之间添加一条与a 方向相反的新边$\overleftarrow{a}$ 后得到的图. 定义$\widetilde{\mathbf{f}} \in \mathcal{E}(D')$ 如下:

$$\widetilde{\mathbf{f}}(a)=\begin{cases}\mathbf{c}(a)-\mathbf{f}(a), & \text{若 } a \text{ 是老边;}\\ \mathbf{f}(a), & \text{若 } a \text{ 是新边.}\end{cases}$$

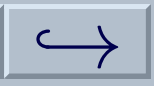
- 注意: $\tilde{f}(a)+\tilde{f}(\overleftarrow{a})=c(a)$.
- 例如, 图 2 (a) 所示的网络就是图 1 中网络按上述方法得到的图D', 其中有向曲边表示新添加的边$\overleftarrow{a}$. 边a 上的数值为$\widetilde{\mathbf{f}}$ 在a 上的值$\widetilde{\mathbf{f}}(a)$.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





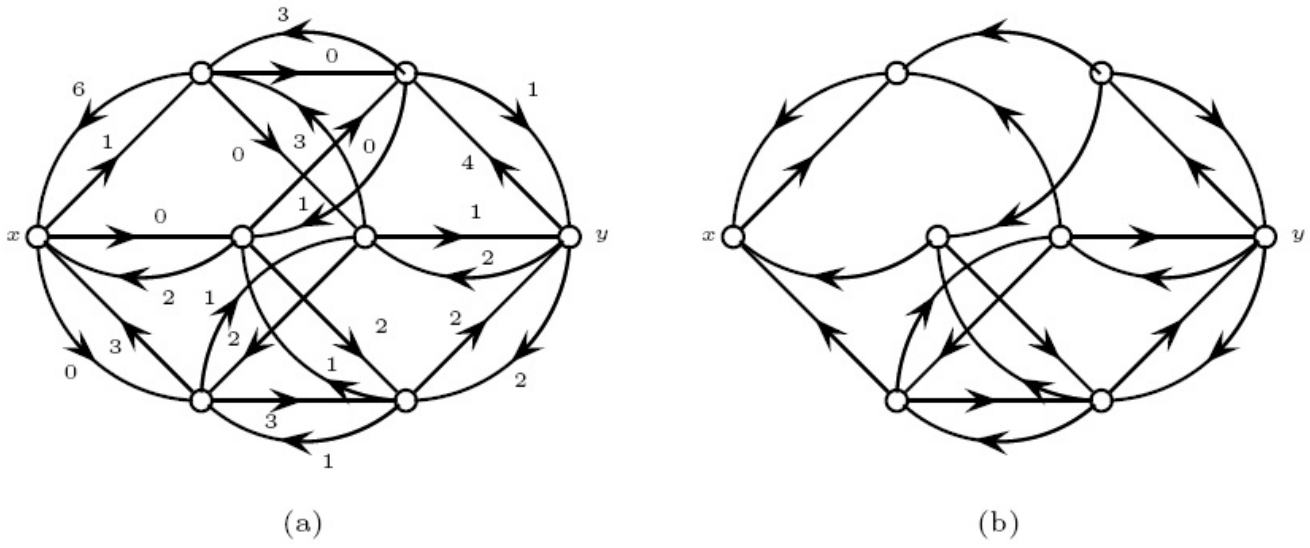


Figure 2: (a) D' 和 $\widetilde{\mathbf{f}}$; (b) $D^* = D'_{\widetilde{\mathbf{f}}}$

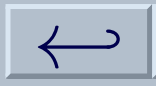
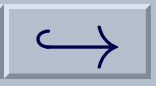
- 令 $D^* = D'_{\widetilde{\mathbf{f}}}$, 即 $\widetilde{\mathbf{f}}$ 在 D' 中的支撑图(其定义见2.3节). 例如, 见图 2, (b) 中所示的图就是(a)中图 D' 的 $\widetilde{\mathbf{f}}$ 的支撑图 D^*.
- 断言 D^* 中不存在 (x,y) 路.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 若不然, 设P 是D^*中 (x,y) 路. 令

$$\sigma = \min\{\widetilde{\mathbf{f}}(a):\ a \in E(P)\}.$$

则 $\sigma > 0$.

- 定义 $\mathbf{f}' \in \mathcal{E}(D)$ 如下:

$$\mathbf{f}'(a) = \begin{cases} \mathbf{f}(a)+\sigma, & \text{若 } a \in E(P); \\ \mathbf{f}(a)-\sigma, & \text{若 } \overleftarrow{a} \in E(P); \\ \mathbf{f}(a), & \text{其它}. \end{cases}$$

- 于是, $\mathbf{f}'$ 是N 中 (x,y) 流, 并且$\text{val}\,\mathbf{f}' = \text{val}\,\mathbf{f}+\sigma > \text{val}\,\mathbf{f}$ (请证明！).
- 矛盾于$\mathbf{f}$ 的最大性. 所以D^* 中不含 (x,y) 路.
- 令

$$S' = \{u \in V(D^*):\ D^* \text{ 中存在}(x,u)\text{路}\}.$$

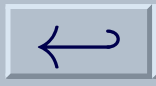
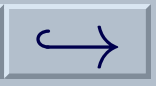
则 $x \in S'$, $y \notin S'$.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 于是, $B'=E_D^+(S',\overline{S'})$ 是 D 中 (x,y) 有向边割集, 而且在 D' 中有

$$\widetilde{\mathbf{f}}(a)=\begin{cases}0, & \text{若 } a\in E_D^+(S',\overline{S}');\\ \mathbf{c}(a), & \text{若 } a\in E_D^-(S',\overline{S}'),\end{cases}\tag{4}$$

于是, 在 D 中即有

$$\mathbf{f}(a)=\begin{cases}\mathbf{c}(a), & \text{若 } a\in E_D^+(S',\overline{S}');\\ 0, & \text{若 } a\in E_D^-(S',\overline{S}').\end{cases}$$

- 因此, 对于 D 中 (x,y) 有向边割集 $B'=E_D^+(S',\overline{S}')$ 有

$$\mathrm{val}\,\mathbf{f}=\mathbf{f}^+(S')-\mathbf{f}^-(S')=\mathbf{f}^+(S')=\mathrm{cap}B'\geqslant\mathrm{cap}B.$$

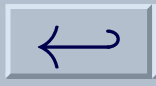
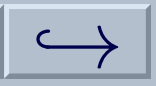
定理得证. ∎



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





推论 4.1 (整数最大流最小截定理) 任何整容量网络中都存在整数最大流而且其流量等于最小割容量. ∎

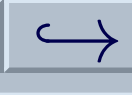
最大流最小割定理是网络流分析方法的基础. 以后将看到, 通过这个定理不仅可以求出网络中的最大流和最小截, 而且可以导出图论中许多著名的定理.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





作业

4.1.3 证明:

(a) 在定理4.1证明中的断言: “$\mathbf{f}'$ 是N 中(x,y)流,并且 $\mathrm{val}\,\mathbf{f}' = \mathrm{val}\,\mathbf{f} + \sigma$” ;

(b) 式(4)和推论4.1;

(c) 证明最大流的存在性.

4.1.6 **多发点和多收点容量网络** 设$N = (D, \mathbf{c})$ 是发点集为X 和收点集为Y 的容量网络. 令$I(D) = V(D) \setminus (X \cup Y)$. $\mathbf{f} \in \mathcal{E}(D)$ 称为N 中(X,Y) 流, 如果

$$\begin{cases} 0 \leqslant \mathbf{f}(a) \leqslant \mathbf{c}(a), & \text{若 } a \in E(D), \\ \mathbf{f}^+(u) = \mathbf{f}^-(u), & \text{若 } u \in I(D). \end{cases}$$

证明:

(a) 对N 中任何(X,Y) 流$\mathbf{f}$ 均有

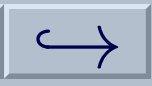
$$\mathbf{f}^+(X) - \mathbf{f}^-(X) = \mathbf{f}^-(Y) - \mathbf{f}^+(Y).$$



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





称上式两边的值为 **f** 的流量.

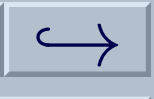
(b) (X,Y) 流的最大流量等于最小 (X,Y) 边割集的容量.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





2 Menger 定理

- 本节介绍图论中著名的 Menger 定理. 我们将用最大流最小割定理来导出它.
- 设 x 和 y 是图 D 中两不同顶点, P_i 和 P_j 是 D 中两条 (x,y) 路, 若 $V(P_i)\cap V(P_j)=\{x,y\}$, 则称 P_i 和 P_j 是 D 中内部点不交的 (internally vertex-disjoint) (x,y) 路; 若 $E(P_i)\cap E(P_j)=\emptyset$, 则称 P_i 和 P_j 是 D 中边不交的 (edge disjoint) (x,y) 路.
- 用 $\zeta_D(x,y)$ 和 $\eta_D(x,y)$ 分别表示 D 中内部点不交和边不交的 (x,y) 路的最大条数, 即

$$\zeta_D(x,y)=\max\{k:\ \text{there are } k \text{ internal vertex-disjoint } (x,y)\text{-paths}\}$$

and

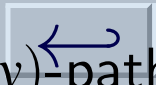
$$\eta_D(x,y)=\max\{k:\ \text{there are } k \text{ edge-disjoint } (x,y)\text{-paths}\}.$$



Title Page
网络流
Menger 定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造







- 4.1 节定义了 D 中 (x,y) (有向)边割集.
- 具有最小边数的 (x,y) (有向)边割集称为最小 (x,y) **边割集** (minimum cut-edge set). 用 $\lambda_D(x,y)$ 表示最小 (x,y) 边割集中的边数, 称为 D 的局部边连通度 (local edge-connectivity).

  $$\lambda_D(x,y) = \min\{|B| : B \text{ is a minimum } (x,y) \text{ edge-cut}\}.$$

- 由定义, 立即有

  $$\eta_D(x,y) \leqslant \lambda_D(x,y). \tag{5}$$

- 事实上, 上式中等号是成立的, 这就是著名的边形式的 Menger 定理.

定理 4.2.1 (Menger 定理 (边形式)) 设 x 和 y 是 D 中不同两顶点, 则

$$\eta_D(x,y) = \lambda_D(x,y).$$



Title Page
网络流
Menger 定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造








证明

- 定义 $\mathbf{c} \in \mathcal{E}(D)$ 如下:

$$\mathbf{c}(a) \equiv 1, \quad \forall\, a \in E(D).$$

考虑整容量网络 $N = (D_{xy}, \mathbf{c})$.

- 由推论 4.1 知, N 中存在最大 (x,y) 整数流 $\mathbf{f}$ 和最小 (x,y) 边割集 $B = E_D^+(S, \overline{S})$ (参见图 3(a), 其中 B 为粗边所示), 使得

$$\mathrm{val}\,\mathbf{f} = \mathrm{cap}\,B. \tag{6}$$

- 由式 (5) 和 (6), 只需证明

$$\eta_D(x,y) \geqslant \mathrm{val}\,\mathbf{f} = \mathrm{cap}\,B \geqslant \lambda_D(x,y) \tag{7}$$

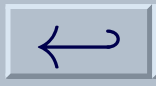
即可.



Title Page
网络流
Menger 定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造







- 由于 $B = E_D^+(S,\overline{S})$ 是 (x,y) 有向边割集, N 是单位容量网络, 所以 $\mathrm{cap}B = |B| \geqslant \lambda_D(x,y)$. 式 (7) 右边不等号得证.
- 令 H 是 $\mathbf{f}$ 的支撑图 $D_{\mathbf{f}}$ (参见图 3 (b)).

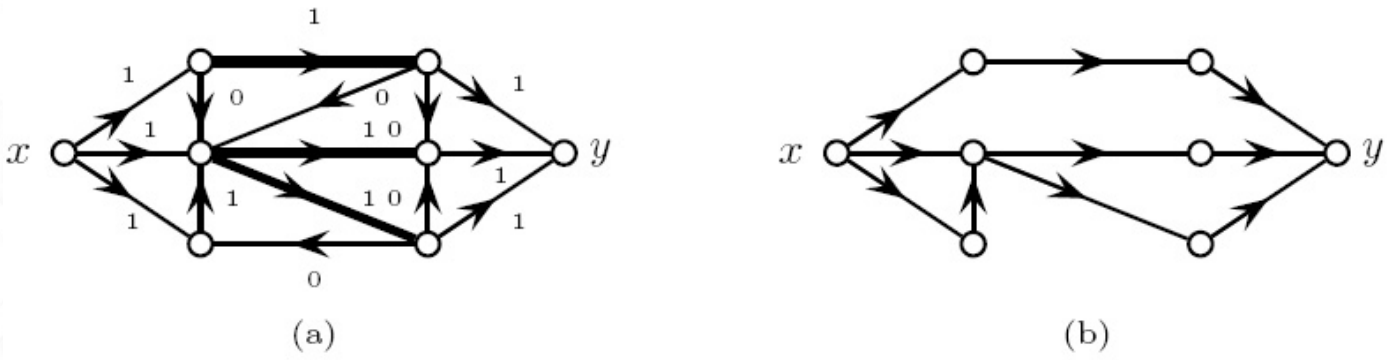


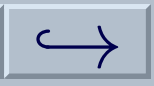
Figure 3: (a) 最大 (x,y) 流 $\mathbf{f}$ 和最小 (x,y) 边割集 B (b) $H = D_{\mathbf{f}}$



Title Page
网络流
Menger 定理
连通度
运输方案的设计-容量 ...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 由于对任何$a \in E(D)$均有$\mathbf{c}(a) = 1$，所以对任何$a \in E(H)$均有$\mathbf{f}(a) = 1$. 因此可得

$$\begin{cases} d_H^+(x) - d_H^-(x) = \mathrm{val}\,\mathbf{f} = d_H^-(y) - d_H^+(y), \\ d_H^+(u) = d_H^-(u), \quad \forall\, u \in V(H) \setminus \{x, y\}. \end{cases}$$

- 断言：H 包含val $\mathbf{f}$ 条边不交(x,y) 路. (习题4.2.3)
即 $\eta_D(x,y) \geq \mathrm{val}\ \mathbf{f}$.

- 定理得证. ∎

推论 4.2.1.1 设x 和y 是无向图G 中任意两顶点，则$\eta_G(x,y) = \lambda_G(x,y)$.

证明

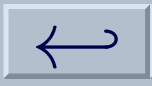
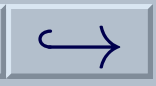
- 考虑G 的对称有向图D (即用端点相同且方向相反的两条有向边替代G 中每条边而得的有向图).



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- G 中 k 条边不交的连接 x 和 y 的路对应 D 中 k 条边不交的 (x,y) （有向）路; 反之亦然.
- 于是

$$\eta_G(x,y) = \eta_D(x,y).$$

- 由Menger定理，$\eta_D(x,y) = \lambda_D(x,y)$.
- 因此，下面只需证$\lambda_D(x,y) = \lambda_G(x,y)$ 即可。
- 显然，

$$E_G(S,\overline{S}) \text{ 是 } G \text{ 的 } \{x,y\} \text{ 边割集}, x \in S,\ y \in \overline{S}$$

$$\Leftrightarrow E_D^+(S,\overline{S}) \text{ 是 } D \text{ 的 } (x,y) \text{ 有向边割集},$$

而且 $|E_G(S,\overline{S})| = |E_D^+(S,\overline{S})|$.

- 一方面, 若 $E_G(S,\overline{S})$ 是 G 的最小 $\{x,y\}$ 边割集, 则

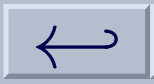
$$\lambda_G(x,y) = |E_G(S,\overline{S})| = |E_D^+(S,\overline{S})| \geqslant \lambda_D(x,y).$$



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造







- 另一方面, 若 $E_D^+(S,\overline{S})$ 是 D 的最小 (x,y) 有向边割集, 则

$$\lambda_D(x,y) = |E_D^+(S,\overline{S})| = |E_G(S,\overline{S})| \geqslant \lambda_G(x,y).$$

- 推论成立. ∎

下述推论给出了 Euler 图与 Menger 定理之间的关系.

推论 4.2.1.2 (L. Lovász, 1973) 有向图 D 是 Euler 图 $\Leftrightarrow$ D 连通, 并且

$$\eta_D(x,y) = \eta_D(y,x),\ \forall\ x,y \in V(D).$$

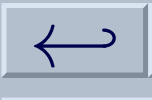
证明 有兴趣同学自学。



Title Page
网络流
Menger 定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造










Laszlo Lovász

Born in 1948, a Hungarian mathematician best known for his work in combinatorics, for which he was awarded the **2021 Abel Prize**.

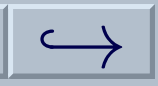
Figure 4: L. Lovász (1948-)



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





Menger定理点形式

- 设D是有向图，x,y是D中不同两顶点. 若存在$S \subseteq V(D) \setminus \{x,y\}$使$D-S$中不存在$(x,y)$路，则称$S$为$D$中$(x,y)$分离集(separating set).

- 具有最小顶点数目的(x,y)分离集称为最小(x,y)分离集. 用$\kappa_D(x,y)$表示D中最小(x,y)分离集中的顶点数目，称为D的局部点连通度(local vertex-connectivity).

$$\kappa_D(x,y) = \min\{|S| : S \text{ is an } (x,y) \text{ separating set}\}$$

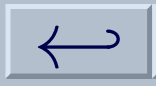
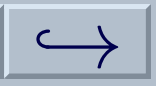
- 图5所示的是有向图D和无向图G中一个(x,y)分离集S. 注意，对于有向图D，S是(x,y)分离集，但不一定是(y,x)分离集；而对无向图G，若S是(x,y)分离集，则S必是(y,x)分离集，故写成xy分离集.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





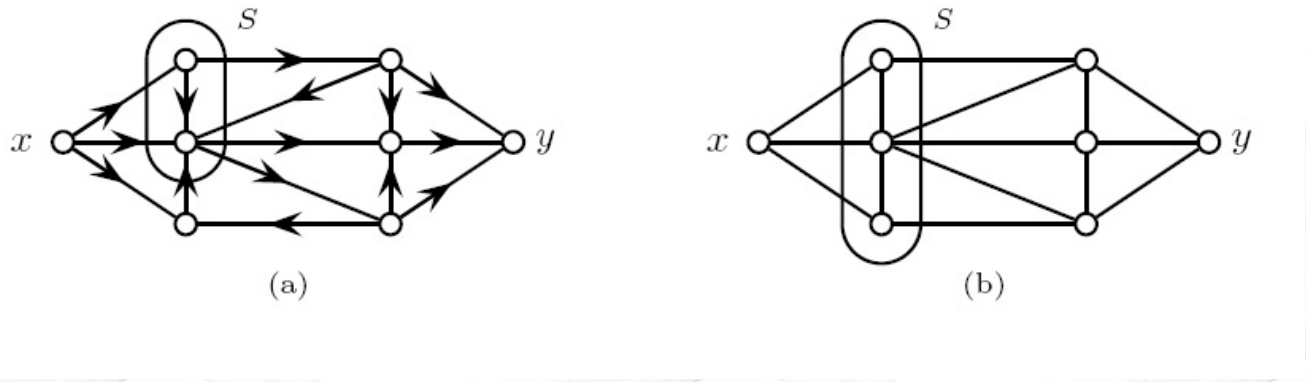


Figure 5: (a) 有向图 D 和 (x,y) 分离集 S (b) 无向图 G 和 (x,y) 分离集 S

- 回顾：$\zeta_D(x,y)$ 表示 D 中内部点不交的 (x,y) 有向路的最大条数. 由定义, 立即有

$$\zeta_D(x,y) \leqslant \kappa_D(x,y) \tag{8}$$

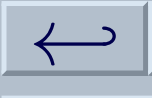
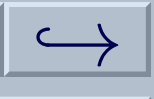
- 事实上, 式(8)中等号是成立的. 这就是著名



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





的 Menger 定理, 将用定理4.2.1来导出它, 其证明要用到顶点分裂运算 (split of a vertex).

- 设 $u \in V(D)$, 分裂 u 为 u' 和 u'' 是指这样的一个运算: 在 D 中用两个新顶点 u' 和 u'' 代替 u, 添加新边 (u', u''), 并把 D 中以 u 为起点的边用以 u'' 为起点的新边来代替, 而把 D 中以 u 为终点的边用以 u' 为终点的新边来代替. 图 6 说明了这种运算.

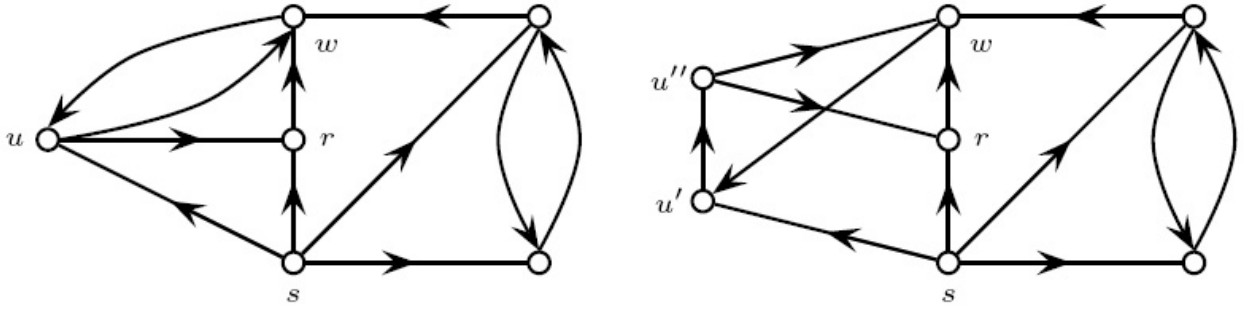


Figure 6: 顶点 u 分裂运算



- Remark: In splitting graph, $d^+(u') = 1$ and $d^-(u'') = 1$.

定理 4.2.2 (Menger 定理, K. Menger, 1927) 设 x 和 y 是 D 中不同两顶点, 且 $E_D(x,y) = \emptyset$, 则

$$\zeta_D(x,y) = \kappa_D(x,y).$$

证明

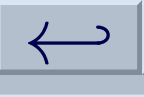
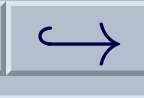
- 令 H 为 D 中分裂每个 $u \in V(D) \setminus \{x,y\}$ 之后得到的图(参见图 7).



Title Page
网络流
Menger 定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





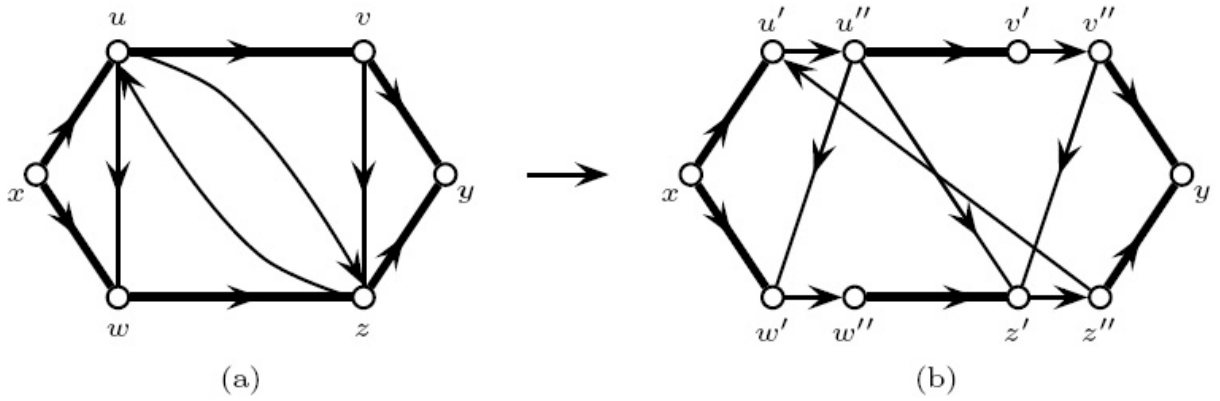


Figure 7: (a) 有向图D (b) D 的分裂图H

- 由边形式Menger定理，$\eta_H(x,y) = \lambda_H(x,y)$. 由式(8), 只需证明

$$\zeta_D(x,y) \geqslant \eta_H(x,y), \quad \lambda_H(x,y) \geqslant \kappa_D(x,y). \qquad (9)$$

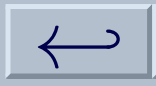
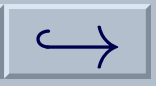
- 注意到H 中两条(x,y)有向路边不交当且仅当它们点不交.
- 由于H 中每条(x,y) 路都对应着收缩所有形



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





如(u',u'')的边之后得到D中一条(x,y)路，故H中$\eta_H(x,y)$条边不交有向路对应D中$\eta_H(x,y)$内部点不交有向(x,y)路(参见图 7 粗边所示的路).

- 所以, $\zeta_D(x,y) \geqslant \eta_H(x,y)$.
- 另一方面, 设B是H中最小(x,y)边割集, 于是$|B| = \lambda_H(x,y)$, 并且$V(H)$存在划分$\{V',V''\}$使$E_H^+(V',V'') = B$且$x \in V', y \in V''$.
- 令B中边的起点集为S,则$|S| \leqslant |B|$, 而且$H-S$中不存在(x,y)路. (We may assume $x \notin S$.)
- 令S'为D中与S对应的顶点集, 则$|S'| \leqslant |S|$, 而且在$D-S'$中不存在(x,y)路. 因此,

$$\kappa_D(x,y) \leqslant |S'| \leqslant |S| \leqslant |B| = \lambda_H(x,y).$$

式(9)得证, 因而定理得证. ∎



推论 4.2.2 设 x 和 y 是 G 中不相邻两顶点, 则

$$\zeta_G(x,y) = \kappa_G(x,y).$$

证明留给读者作为习题 (习题 4.2.1). ∎

在本节中, 我们利用最大流最小截定理导出了 Menger 定理. 然而 Menger 定理的发现是独立的. 为了保留其独立性, 书中给出它的直接证明。研究生必读, 本科生有兴趣的同学自学.

作业

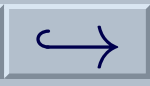
4.2.1 (Menger 定理) 设 G 是无向图, x 和 y 是 G 中不同两顶点. 证明:



Title Page
网络流
Menger 定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





(a) $\eta_G(x,y) = \lambda_G(x,y)$;

(b) 若 x 和 y 在 G 中不相邻, 则 $\zeta_G(x,y) = \kappa_G(x,y)$.

4.2.3 设 x 和 y 是 D 中不同两顶点. 证明: 若 D 连通, D 中异于 x 和 y 的顶点都是平衡点, 且 $d_D^+(x) - d_D^-(x) = k$, 则 D 中有 k 条边不交 (x,y) 路。

4.2.5 设 D 是 k 正则图, $k \geqslant 2$. 证明: 如果 D 中任何两顶点, 都存在 k 条内点不交的路, 那么存在两顶点 x 和 y 使得 k 条内点不交的 (x,y) 路集中, 至少存在一条, 它的长至少是 $d(D)+1$, 其中 $d(D)$ 是 D 的直径.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造







3 连通度

- 4.2 节定义了两个参数 $\kappa_D(x,y)$ 和 $\lambda_D(x,y)$，它们分别称为局部点连通度和局部边连通度. 本节讨论图的**整体连通度** (total connectivity).
- 设 D 是强连通图，非空集 $S \subset V(D)$. 若 $D-S$ 是非强连通的，则称 S 为 D 的分离集 (separating set).
- 显然，若 D 中不含支撑子图 K_n^*，则 D 必有分离集. 这是因为，若 D 中不含支撑子图 K_n^*，则 D 的直径 $d(D) \geqslant 2$. 令 $x,y \in V(D)$ 使 $d_D(x,y) = d(D)$. 于是，$V(D) \setminus \{x,y\}$ 就是 D 的一个分离集.
- 定义

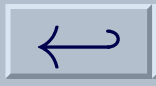
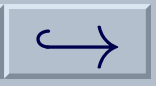
$$\kappa(D) = \begin{cases} 0, \text{ 若 } D \text{ 是非强连通的;} \\ n-1, \text{ 若 } D \text{ 含支撑子图 } K_n^*; \\ \min\{|S| : S \text{ 是 } D \text{ 的分离集}\}, \text{ 其它情形} \end{cases}$$



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





为 D 的强连通度 (strong connectivity).

- 若 $\kappa(D) \geqslant k$, 则称 D 为 k 强连通图.
- 例如, 完全有向图 K_n^* 是强 $(n-1)$ 连通图, 有向圈是强 1 连通图.
- 点数为 $\kappa = \kappa(D)$ 的分离集称为 κ 分离集.
- 不难看出, 当 D 不含 K_n^* 时,

$$\kappa(D) = \min\{\kappa_D(x,y) : \forall\, x,y \in V(D), E_D(x,y) = \emptyset\}.$$

- 回顾: 设 D 是强连通图, 对非空真子集 $S \subset V(D)$, $B = E^+(S,\bar{S})$ 称为有向边割集.
- 定义

$$\lambda(D) = \begin{cases} 0, \text{ 若 } D \text{ 的阶是 1 或者非强连通的;} \\ \min\{|B| : B \text{ 是 } D \text{ 的有向边割集}\}, \text{ 其它情形} \end{cases}$$

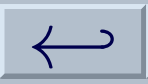
为 D 的强边连通度 (strong edge-connectivity).



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造








- 若 $\lambda(D) \geqslant k$, 则称 D 为 k 强边连通图.
- 例如, 完全有向图 K_n^* 是 $(n-1)$ 强边连通图, 有向圈是 1 强边连通图.
- 边数为 $\lambda = \lambda(D)$ 的边割集称为 λ 边割集.
- 不难看出

$$\lambda(D) = \min\{\lambda_D(x,y) : \forall\, x,y \in V(D)\}.$$

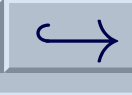
- 类似地可以定义无向图的连通度和边连通度.
- 对于 n 阶完全图 K_n, 有 $\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = n-1$;
- 对于 $n(\geqslant 3)$ 阶圈 C_n, 有 $\kappa(C_n) = \lambda(C_n) = 2$;
- 对于任何其阶 $n \geqslant 2$ 的树 T 均有 $\kappa(T) = \lambda(T) = 1$.
- 设 G 是无向图, D 是 G 的对称有向图. 容易看出:

$$S \text{ 是 } G \text{ 的分离集} \Leftrightarrow S \text{ 是 } D \text{ 的分离集};$$







$B = E_G(S,\overline{S})$ 是 G 的边割集

$\Leftrightarrow E_D^+(S,\overline{S})$ 是 D 的有向边割集.

因此,

$$\kappa(G) = \kappa(D), \qquad \lambda(G) = \lambda(D).$$

- 本节只讨论有向图, 所述有关 κ 和 λ 的结果, 对无向图自然成立, 不再一一赘述.

回顾 $\delta(D) = \min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\}$. 参数 $\kappa(D)$, $\lambda(D)$ 与 $\delta(D)$ 之间有下列关系. 它的无向图形式由 H. Whitney (1932) 首次发现, 故在文献中通常称为**Whitney 不等式**.

定理 4.3.1[Whitney 不等式]

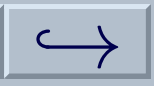
$$\kappa(D) \leqslant \lambda(D) \leqslant \delta(D)$$



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





证明

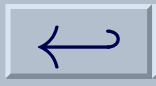
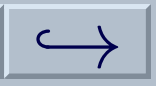
- 若$K_n^* \subseteq D$, 结论显然成立。
- 不妨假设D 是非平凡强连通无环有向图, 并设$x \in V(D)$ 使$d_D^+(x) = \delta(D)$.
- 由于$E_D^+(x)$ 是D 的边割集, 所以$\lambda(D) \leqslant \delta(D)$.
- 下证$\kappa(D) \leqslant \lambda(D)$。
- 若$\lambda(D) \geq n(D) - 1$, 结论显然成立。
- 下设$\lambda(D) < n(D) - 1$.
- 取D 的最小边割集$B = E_D^+(S, \overline{S})$, 即$|B| = \lambda(D)$.
- 令$C \subseteq S$ 为B中边的起点集，则$|C| \leq |B|$.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 若$\exists v \in S$ 使得$E_D^+(v) \cap B = \emptyset$, 则$C$分离$v$ 和$\overline{S}$. 所以$\kappa(D) \leq |C| \leq |B| = \lambda(D)$.
- 若不然，任取$v \in C(=S)$.
- 断言：$|N^+(v)| \leq |B|$.
- 对任一$w \in N^+(v)$。若$(v,w) \in B$，即w 和B中一条边对应；若$(v,w) \notin B$, 则$E^+(w) \cap B \neq \emptyset$, 故也有一条边和$w$对应。显然该映射为单射。断言得证。
- 由$|N^+(v)| \leq |B| < n(D) - 1$ 知，$V - (N^+(v) \cup \{v\}) \neq \emptyset$, 即$N^+(v)$ 分离v及$V - (N^+(v) \cup \{v\})$.
- 所以，$\kappa(D) \leq |N^+(v)| \leq \lambda(D)$. ∎

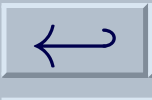
推论 4.3.1.1 对无向图G 有，$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$. ∎



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造








推论 4.3.1.2 对任何简单平面图 G 均有

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant 5.$$

∎

- 图 8 所示的图 G 有 $\kappa(G) = 2, \lambda(G) = 3$ 和 $\delta(G) = 4$.

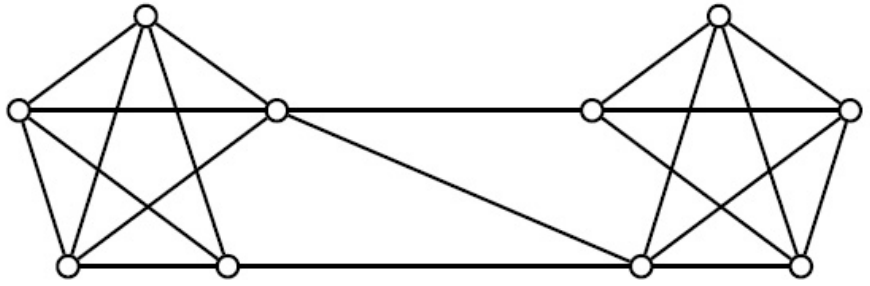


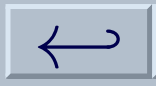
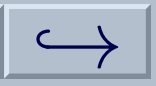
Figure 8: $\kappa(G) = 2, \lambda(G) = 3$ 和 $\delta(G) = 4$



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 事实上, 对任何三个正整数 κ, λ 和 δ $(\kappa \leqslant \lambda \leqslant \delta)$, 均存在无向图 G 使 $\kappa(G) = \kappa, \lambda(G) = \lambda$ 且 $\delta(G) = \delta$ (习题 4.3.17).

- 注意, 考虑 G 的对称有向图 D, 即知也存在满足上述条件的有向图.

- 对于完全图 K_n, 无向圈 C_n $(n \geqslant 3)$ 和树 T, 有

$$\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = \delta(K_n) = n - 1,$$
$$\kappa(C_n) = \lambda(C_n) = \delta(C_n) = 2,$$
$$\kappa(T) = \lambda(T) = \delta(T) = 1.$$

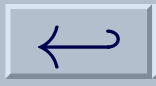
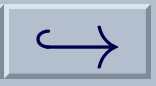
对于一般的无向或有向图, 寻找使 $\kappa = \delta$ 或使 $\lambda = \delta$ 成立的条件是很有意义的. 下面的例子给出一个使 $\lambda = \delta$ 的充分条件 (J. L. Jolivet (1972), 它的无向图形式由 J. Plesnik (1975) 得到).



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





Proposition 3.1 设 D 是强连通简单图, D 的直径 $d(D) \leqslant 2$, 则 $\lambda(D) = \delta(D)$.

证明

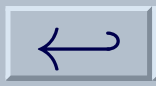
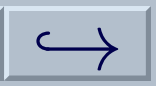
- 若 $d(D) = 0$,则 D 是平凡图. 于是有 $\lambda(D) = 0 = \delta(D)$.
- 若 $d(D) = 1$, 则 $D \cong K_n^*$. 所以有 $\lambda(D) = n - 1 = \delta(D)$.
- 下设 $d(D) = 2$. 由 Whitney 不等式 (定理 4.3.1), 只需证明 $\lambda(D) \geqslant \delta(D)$.
- 令 B 是 D 的边割集使 $|B| = \lambda(D) = \lambda$. 存在 $V(D)$ 的非空真子集 S 使 $B = E_D^+(S, \overline{S})$.
- 设 B 在 S 中起点集为 X, B 在 $\overline{S}$ 中终点集为 Y.
- 断言: $|S \setminus X| \cdot |\overline{S} \setminus Y| = 0$.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 若不然, 取 $x \in S \setminus X, y \in \overline{S} \setminus Y$, 则 $d_D(x,y) > 2$, 矛盾于 $d(D) = 2$.
- 不妨设 $\overline{S} \setminus Y = \emptyset$, 并设 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_b\}$.
- 令

$$s_i = |N_D^-(y_i) \cap X|, i = 1,2,\cdots,b.$$

因为 D 是简单图, 所以

$$\sum_{i=1}^{b} s_i = \lambda(D) \geqslant b \geqslant 1.$$

- 由于 $\delta = \delta(D) = \min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\}$, 所以

$$\delta \leqslant d_D^-(y_i) \leqslant s_i + (b-1).$$

于是

$$b\delta \leqslant \sum_{i=1}^{b} s_i + b(b-1) = \lambda + b(b-1),$$



即 (注意到 $\delta \geqslant \lambda \geqslant b \geqslant 1$)

$$\lambda \geqslant b\delta - b(b-1) = \delta + (\delta - b)(b-1) \geqslant \delta.$$

结论成立. ∎

下面的例子给出图 G 是 k 连通的一个充分条件, 它由 J. A. Bondy (1969) 和 F. T. Boesch (1974) 分别得到的.

Proposition 3.2 设 G 是简单无向图, $V(G) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $d_i = d_G(x_i)$ 且 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$, $n \geqslant 2, 1 \leqslant k \leqslant n-1$. 若存在某个 $i \leq \lfloor \frac{1}{2}(n-k+1) \rfloor$, 由

$$d_i \leqslant k+i-2 \Rightarrow d_{n-k+1} \geqslant n-i,$$

则 $\kappa(G) \geqslant k$.

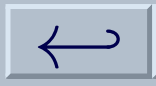
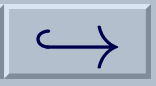
证明 (反证法)



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 设 $\kappa(G) < k$.
- 由于 $1 \leqslant k \leqslant n-1$, 所以 G 中存在分离集 S 使 $\kappa(G) \leqslant |S| = k-1$.
- 令 H 是 $G-S$ 中阶数最小的连通分支, 并且令 H 的阶 $n(H)=i$, 则 $i \leqslant \lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor$, 即 $k \leqslant n-2i+1$.
- 于是对每个 $x \in V(H)$ 有

$$d_G(x) \leqslant n(H)-1+|S| = i+k-2 (\leqslant n-i-1).$$

- 由此可得, $d_i \leq i+k-2$.
- 因为 $i=n(H), i \leqslant \lfloor \frac{1}{2}(n-k+1) \rfloor$ 且 $d_i \leqslant k+i-2$, 所以, 由题设 $d_{n-k+1} \geqslant n-i$.
- 由于对任何 $x_j \in V(G) \setminus (V(H) \cup S)$, 有 $d_j \leqslant n-i-1$, 所以 G 中使 $d_j \geqslant n-i$ 的顶点 x_j 全在 S 中.



- 又因为

$$d_n \geqslant d_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant d_{n-k+1} \geqslant n-i,$$

所以

$$|S| \geqslant n-(n-k+1)+1 = k.$$

和$|S| = k-1$矛盾.

- 所以, $\kappa(G) \geqslant k$. ∎

注: 只要把G 换成D, 并令$d_i = \min\{d_D^+(x_i), d_D^-(x_i)\}$, 上例中条件即为$k$ 强连通的充分条件, 其证明只需作稍微修改.

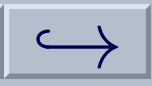
下列定理给出图是k 强连通或k 强边连通的充分必要条件. 它的无向图形式首先是由H. Whitney (1932) 给出的, 故有时称它为Whitney k **连通判别准则**.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





定理 4.3.2 (H. Whitney, 1932) 设 $k \geqslant 1$, 并且设 D 是 $n(\geqslant k+1)$ 阶有向图, 则

(i) $\kappa(D) \geqslant k \Leftrightarrow \zeta_D(x,y) \geqslant k$, $\forall\ x,y \in V(D)$ (即任意两点之间存在至少k条内点不交的有向路);

(ii) $\lambda(D) \geqslant k \Leftrightarrow \eta_D(x,y) \geqslant k$, $\forall\ x,y \in V(D)$ (即任意两点之间存在至少k条边不交的有向路).

证明 (i) 当 $k=1$ 时, 由强连通图和 ζ_D 的定义立即知结论成立. 下设 $k \geqslant 2$.

($\Rightarrow$)

- 设 x 和 y 是 k 强连通图 D 中不同两顶点.
- 若 $E_D^+(x,y) = \emptyset$, 则由Menger定理(4.3)知,

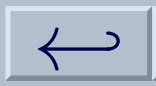
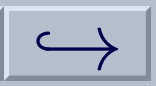
$$k \leqslant \kappa(D) \leqslant \kappa_D(x,y) = \zeta_D(x,y).$$



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 下设 $E_D^+(x,y) \neq \emptyset$, 并令 $\mu = |E_D^+(x,y)|$. 若 $\mu \geqslant k$, 则

$$\zeta_D(x,y) \geqslant |E_D^+(x,y)| = \mu \geqslant k.$$

- 下设 $\mu < k$, 并设 $D' = D - E_D(x,y)$. 在这种情形下只需证明 $\zeta_{D'}(x,y) \geqslant k - \mu$.
- (反证) 假设 $\zeta_{D'}(x,y) < k - \mu$.
- 因而由 Menger 定理 (4.3) 知, 在 D' 中存在 (x,y) 分离集 $S \subseteq V \setminus \{x,y\}$, 使 $|S| = \zeta_{D'}(x,y) \leqslant k - \mu - 1$.
- 于是,

$$|V| - |S| \geqslant k + 1 - (k - \mu - 1) = \mu + 2,$$

即存在 $z \in (V \setminus \{x,y\}) \setminus S$.

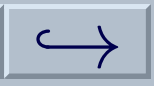
- 断言: $\zeta_{D'-S}(x,z) \geqslant 1$; 同理, $\zeta_{D'-S}(z,y) \geqslant 1$.
- 若 $E_{D'}(x,z) \neq \emptyset$, 则 $\zeta_{D'-S}(x,z) \geqslant 1$.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 若 $E_{D'}(x,z)=\emptyset$, 则由 Menger 定理 (4.3) 知,

$$\zeta_D(x,z)=\kappa_D(x,z)\geq k.$$

因而 $\zeta_{D'}(x,z)\geqslant k-\mu$.

- 由于 $|S|\leqslant k-\mu-1$, 所以仍有 $\zeta_{D'-S}(x,z)\geqslant 1$.
- 同样可以证明 $\zeta_{D'-S}(z,y)\geqslant 1$. 因此有, $\zeta_{D'-S}(x,y)\geqslant 1$, 矛盾于 S 是 D' 中 (x,y) 分离集的假设.
- 故当 $E_D(x,y)\neq\emptyset$ 时, 仍有 $\zeta_D(x,y)\geqslant k$.

$(\Leftarrow)$

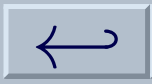
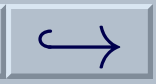
- 因为 $k\geqslant 1$, 由假定知 D 是强连通的.
- 假设 D 含支撑子图 K_n^*, 则 $\kappa(D)=n-1\geqslant k$.
- 假设 D 不含 K_n^*, 并设 S 是 D 的 κ 分离集.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 于是 $D-S$ 不是强连通的, 因而存在 $x,y\in V(D)$ 使 $D-S$ 中不存在 (x,y) 的有向路, 即 S 是 D 中 (x,y) 分离集. 于是 $|S|\geqslant \kappa_D(x,y)$.
- 由假定 $\zeta_D(x,y)\geqslant k$, 所以由 Menger 定理 (4.3) 有,

$$\kappa(D)=|S|\geqslant \kappa_D(x,y)=\zeta_D(x,y)\geqslant k.$$

- (ii) 的证明留给读者 (见习题 4.3.1). ∎

推论 4.3.2 设 D 是强连通有向图, 则

$$\text{(i) } \kappa(D)\geqslant k\Rightarrow \begin{cases} \kappa(D-x)\geqslant k-1, & \forall\, x\in V(D),\\ \kappa(D-a)\geqslant k-1, & \forall\, a\in E(D); \end{cases}$$

$$\text{(ii) } \lambda(D)\geqslant k\Rightarrow \lambda(D-a)\geqslant k-1,\ \ \forall\, a\in E(D).$$ ∎

作业



4.3.5 (a) 证明: 若 G 是简单图且 $\delta \geqslant \lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$.

(b)举例说明: 存在简单图 G 使 $\delta(G) = \lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor - 1$, 并且 $\lambda(G) < \delta(G)$.

4.3.10 设 G 是 3 连通图, $|V(G)| \geqslant 5$. 证明: 存在 $e \in E(G)$ 使 $\kappa(G \cdot e) \geqslant 3$. (W. T. Tutte, 1961)

4.3.11 设 $\kappa(D) \geqslant k$, $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 是 D 中任意 $k+1$ 个顶点. 证明: D 中有 k 条内部点不交的 (x_0, x_i) 路和 k 条内部点不交的 (x_i, x_0) 路, $i = 1, 2, \cdots, k$ (这样的路集称为 **扇** (fan)).



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造








4 运输方案的设计-容量网络最大流算法

- 商品从产地运到销地必经之途构成一个交通系统. 假若此交通系统各段运输容量给定. 试设计一个运输方案, 由此方案将商品从产地运到销地有最大的输送量. 如果再想提高输送量, 需要增加那些路段的运输容量.

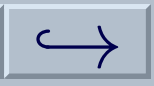
- 若将此交通系统看作是一个容量网络$N = (D_{x,y}, \mathbf{c})$, 其中$D$是由这个交通系统构成的简单连通图, 发点$x$和收点$y$分别看作商品的产地和销地, 容量函数$\mathbf{c} \in \mathcal{E}(D)$看成是运输容量. 于是上述问题归结为在$N$中求一个最大$(x,y)$流和最小容量的$(x,y)$边割集. 本节将介绍解这个问题的有效算法.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 设 $\mathbf{f} \in \mathcal{E}(D)$ 是 $N = (D_{xy}, \mathbf{c})$ 中的 (x,y) 流, u 是 D 中顶点, $u \neq x$. 并设 P 是 D 中连接 x 和 u 的路 (不一定是有向路).

- 给定 P 从 x 到 u 的方向为正向, 用 P^+ 和 P^- 分别表示 $E(P)$ 中与 P 的正向和反向一致的边集. 令

$$\sigma(a) = \begin{cases} \mathbf{c}(a) - \mathbf{f}(a), & \text{若 } a \in P^+, \\ \mathbf{f}(a), & \text{若 } a \in P^-. \end{cases}$$

并令

$$\sigma_P(u) = \min\{\sigma(a) : a \in E(P)\}.$$

- 若 $\sigma_P(u) = 0$, 则称 P 是 **f** 饱和路 (saturated path).

- 若 $\sigma_P(u) > 0$, 则称 P 是 **f** 非饱和路 (unsaturated path).

- **f** 非饱和的 (x,y) 路 P 称为 **f** 增广路 (incrementing path).



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造













- 之所以称为增广路, 是因为流$\mathbf{f}$的流量沿此路是可以增加的. 事实上, 由

$$\tilde{\mathbf{f}}(a)=\begin{cases}\mathbf{f}(a)+\sigma_P(y), & \text{若 } a\in P^+,\\ \mathbf{f}(a)-\sigma_P(y), & \text{若 } a\in P^-,\\ \mathbf{f}(a), & \text{其它}\end{cases}\tag{10}$$

所定义的$\tilde{\mathbf{f}}\in\mathcal{E}(D)$是$N$中的$(x,y)$流并且$\operatorname{val}\tilde{\mathbf{f}}=\operatorname{val}\mathbf{f}+\sigma_P(y)$(习题4.4.1). 流$\tilde{\mathbf{f}}$称为基于$\mathbf{f}$增广路$P$的修正流(revised flow).

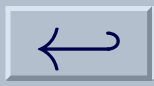
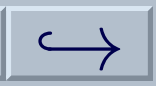
例 4.4.1 考察图 9(a)所示的网络$N=(D_{xy},\mathbf{c})$, 边上的有序数对分别是流$\mathbf{f}$和容量$\mathbf{c}$的值, $\operatorname{val}\mathbf{f}=6$. $P=x(s,x)s(w,s)w(w,y)y$是D中连接x和y的路(图中粗边所示). 给定P的正向从x到y. P是$\mathbf{f}$非饱和的xy路, 也是$\mathbf{f}$增广路. 按(10)所定义的修正流$\tilde{\mathbf{f}}$如图 9(b)所示, $\operatorname{val}\tilde{\mathbf{f}}=\operatorname{val}\mathbf{f}+2=8$.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





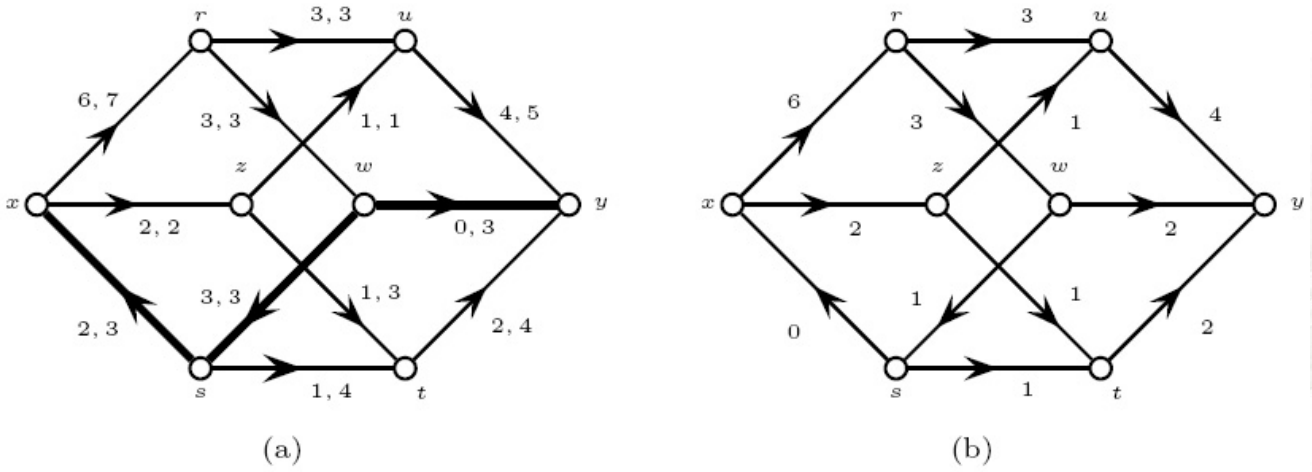


Figure 9: (a) $N=(D_{xy},\mathbf{c})$ 及流 $\mathbf{f}$ (b) 修正流 $\tilde{\mathbf{f}}$

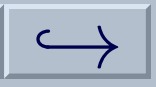
定理 4.4.1 (L. R. Jr. Ford & D. R. Fulkerson, 1957) $N=(D_{xy},\mathbf{c})$ 中的 (x,y) 流 $\mathbf{f}$ 是最大的 $\Leftrightarrow$ N 中不含 $\mathbf{f}$ 增广路.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





证明

$(\Rightarrow)$ 由增广路定义及性质立得。

$(\Leftarrow)$

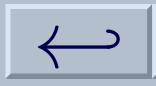
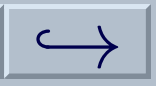
- 设N 中不含$\mathbf{f}$ 增广路.
- 令 $S=\{u\in V(D)$: N 中存在$\mathbf{f}$ 非饱和的xu 路$\}$. 则$x\in S$, $y\notin S$.
- 因此, $B=E^{+}(S,\overline{S})$ 是D 的(x,y) 有向边割集.
- 断言：对任意$a\in E_D^{+}(S,\overline{S})$，有$\mathbf{f}(a)=\mathbf{c}(a)$；对任意$a\in E_D^{-}(S,\overline{S})$，有$\mathbf{f}(a)=0$.
- 事实上，任取$a\in E_D^{+}(S,\overline{S})$, 并令$a=(u,w)$. 则$u\in S$, $w\in\overline{S}$. 由于$u\in S$, 所以存在$\mathbf{f}$ 非饱和的xu 路Q.
- 若$\mathbf{f}(a)<\mathbf{c}(a)$, 则$Q+a$ 是N 中$\mathbf{f}$ 非饱和的xw 路, 即 $w\in S$. 这矛盾于$w\notin S$. 所以, $\mathbf{f}(a)=\mathbf{c}(a)$.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 同样可以证明: 若 $a \in E^-(S,\overline{S})$, 则 $\mathbf{f}(a) = 0$. 于是, $\mathrm{val}\,\mathbf{f} = \mathrm{cap}\,B$. (这里用到 $Val\,\mathbf{f} = E^+(S) - E^-(S)$.)
- 设 B^* 是 N 中容量最小的 (x,y) 有向边割集, $\mathbf{f}^*$ 是 N 中最大 (x,y) 流. 则由最大流最小割定理(4.1)知,

$$\mathrm{val}\,\mathbf{f} \leqslant \mathrm{val}\,\mathbf{f}^* = \mathrm{cap}\,B^* \leqslant \mathrm{cap}\,B = \mathrm{val}\mathbf{f}.$$

- 由此知 $\mathbf{f}$ 是 N 最大 (x,y) 流, 而 B 是最小容量的 (x,y) 边割集. ∎

定理4.4.1提供了求整容量网络中最大流最小割的有效算法. 这个算法称为标号法(labelling method). 它是由Ford 和Fulkerson (1957) 首先提出, 然后由J. Edmonds 和R. M. Karp (1972)稍加修正的.

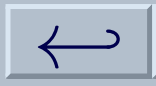
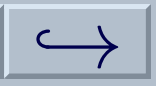
标号法的基本思想是从 N 中任何一个已知 (x,y) 流 $\mathbf{f}$ (例如零流) 开始, 递归地构作出一个其流量不断增加的流



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





序列, 并且终止于最大流. 在每个新的流$\mathbf{f}$作出之后, 如果存在$\mathbf{f}$增广路P, 则作出基于P的修正流$\tilde{\mathbf{f}}$, 然后将$\tilde{\mathbf{f}}$作为初始流重新执行算法. 如果不存在$\mathbf{f}$增广路, 则算法停止. 由定理4.4.1知$\mathbf{f}$是最大流.

标号法:

1. 任取N中一个(x,y)流$\mathbf{f}$(例如零流), 并给x以标号$(-,\infty)$, 并令$L=\{x\}$.

2. 删去L中最前面元素u(“先进先出”原则, 保证第4步的(x,y)增广路是D中最短路).

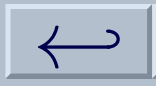
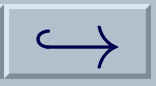
   (1) 若存在未被标号顶点z, 使得
   (i) $a=(u,z)\in E(D)$, 并且$\mathbf{f}(a)<\mathbf{c}(a)$, 则给$z$以标号$(u^+,\sigma(z))$; 或
   (ii) $a=(z,u)\in E(D)$, 并且$\mathbf{f}(a)>0$, 则给z以



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





标号 $(u^-, \sigma(z))$
其中 $\sigma(z) = \sigma_P(z)$，P 为 D 中 $\mathbf{f}$ 非饱和的 xz 路，将 z 列入 L 的后面.

(2) 若不存在这样的 z 使得(i),(ii)成立且 $L = \emptyset$，则停止. $\mathbf{f}$ 是最大流.

3. 若 y 被标号，则进入第 4 步；若 y 未被标号，则转入第 2 步.

4. 已被标号的顶点构成 D 中一条 $\mathbf{f}$ 增广路 P.

   构造基于流 $\mathbf{f}$ 的增广路 P 的修正流 $\tilde{\mathbf{f}}$. 除掉所有标号并以 $\tilde{\mathbf{f}}$ 替代 $\mathbf{f}$ 转入第 1 步.

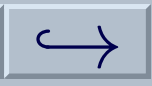
定理 4.4.2 设 N 是整容量网络，并设 $\mathbf{f}$ 和 S 分别是标号法终止时得到的 (x,y) 流和已标号的顶点集，则 $\mathbf{f}$ 是最大 (x,y) 流，$E_D^+(S,\overline{S})$ 是最小容量的 (x,y) 边割集.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





证明

- 由算法的第2步中(2)知, 算法停止时N 中不存在$\mathbf{f}$ 增广路. 于是由定理4.4.1 知$\mathbf{f}$ 是最大(x,y) 流, 而$E_D^+(S,\overline{S})$ 是最小容量的(x,y) 边割集, 其中S 为已被标号的顶点集.

- 因为N为整容量网络, 每次当完成算法中的第4步时,就构造出其流量比$\mathbf{f}$ 至少大1的流$\tilde{\mathbf{f}}$. 由于对N 中任何(x,y) 流$\tilde{\mathbf{f}}$, 均有

$$\mathrm{val}\,\tilde{\mathbf{f}} \leqslant \mathrm{cap}\,(E_D^+(x)),$$

其中$E_D^+(x)$ 表示D 中以x 为起点的边集; 所以第4步最多重复 $\mathrm{cap}\,(E_D^+(x))$ 次, 该算法可以在有限步内结束. ∎

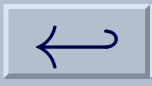
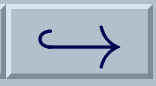
一些注记:



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- "标号法"算法中“先标号先删去”的原则是必须的，该原则保证了增广路是D中最短xy路，从而保证了该算法的有效性.

  注：Ford-Fulkerson算法复杂度为$O((Val_{max}f)|E|)$，Edmonds-Karp算法复杂度为$O(|V||E|^2)$.

- 考虑图 10 所示的容量网络$N=(D_{xy},\mathbf{c})$. 显然N 中存在一个流量为$2m$ 的(x,y) 流$\mathbf{f}$. 若从零流开始，交错地选取(x,x_1,x_2,x_5,x_6,y) 和(x,x_4,x_5,x_2,x_3,y)作为增广路，每次修正流增加单位流量，需要进行$2m+1$ 次标号过程. 因为m 是任意的，所以执行标号算法所需要的计算次数不能以$n(D)$和$e(D)$的多项式函数为其上界. 换言之，它不是一个有效算法.

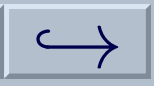
- 值得指出的是，对无理数容量网络，Ford & Fulkerson 给出了一个例子，说明标号法不能在有限步



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





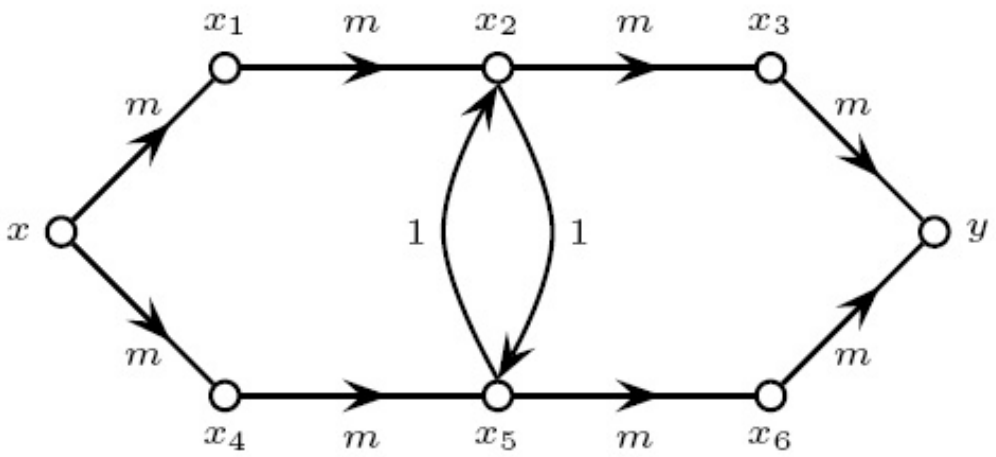


Figure 10: 标号法的应用

内停止, 并且计算过程中得到的流序列也不收敛于最大流.

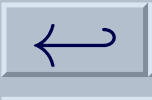
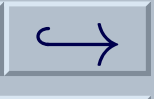
- 当 $\mathbf{c} \equiv 1$ 时, 标号法求出的最大流 $\mathbf{f}$ 满足 $\lambda_D(x,y) = \mathrm{val}\,\mathbf{f}$. 换言之, 标号法为求图的强边连通度提供了一个有效算法.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





作业

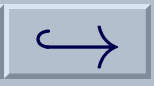
4.4.3 利用标号法求图 10 所示的容量网络中的最大 (x,y) 流.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





5 最优运输方案的设计-最小费用最大流算法*

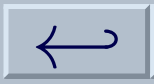
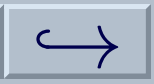
- 在4.4节中，利用标号法设计运输方案时，我们考虑的仅仅是流量，而没有考虑到费用(或者说仅考虑在各路段中单位输送量的费用都相等).
- 在实际问题中，费用的因素很重要. 由于在各路段中运输设备的不同，所以单位输送量的费用不尽相等.
- 这就要求我们设计一个输送量最大且总的运输费用最小的运输方案. 这样的运输方案称为最优运输方案.
- 用一个被称为费用容量网络 $N=(D_{xy},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 表示该交通系统，其中 $\mathbf{b}\in\mathcal{E}(D)$ 表示单位流量**费用函数**，$\mathbf{c}\in\mathcal{E}(D)$ 是**容量函数**.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 图 11(a)所示的是一个费用容量网络$N=(D_{xy},\mathbf{b},\mathbf{c})$，其中边$a$上的有序数对分别表示费用函数$\mathbf{b}$和容量函数$\mathbf{c}$在边$a$上的值$\mathbf{b}(a)$和$\mathbf{c}(a)$.

- 设$\mathbf{f}$是N中(x,y)流，则

$$\mathbf{b}(\mathbf{f})=\sum_{a\in E(G)}\mathbf{f}(a)\mathbf{b}(a)$$

定义为$\mathbf{f}$的费用(cost).

- 若对N中其流量等于$\mathrm{val}\,\mathbf{f}$的任何一个(x,y)流$\mathbf{f}'$均有

$$\mathbf{b}(\mathbf{f})\leqslant\mathbf{b}(\mathbf{f}'),$$

则称$\mathbf{f}$为最小费用流.

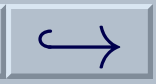
- 用网络的语言，最优运输方案的设计就是在费用容量网络$N=(D_{xy},\mathbf{b},\mathbf{c})$中求最大$(x,y)$流$\mathbf{f}$且



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造





使费用$\mathbf{b}(\mathbf{f})$ 最小. 这样的流称为最小费用最大流 (minimum cost maximum flow).

- 设$N=(D_{xy},\mathbf{b},\mathbf{c})$ 为费用容量网络, $\mathbf{f}$ 是N 中(x,y)流. C 是D 中有指定正向的圈. 令

$$\sigma_{\mathbf{f}}(a)=\begin{cases}\mathbf{c}(a)-\mathbf{f}(a), & \text{若 } a\in C^{+};\\ \mathbf{f}(a), & \text{若 } a\in C^{-},\end{cases}$$
$$\sigma_{\mathbf{f}}(C)=\min\{\sigma_{\mathbf{f}}(a):a\in E(C)\}.$$

- 若D 中的圈C 存在定向使$\sigma_{\mathbf{f}}(C)>0$, 则称C 为$\mathbf{f}$ 增广圈 (increment cycle).

- 对于$\mathbf{f}$ 增广圈C 和任意 $\sigma(0<\sigma\leqslant\sigma_{\mathbf{f}})$, 我们可以定义

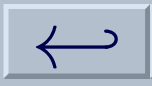
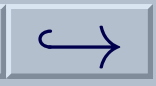
$$\widetilde{\mathbf{f}}_{\sigma}(a)=\begin{cases}\mathbf{f}(a)+\sigma, & \text{若 } a\in C^{+};\\ \mathbf{f}(a)-\sigma, & \text{若 } a\in C^{-};\\ \mathbf{f}(a), & \text{其它}.\end{cases}\qquad(11)$$



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 容易验证, $\tilde{\mathbf{f}}_\sigma$ 是N 中 (x,y) 流, 而且 $\mathrm{val}\,\tilde{\mathbf{f}} = \mathrm{val}\,\mathbf{f}$ (习题 4.5.1).
- $\tilde{\mathbf{f}}_\sigma$ 称为基于$\mathbf{f}$ 增广圈C 关于σ 的修正流 (revised flow).
- 我们希望$\mathbf{b}(\tilde{\mathbf{f}}) < \mathbf{b}(\mathbf{f})$.
- 但是一般地, 我们没有$\mathbf{b}(\tilde{\mathbf{f}}) < \mathbf{b}(\mathbf{f})$.
- 设C 是$\mathbf{f}$ 增广圈, 则定义增广圈C 的费用为

$$\mathbf{b}(C,\mathbf{f}) = \sum_{a\in C^+} \mathbf{b}(a) - \sum_{a\in C^-} \mathbf{b}(a).$$

- $$\mathbf{b}(\tilde{\mathbf{f}}) - \mathbf{b}(\mathbf{f}) = \sigma_{\mathbf{f}}(C)\mathbf{b}(C,\mathbf{f}).$$
- 因此, 当$\mathbf{b}(C,\mathbf{f}) < 0$时, 一定有$\mathbf{b}(\tilde{\mathbf{f}}) < \mathbf{b}(\mathbf{f})$.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造








例 4.5.1 考察图 11(a)所示的网络$N=(D_{xy},\mathbf{b},\mathbf{c})$. 在例4.4.2中, 已求出最大$(x,y)$ 流$\mathbf{f}$ 如图 11(b)所示. 圈$C=s\ (w,s)\ w\ (w,y)\ y\ (t,y)\ t\ (s,t)\ s$ 是$\mathbf{f}$ 增广圈, 正向与顺时针方向一致. 按式(11)定义的修正流$\tilde{\mathbf{f}}$ 如图 11(c)所示, $\mathrm{val}\,\mathbf{f}=8=\mathrm{val}\,\tilde{\mathbf{f}}$. 通过计算有$\mathbf{b}(\mathbf{f})=62$, 而$\mathbf{b}(\tilde{\mathbf{f}})=56$. ∎

为寻找其费用为负的$\mathbf{f}$ 增广圈, 我们可以通过作辅助图$D(\mathbf{f})$ 来实现这一点.

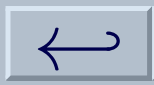
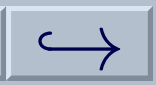
- 设$a\in E(D)$, 用$\overleftarrow{a}$ 表示改变a 的方向后而得到的新边.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造





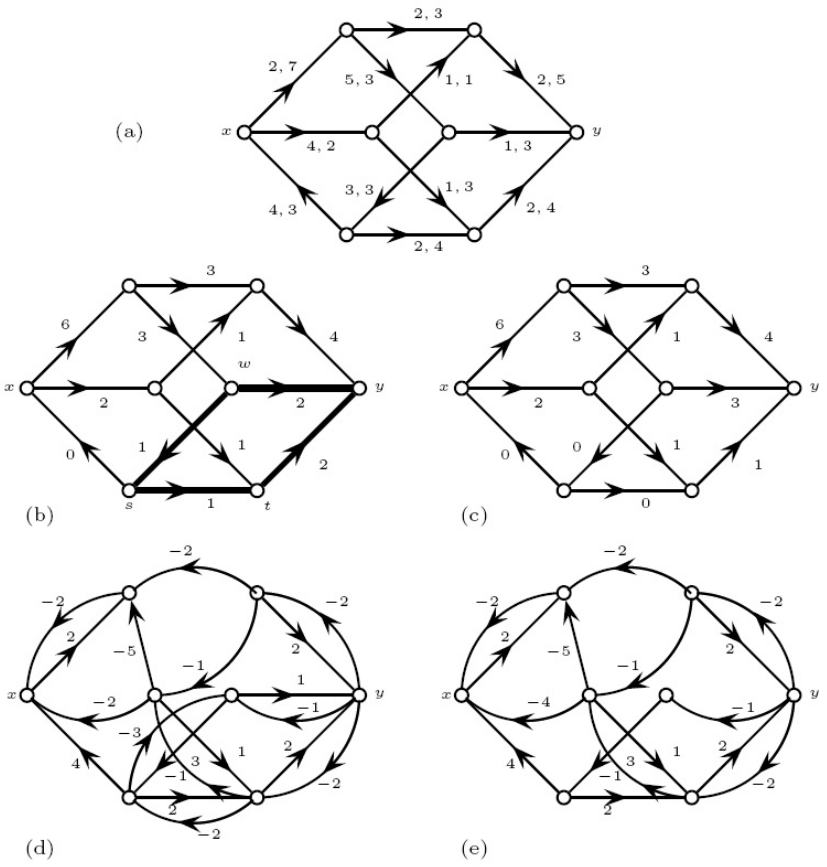


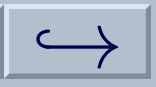
Figure 11: Klein 算法的应用



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 定义加权图$(D(\mathbf{f}),\mathbf{w})$ 如下: $V(D(\mathbf{f}))=V(D)$.
  设$a\in E(D)$.

  ⋆ 若$\mathbf{f}(a)=0$, 则$a\in E(D(\mathbf{f}))$ 且$\mathbf{w}(a)=\mathbf{b}(a)$;

  ⋆ 若$\mathbf{f}(a)=\mathbf{c}(a)$, 则$\overleftarrow{a}\in E(D(\mathbf{f}))$, 且$\mathbf{w}(\overleftarrow{a})=-\mathbf{b}(a)$;

  ⋆ 若$0<\mathbf{f}(a)<\mathbf{c}(a)$, 则$a,\overleftarrow{a}\in E(D(\mathbf{f})),\mathbf{w}(a)=\mathbf{b}(a)$ 且$\mathbf{w}(\overleftarrow{a})=-\mathbf{b}(a)$.

- 例如, 参见图 11, (d) 中所示的图就是 (b) 中所示的(x,y) 流$\mathbf{f}$ 的$D(\mathbf{f})$, 其中曲有向边表示$\overleftarrow{a}$.

- 设C 是D 中$\mathbf{f}$ 增广圈, 则对任何$a\in E(C^+)$, 均有$\mathbf{f}(a)<c(a)$, 因而, $a\in E(D(\mathbf{f}))$; 对任何$a\in E(C^-)$, 均有 $0<\mathbf{f}(a)$, 因而, $\overleftarrow{a}\in E(D(\mathbf{f}))$. 所以用$\overleftarrow{a}$代替$a$, 得到$D(\mathbf{f})$中和$C$对应的有向圈，记为$\overleftarrow{C}$。

- 设$\overleftarrow{C}$ 是$D(\mathbf{f})$ 中对应于C 的有向圈使得$C^+\subseteq E(\overleftarrow{C})$.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造








- 断言：C 是$\mathbf{f}$ 增广圈当且仅当$\overleftarrow{C}$ 是$D(\mathbf{f})$中有向圈，且

$$\mathbf{b}(C,\mathbf{f})=\mathbf{w}(\overleftarrow{C}).$$

- 令$\overleftarrow{C}^+=C^+,\overleftarrow{C}^-=E(\overleftarrow{C})\setminus\overleftarrow{C}^+$，则$C$ 的费用

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(C,\mathbf{f}) &= \sum_{a\in C^+}\mathbf{b}(a)-\sum_{a\in C^-}\mathbf{b}(a)\\ &= \sum_{a\in\overleftarrow{C}^+}\mathbf{w}(a)-\sum_{\overleftarrow{a}\in\overleftarrow{C}^-}(-\mathbf{w}(\overleftarrow{a}))\\ &= \sum_{a\in E(\overleftarrow{C})}\mathbf{w}(a)=\mathbf{w}(\overleftarrow{C}).\end{aligned}$$

- 反之，设$\overleftarrow{C}$ 是$D(\mathbf{f})$ 中有向圈，令

$$\overleftarrow{C}^+=\{a\in E(\overleftarrow{C}):\ \mathbf{w}(a)>0\},\quad \overleftarrow{C}^-=E(\overleftarrow{C})\setminus\overleftarrow{C}^+$$



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造







全　屏

搜　索

关　闭

则 $\overleftarrow{C}^+ \subset E(D)$ 且 $\overleftarrow{C}^-$ 中边全为 $\overleftarrow{a}$.

- 令

$$C^+ = \overleftarrow{C}^+, \quad C^- = \{a \in E(D) : \overleftarrow{a} \in \overleftarrow{C}^-\}.$$

容易验证, $C^+ \cup C^-$ 构成 D 中圈, 并且

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\overleftarrow{C}) &= \sum_{a \in E(\overleftarrow{C})} \mathbf{w}(a) = \sum_{a \in \overleftarrow{C}^+} \mathbf{w}(a) + \sum_{\overleftarrow{a} \in \overleftarrow{C}^-} \mathbf{w}(\overleftarrow{a}) \\ &= \sum_{a \in C^+} \mathbf{b}(a) - \sum_{a \in C^-} \mathbf{b}(a) \\ &= \mathbf{b}(C, \mathbf{f}). \end{aligned}$$

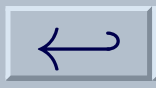
- 于是, 寻找 D 中其费用 < 0 的 $\mathbf{f}$ 增广圈就等价于在 $D(\mathbf{f})$ 中寻找负权和的有向圈. 此有向圈称为负圈.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造







全 屏

搜 索

关 闭

定理 4.5.1 [最小费用流判定定理] $N=(D_{xy},b,c)$ 中 (x,y) 流 $\mathbf{f}$ 是最小费用流 $\Leftrightarrow$ 每条 $\mathbf{f}$ 增广圈 C 都有 $b(C,\mathbf{f})\geqslant 0$ $\Leftrightarrow D(\mathbf{f})$ 中不含负圈.

证明 $(\Rightarrow)$ 设 $\mathbf{f}$ 是最小费用流, C是 $\mathbf{f}$ 增广圈, 并设 $\tilde{\mathbf{f}}$ 为基于 $\mathbf{f}$ 增广圈 C 的修正流. 由于 $\mathrm{val}\,\tilde{\mathbf{f}}=\mathrm{val}\,\mathbf{f}$, 所以

$$0\leqslant \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{f}})-\mathbf{b}(\mathbf{f})=\sigma(C)\left(\sum_{a\in C^+}\mathbf{b}(a)-\sum_{a\in C^-}\mathbf{b}(a)\right)=\sigma(C)\mathbf{b}(C,\mathbf{f})$$

由于 $\sigma(C)>0$, 所以从上式推出 $\mathbf{b}(C,\mathbf{f})\geqslant 0$.

$(\Leftarrow)$

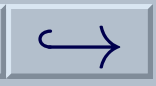
- 设 $\mathbf{f}$ 是 N 中 (x,y) 流, 并且对于 N 中每条 $\mathbf{f}$ 增广圈 C 都有 $\mathbf{b}(C,\mathbf{f})\geqslant 0$.
- 欲证 $\mathbf{f}$ 具有最小费用, 只需证明 N 中其流量等于 $\mathrm{val}\,\mathbf{f}$ 的任何最小费用 (x,y) 流 $\mathbf{f}^*$ 都有 $\mathbf{b}(\mathbf{f}^*)\geqslant\mathbf{b}(\mathbf{f})$.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 定义$\mathbf{h} \in \mathcal{E}(D(\mathbf{f}))$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{h}(a) = \mathbf{f}^*(a) - \mathbf{f}(a) & \text{if } \mathbf{f}^*(a) > \mathbf{f}(a) \\ \mathbf{h}(\overleftarrow{a}) = \mathbf{f}(a) - \mathbf{f}^*(a) & \text{if } \mathbf{f}^*(a) < \mathbf{f}(a) \\ \mathbf{h}(a) = \mathbf{h}(\overleftarrow{a}) = 0 & \text{otherwise} \end{array}$$

- 则易验证$\mathbf{h}$ 是$D(\mathbf{f})$ 的非负圈向量，即$\mathbf{h} \in C(D(\mathbf{f}))$.
- 可以证明：若$\mathbf{f}$ 是有向图D 的非负圈向量，则

$$\mathbf{f} = \sum_{C \in C} \lambda(C)\chi^C,$$

其中$\lambda(C) \geq 0$, $C(D)$ 为D 中有向圈集，χ^C 是有向圈C的关联向量，即$\chi^C(a) = \begin{cases} 1 & \text{若} a \in C \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}$

- 所以存在$\lambda : C(D(\mathbf{f})) \to R^+$, 使得

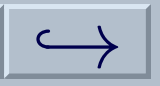
$$\mathbf{h} = \sum_{\overleftarrow{C} \in C(D(\mathbf{f}))} \lambda(\overleftarrow{C})\chi^{\overleftarrow{C}}.$$



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 即

$$\mathbf{f}^* - \mathbf{f} = \sum_{C \in \mathcal{C}(D)} \lambda(C)\chi^C,$$

其中C为$\overleftarrow{C}$在D中对应增广圈，$\lambda(C) = \lambda(\overleftarrow{C}) \geq 0$，$\chi^C(a) = \begin{cases} 1 & \text{若} a \in C^+ \\ -1 & \text{若} a \in C^- \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}$

- 于是，由$\mathbf{b}(C) = \mathbf{b}(C,\mathbf{f}) = \mathbf{b}(C,\mathbf{f}^*)$得

$$\mathbf{b}(\mathbf{f}^*) - \mathbf{b}(\mathbf{f}) = \sum_{C \in \mathcal{C}(D)} \lambda(C)\mathbf{b}(C) \geq 0,$$

充分性得证.

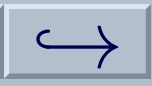
- 定理得证. ∎



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造





定理4.5.1提供了解最小费用最大流问题的一个算法. 这个算法是Klein (1967) 提出的. 算法的基本想法是: 从N 中任何一个(x,y) 最大流$\mathbf{f}$ 出发, 检查每个$\mathbf{f}$ 增广圈. 若所有$\mathbf{f}$ 增广圈的费用都是非负的, 则$\mathbf{f}$ 就是所求的最小费用最大流. 若存在$\mathbf{f}$ 增广圈C 使得$\mathbf{b}(C,\mathbf{f})<0$, 则用修正流$\tilde{\mathbf{f}}$ 替代$\mathbf{f}$ 再重复上述过程.

由此可以看出, 从一个最大流$\mathbf{f}$ 过渡到另一个最大流$\tilde{\mathbf{f}}$ 的关键是寻找其费用为负的$\mathbf{f}$ 增广圈, 我们可以通过在辅助图$D(\mathbf{f})$ 中寻找负圈来实现这一点.

T. Yamada & H. Kinoshita (2002) 提出一个求加权有向图中所有负圈的有效算法. 现在概述Klein 算法如下.

Klein 算法:

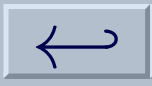
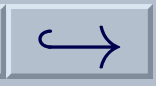
1. 求N 中的最大(x,y) 流$\mathbf{f}$;



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造





2. 构造 $D(\mathbf{f})$;

3. 求 $D(\mathbf{f})$ 中的负圈.

- 若无负圈, 则停止, 此时 $\mathbf{f}$ 是最小费用最大流.
- 若 $D(\mathbf{f})$ 含负圈 $\overleftarrow{C}$, 则 $C^+ \cup C^-$ 是 $\mathbf{f}$ 增广圈 (其正向与 $\overleftarrow{C}$ 的方向一致), 作修正流 $\tilde{\mathbf{f}}$, 并用 $\tilde{\mathbf{f}}$ 代替 $\mathbf{f}$ 转入第 1 步.

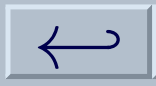
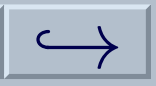
例 4.5.2 考察图 11 (a) 所示的网络, 其中边 a 上的有序数对分别是 $\mathbf{b}(a)$ 和 $\mathbf{c}(a)$. 例 4.4.2 已求得最大流 $\mathbf{f}$ 如图 11 (b) 所示. 由 Klein 算法构作的 $D(\mathbf{f})$ 如图 11 (d) 所示, 粗弧表示的是负圈, 对应的 $\mathbf{f}$ 增广圈如图 11 (b) 中粗边所示. 基于这个 $\mathbf{f}$ 增广圈的修正流 $\tilde{\mathbf{f}}$ 如图 11 (c) 所示. 再执行 Klein 算法构作 $D(\tilde{\mathbf{f}})$ 如图 11 (e) 所示, $D(\tilde{\mathbf{f}})$ 中无负圈, 所以 $\tilde{\mathbf{f}}$ 是最小费用最大流. 事实上, $\mathbf{b}(\mathbf{f}) = 62 > 56 = \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{f}})$. ∎



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造





作业*

补充1 证明：若$\mathbf{f}$是有向图D的非负圈向量，则

$$\mathbf{f}=\sum_{C\in\mathcal{C}}\lambda(C)\chi^C,$$

其中$\lambda(C)\geq 0$, $\mathcal{C}(D)$为D中有向圈集，χ^C是有向圈C的关联向量，即$\chi^C(a)=\begin{cases}1 & \text{若}a\in C\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$

4.5.3 设$\mathbf{f}$是(x,y)流，P是所有$\mathbf{f}$增广路中费用$\mathbf{b}(P,\mathbf{f})$最小的一条，$\tilde{\mathbf{f}}$是基于P的修正流. (R. G. Busacker & P. J. Gowen, 1961)

(a) 证明：若$\mathbf{f}$是最小费用流，则$\tilde{\mathbf{f}}$也是最小费用流.

(b) 证明：求D中最小费用$\mathbf{f}$增广路 $\Leftrightarrow$ 求$D(\mathbf{f})$中最短xy路.

(c) 利用(a)和(b)设计求最小费用最大流的算法.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设...
中国投递员问题
方化矩形的构造

6 中国投递员问题

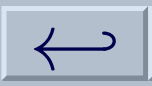
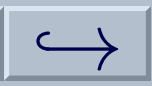
- 一个投递员每次投递邮件都要走遍他所负责投递区域内的每条街道. 完成投递任务后回到邮局. 他应怎样选择路线使他所走的总路程最短?
- 它是由我国管梅谷教授 (1960) 首先提出并进行研究的. 故国际上称这个问题为中国投递员问题 (Chinese Postman Problem).
- 我们把投递员所负责投递区域看作一个连通的加权有向图 $(D, \mathbf{w})$, 其中 D 的顶点视为街道的交叉口, 街道(单向)视为边, 权视为街道的长(当然是正数). 经过 $(D, \mathbf{w})$ 中每条边至少一次的有向闭链称为邮路 (post tour). 具有最小权的邮路称为最优邮路 (optimal post tour).
- 解中国投递员问题就是在连通的正加权图 $(D, \mathbf{w})$ 中找出一条最优邮路.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 在现实生活中，有许多问题,比如城市里的洒水车、扫雪车、垃圾清扫车和参观展览馆等最佳行走路线问题都可以归结为中国投递员问题.
- 由于中国投递员问题的广泛应用，引起了人们极大的研究兴趣，提出了许多好的解决方法. 本节将介绍解中国投递员问题的有效算法. 它由 Edmonds 和 Johnson (1973) 首先提出来的.

欧拉图情形

首先考虑最简单的情形，即 D 是 Euler 图的情形. 若 D 是 Euler 图，则由于任何 Euler 有向回都是一条通过 D 的每条边正好一次的邮路，因而就是最优邮路.

设 D 是 Euler 图。

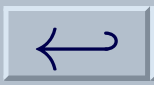
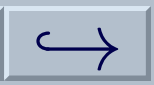
Edmonds-Johnson 算法 （求 Euler 有向回的算法）：



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





1. 任取$x_0 \in V(D)$, 求出根在x_0 的外向支撑树T, 并令$P_0 = x_0$.

2. 设有向迹$P_i = x_i a_i x_{i-1} \cdots a_2 x_1 a_1 x_0$ 已确定. 取$a_{i+1} \in E(D) \setminus \{a_1, a_2, \cdots, a_i\}$ 使

(i) $a_{i+1} = (x_{i+1}, x_i)$;

(ii) $a_{i+1} \notin E(T)$ 除非没有别的边可供选择.

3. 若第 2 步不能再执行时, 则停止.

定理 4.6.1 上述算法终止时构造出的有向迹是D 中的一条 Euler 有向回.

证明

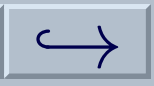
- 设$P_n = x_n a_n x_{n-1} a_{n-1} \cdots a_2 x_1 a_1 x_0$ 是上述算法终止时构造出来的有向迹. 显然, $d^+_{P_n}(x_i) = d^-_{P_n}(x_i)$, $i \neq 0, n$.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 因为 D 是 Euler 图, 所以由定理 1.6知 D 是平衡图.
- 断言: $x_n = x_0$, 即 P_n 是有向闭迹.
- 若不然, 则 $d^+_{P_n}(x_n) - d^-_{P_n}(x_n) = 1$, 即存在 $(z, x_n) \in E(D)$, 算法第二步可以继续执行, 矛盾。
- 若 P_n 不是 Euler 有向回, 则存在 $b_1 \in E(D)$ 且 $b_1 \notin E(P_n)$.
- 设 $b_1 = (x_i, x_j)$. 由算法的第 2 步 (ii), 不妨设 $b_1 \in E(T)$.
- 由于 $d^+_D(x_i) = d^-_D(x_i)$, 且 $d^+_{P_n}(x_i) = d^-_{P_n}(x_i)$, 所以必存在 $b_2 \in E(D)$ 且 $b_2 \notin E(P_n)$ 使 $b_2 = (x_k, x_i)$.
- 由算法第 2 步 (ii), 不妨设 $b_2 \in E(T)$.

  同样理由可知, 存在 $b_3 \in E(D)$ 且 $b_3 \notin E(P_n)$ 使 $b_3 = (x_\ell, x_k)$, $b_3 \in E(T)$.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造








- 于是得到一系列边 $b_1, b_2, b_3 \cdots$, 它们沿着 T 上的从 x_0 到 x_j 的有向路一直退到 $x_0 = x_n$.
- 由于 $d_D^+(x_n) = d_D^-(x_n)$ 且 $d_{P_n}^+(x_n) = d_{P_n}^-(x_n)$, 所以存在 $a' \in E_D^-(x_n)$ 使 $a' \notin E(P_n)$.
- 这矛盾于算法第 3 步. 因此 P_n 是 Euler 有向回. ∎

非欧拉图情形

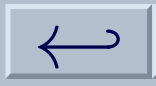
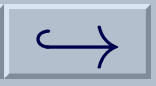
下面讨论图 D 不含 Euler 有向回的情形. 先解决此情形下邮路存在性问题. (回顾: 邮路是通过D中所有边集的有向闭链) 如图 12 所示的图 D 中不存在邮路. 这是因为 D 中不存在从 $\{y_1, y_2, y_3\}$ 到 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的有向路, 即 D 不是强连通的.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





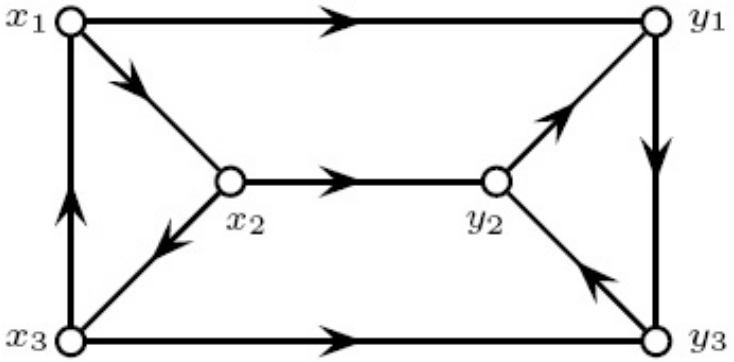


Figure 12: 不存在邮路的有向图

定理 4.6.2 图 D 有邮路 $\Leftrightarrow$ D 强连通.

证明 ($\Rightarrow$) 由邮路的定义立即知 D 是强连通的.

($\Leftarrow$)

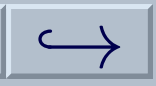
- 设 D 是强连通图, 所以 D 中必含有向圈.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 取D中有向闭链C使其含D的边尽可能地多.
- 若C不是邮路, 则必存在$a \in E(D)$使得$a \notin E(C)$.
- 设$a = (x,y)$. 取$u \in V(C)$.
- 由于D是强连通的, 所以D中存在(u,x)路P和(y,u)路Q.
- 于是, $C' = C \oplus (P+a) \oplus Q$为$D$中有向闭链, 且$C'$含$D$的边比$C$含$D$的边至少多一条(例如$a$).
- 矛盾于C的选取. 所以C是D的邮路. ∎

- 设$(D,\mathbf{w})$是非平衡的强连通加权图, 并设P是D的邮路. 因此某些边在P中重复出现.
- 用$p(a)$表示$a \in E(D)$在P中出现的次数.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造








- 对任何$a \in E(D)$, 用D^* 表示将$p(a)$ 条与a 有相同方向的边替代D 中的边a 而得到的图. 则D^* 是D 的母图而且是平衡的.

- 因此D 中邮路将对应着母图D^* 中的Euler有向回.

- 于是, 中国投递员问题可以重叙如下: 给定强连通加权图$(D, \mathbf{w})$, $\mathbf{w} > 0$.

  (i)构造D 的平衡母图D^* 使添加的边集 E^* 有最小权.

  (ii)求D^* 中的Euler有向回.

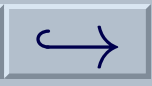
Edmonds-Johnson 算法已提供了求解(ii)的有效算法. 下面讨论求解(i)的算法, 它也是由Edmonds和Johnson (1973)提出的.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 对每一$x \in V(D)$, 令$\rho(x) = d_D^-(x) - d_D^+(x)$, 并令

  $X = \{x \in V(D) : \rho(x) > 0\}, \quad Y = \{y \in V(D) : \rho(y) < 0\}.$

- 由于D是非平衡图, 所以由定理1.6知, $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$, 并且

$$\sum_{x \in X} \rho(x) = -\sum_{y \in Y} \rho(y).$$

  记上式两边的值为$\rho(D)$.

- 例如, 对于图 13 (a) 中所示的加权有向图$(D, \mathbf{w})$有,

  $\rho(x_1) = -1, \rho(x_2) = 0, \rho(x_3) = 2, \rho(x_4) = 1, \rho(x_5) = -2.$

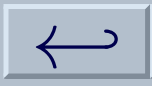
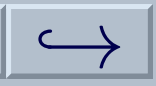
  于是, $X = \{x_3, x_4\}, Y = \{x_1, x_5\}$, 且$\rho(D) = 3$.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





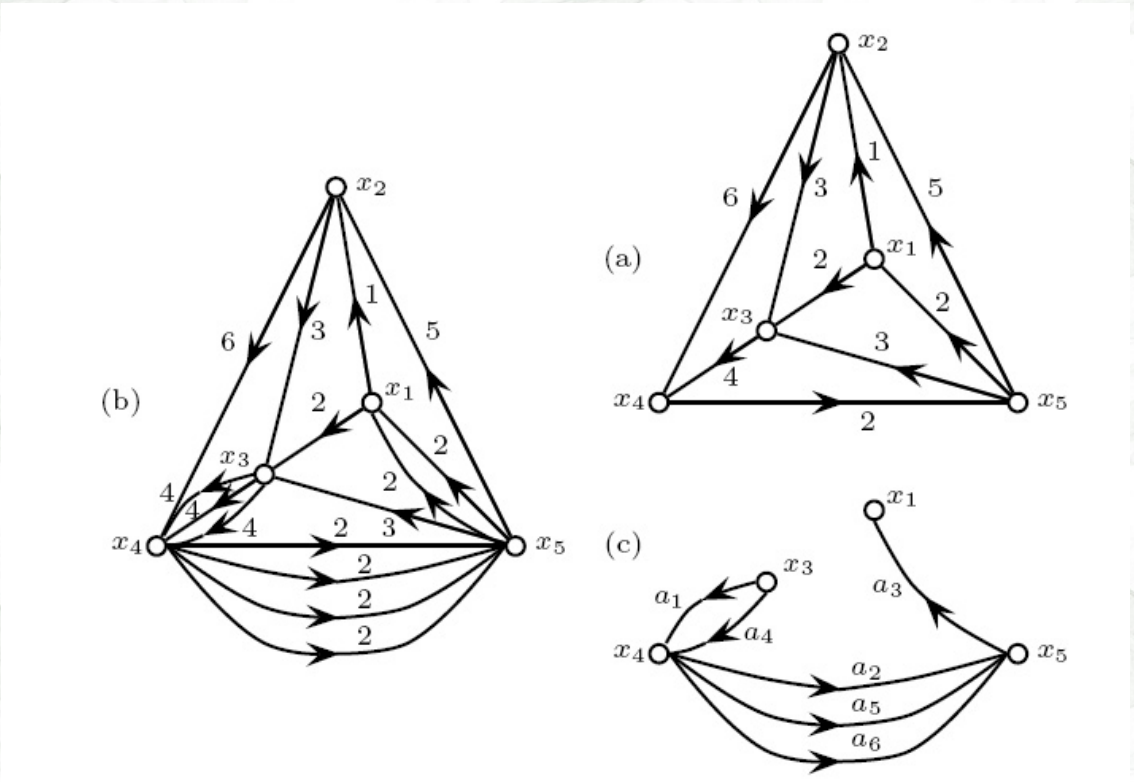


Figure 13: (a) 加权图 $(D, \mathbf{w})$; (b) $(D^*, \mathbf{w}^*)$; (c) $H = G^*[E^*]$

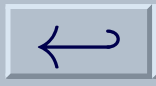
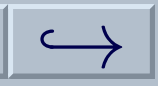
- 假定满足 (i) 中要求的母图 D^* 及 E^* 已选定.
- 例如, 见图 13, (b) 中图即为 (a) 中图 D 的母图 D^*,



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





其中 E^* 中边由曲有向边表示.

- 令 $H = D^*[E^*]$. 则 H 是 $\rho(D)$ 条边不交的起点在 X 中而终点在 Y 中有向路之并（怎么证？）.
- 例如, 图 13(b) 中由曲有向边集 E^* 导出子图 H (如图 13(c) 所示) 中有 $\rho(D) = 3$ 条边不交有向路:

  $P_1 = x_3a_1x_4a_2x_5a_3x_1$, $P_2 = x_3a_4x_4a_5x_5$, $P_3 = x_4a_6x_5$.

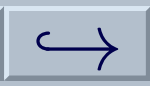
- 反之, 任何 $\rho(D)$ 条起点在 X 中而终点在 Y 中且权最小的有向路的边集 E^* (其中若边 a 是 m 条有向路的公共边, 则计算 m 次) 都是 (i) 的解 (因为此时 D^* 为平衡图).
- 于是, (i) 的解归结为在 D 中选取 $\rho = \rho(D)$ 条起点在 X 而终点在 Y 的有向路 $P_1, P_2, \cdots, P_\rho$ 使权和 $\mathbf{w}(P_1) + \mathbf{w}(P_2) + \cdots + \mathbf{w}(P_\rho)$ 最小.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 为此, 我们构作费用容量网络 $N=(D'_{x_0y_0},\mathbf{b},\mathbf{c})$, 其中 D' 为在 D 上添加两个新顶点 x_0 和 y_0, 然后用容量为 $\rho(x)$, 费用为 0 的起点在 x_0 的边连接 x_0 到 X 中每个顶点 x; 用容量为 $-\rho(y)$, 费用为 0 的终点为 y_0 的边连接 Y 中每个顶点 y 到 y_0.

- 当 $a\in E(D)$ 时, $\mathbf{b}(a)=\mathbf{w}(a),\mathbf{c}(a)=\infty$. 图 14 (a) 所示是 D' 和 $N=(D'_{x_0y_0},\mathbf{b},\mathbf{c})$, 其中 D 是图 13 (a) 中图.

- 于是 N 中每个单位 (x_0,y_0) 流 $\mathbf{f}_0$ 都可以视为 D 的一条 (x,y) 路 P_0, 其中 $x\in X$, $y\in Y$. $\mathbf{f}_0$ 的费用 $\mathbf{b}(\mathbf{f}_0)=\mathbf{w}(P_0)$.

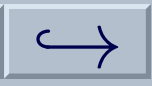
- 由于 $E^+_{D'}(x_0)$ 和 $E^-_{D'}(y_0)$ 都是 D' 的 (x_0,y_0) 边割集且容量均为 $\rho(D)$, 任何其它 (x_0,y_0) 边割集都有容量 ∞. 于是 $E^+_{D'}(x_0)$ 和 $E^-_{D'}(y_0)$ 都是 N 中具有最小容量的 (x_0,y_0) 边割集.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





- 由最大流最小割定理(4.1)知, N 中最大 (x_0, y_0) 流 $\mathbf{f}$ 的流量 $\mathrm{val}\,\mathbf{f} = \rho(D)$. 因此, 求解(i)的问题归结为求 N 中最小费用最大流问题. 而求后者已有 Klein 算法(见4.5节).

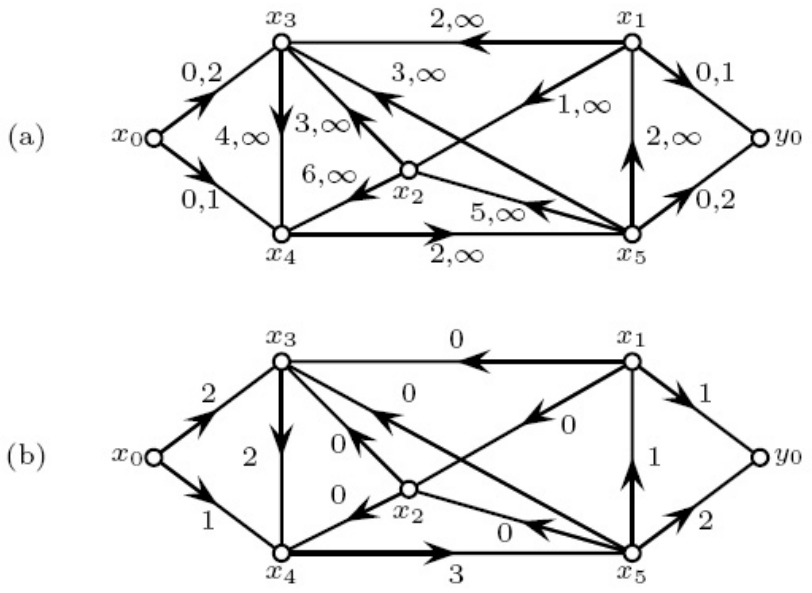


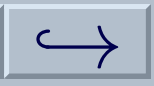
Figure 14: (a) 费用容量网络 $N = (N'_{x_0 y_0}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ (b) N 中最小费用最大流



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





归纳上述过程, 我们叙述如下:

Edmonds-Johnson 算法:

1. 构造 D' 和 $N=(D'_{x_0y_0},\mathbf{b},\mathbf{c})$;
2. 求 N 中最小费用最大流;
3. 构造 D^*;
4. 求 D^* 中 Euler 有向回, 即 $(D,\mathbf{w})$ 最优邮路.

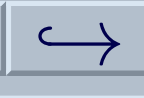
例 4.6.2 考虑图 13 (a) 中所示的强连通加权图 $(D,\mathbf{w})$. 由 Edmonds-Johnson 算法, 先构作 D' 和 $N=(D'_{x_0y_0},\mathbf{b},\mathbf{c})$. 如图 14 (a)中所示, 边 a 上的数值分别是费用 $\mathbf{b}(a)$ 和容



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





量 $\mathbf{c}(a)$. 利用 Klein 算法 (当然, 这里通过观察就可以) 求出最小费用最大流 $\mathbf{f}$ 如图 14 (b) 中所示, 其中 $\mathbf{f}(a)$ 表示边 a 在 E^* 中出现的次数. D^* (即图 13 (b) 中所示的图) 和最优邮路

$$P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_2, x_4, x_5, x_3, x_4, x_5, x_1, x_3, x_4, x_5, x_1)$$

如图 13 (b) 所示, 而且 $\mathbf{w}(P) = 44$. ∎

作业

4.6.3 设 G 是 Euler 图. 求 G 中 Euler 回有下列有效的**Fleury 算法**

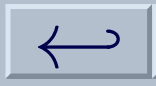
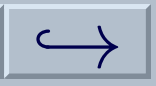
1. 令 $P_0 = x_0$;
2. 假设 $P_i = x_0 e_1 x_1 \cdots x_{i-1} e_i x_i$ 已确定. 取 $e_{i+1} \in E(G) \setminus \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 使得
   (i) $e_{i+1} = x_i x_{i+1}$;



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





(ii) 除非无别的边选择，e_{i+1} 不是 $G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 的割边.

3. 当第 2 步不能再执行时，停止.

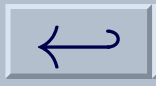
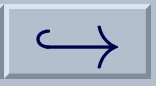
(a) 证明: 若 G 是 Euler 图，则由 Fleury 算法构造出的迹 P 是 G 中 Euler 回.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





7 方化矩形的构造

- **方化矩形** (squared rectangle) 是指可以剖分成有限个 (至少两个) 正方形的矩形.
- 若剖分出的任意两个正方形的大小均不相等, 则称这个方化矩形是**完美的** (perfect).
- 剖分出来的正方形的数目称为这个方化矩形的**阶** (order).
- 若剖分出的正方形中包含一个较小的方化正方形, 则称这个方化矩形为**复合的**, 反之称为**简单的**.
- 显然每个方化矩形均由若干个简单方化矩形所组成.

阶数	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
数目	2	6	22	67	213	744	2609	9016	31427	110384



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造








- 方化矩形问题是个典型的组合数学问题, 自上世纪30年代起, 它引起了人们的兴趣. 到了40年代, R. L. Brooks和W. T. Tutte等人(1940)利用图论把完美矩形的构造发展成系统化的方法, 首先给出9-11阶完美矩形的明细表, 并证明了完美矩形的最低阶是9. 后来C. J. Bouwkamp等人(1964)用电子计算机列出了9-18阶的所有完美矩形. 各阶完美矩形的数目见下表所示.

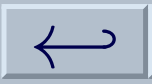
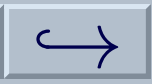
- 在很长一段时间内, 人们不知道有完美正方形. R. Sprague(1939)通过把已求出的完美矩形中的某些拼起来, 从而第一次发现了一个边长为4205的55阶完美正方形. R. L. Brooks等人(1940)也利用这个方法得到一个边长为608的26阶完美正方形. 1967年, J. C. Wilson利用电子计算机找出一个边长为112的25阶完美正方形. 直到1978年,



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





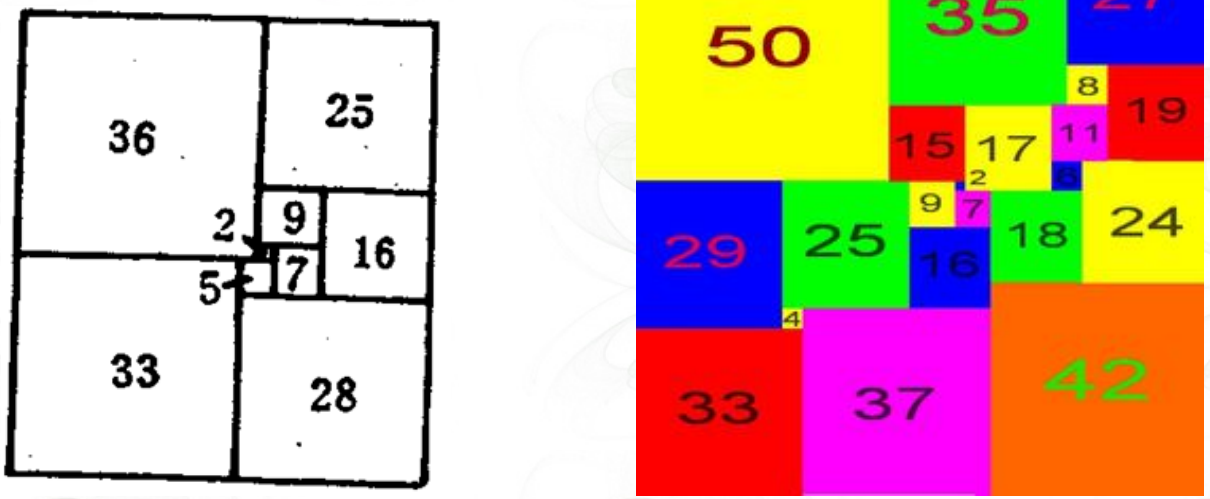


Figure 15: 完美正方形

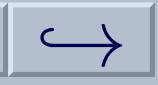
A. J. W. Duijvestijn 用电子计算机找到一个边长为 112 的 21 阶的完美正方形 (见图 15). 它是唯一的 21 阶完美正方形而且是最低阶的完美正方形. 到目前为止, 几个较低阶的完美正方形的数目如下表中所示.



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





阶数	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
数目	1	?	?	?	8	28	6	?	?	?	4

从这个表可以看出, 已经找出的完美正方形还很少. 表中的“?”表明, 目前还没有发现这个阶的完美正方形.

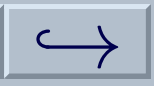
- 方化矩形问题是个典型的组合数学问题, 象Ramsey问题一样是一个有意思但非常困难的问题。留给有兴趣同学自学。



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





谢谢大家!



Title Page
网络流
Menger定理
连通度
运输方案的设计-容量...
最优运输方案的设计-...
中国投递员问题
方化矩形的构造





