Exercise 1. Let G be Eulerian. The following is the efficient **Fleury algorithm** for finding an Eulerian circuit in G.

1. Set $P_0 = x_0$;
2. Suppose $P_i = x_0e_1x_1\cdots x_{i-1}e_ix_i$ has been determined. Choose $e_{i+1} \in E(G) \setminus \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ such that
   (i) $e_{i+1} = x_ix_{i+1}$;
   (ii) unless no other edge is available, e_{i+1} is not a bridge of $G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$.
3. When step 2 can no longer be carried out, stop.

(a) Prove that if G is Eulerian, the trail P constructed by Fleury's algorithm is an Eulerian circuit in G.

pf: 记 $P_i = x_0e_1x_1\cdots e_ix_i$,

$G_i = G - \{e_1, \cdots, e_i\}$.

下证在第 i 步，可以从 x_i 出发，恰好走每条剩余边一次，并回到 x_0.

对 i 作归纳。

① 当 $i=0$ 时，由 G 为欧拉图，故存在从 x_0 出发并回到 x_0 的欧拉回.

② 假设对 i 成立，下证对 $i+1$ 成立.

由归纳假设，取一条从 x_i 到 x_0 的剩余欧拉迹 Q.

1. 若 x_i 处剩一条剩余边，则算法为 Q 都会选这条，走过它之后沿 Q 的剩余部分走完可回到 x_0.

2. 若 x_i 处剩多条边，则 Q 的第一条边一定为非桥。否则，一旦离开 x_i，就无法回 x_i 走 x_i 的剩余边。设算法选中 $e = x_ix_{i+1}$，删去 e 后，所有剩余边仍与 x_{i+1} 在同一个连通分支中。因为原图中每个点都为偶度点，故余图 G_{i+1} 中，若 $x_{i+1} \neq x_0$，则只有 x_{i+1}、x_0 为奇度点；若 $x_{i+1} = x_0$，则 G_{i+1} 无奇度点. 由欧拉迹判定定理，则一定存在从 x_{i+1} 到 x_0 的迹，且恰好走过剩余边一次。

根据上面分析，只要还有剩余边，算法就仍会继续，直到用完所有边.

故 P 一定为 G 的欧拉回路. 口.