Exercise 1. (a) Prove that if G is a simple graph with $\delta \geq \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor$, then $\lambda(G) = \delta(G)$.

(b) Give an example of a simple graph G with $\delta(G) = \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor - 1$ and $\lambda(G) < \delta(G)$.

(a)

pf: 任取不相邻两顶点 $x, y \in V(G)$.

记 $n = |V(G)|$

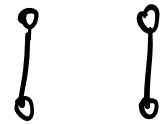
$$\begin{aligned} |N_G(x) \cap N_G(y)| &= |N_G(x)| + |N_G(y)| - |N_G(x) \cup N_G(y)| \\ &\geq \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor + \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor - (n-2) \\ &\geq (n-1) - (n-2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

故 $d(G) \leq 2$ 且 G 连通.

故 $\lambda(G) = \delta(G)$. □.

(b)

取 $G = K_2 \cup K_2$. 其中 $\cup$ 为图的不交并.



G

易验证 $\delta(G) = 1$, $\lambda(G) = 0$ 满足条件.

Exercise 2. Let G be a 3-connected graph with $|V(G)| \geq 5$. Prove that there exists $e \in E(G)$ such that $\kappa(G \cdot e) \geq 3$.
(W. T. Tutte, 1961)

pf: 反设收缩 G 的任意一条边都破坏 3 连通性.

记收缩边 xy 后的新顶点为 r, 由于 $G \cdot xy$ 有至少 4 个顶点, 且至多 2 连通, 故 $G \cdot xy$ 有一个大小至多 2 的分离集 S'.

若 $r \notin S'$, 则可以取 S' 为 G 的分离集. 与 G 3 连通矛盾.

故 $r \in S'$.

若 $S'=\{r\}$，则可以取 $\{x,y\}$ 为 G 的分离集，与 G 2-连通矛盾.
故 $|S'|=2$.

故 $G\cdot xy$ 的分离集形如 $\{r,z\}$，$z\neq x,y$.
故 $\{x,y,z\}$ 为 G 的分离集，$\forall xy\in E(G)$，$z(\neq x,y)\in V(G)$.
z 在 $G-\{x,y,z\}$ 的每个连通分支上都有邻点.
事实上，任取3点分离集 S，S 中每个顶点都在 $G-S$ 的每个分支有邻点. 否则若 $\exists s\in S$，s 在某分支无邻点，则 $G-(S\setminus\{s\})$ 不连通，与3-连通矛盾.
记 $\mathcal{C}=\{C: S=\{x,y,z\}, xy\in E(G)$，$S$ 为 G 3点分离集，C 为 $G-S$ 的一个连通分支$\}$.
$\tilde{C}$ 为 $\mathcal{C}$ 中顶点数最小的那个分支.
取 v 为 z 在 $\tilde{C}$ 中的一个邻点.
由上方讨论有 $T=\{z,v,w\}$ 为 G 的一个3点分离集，其中 $w\neq z,v$.
由 $xy\in E(G)$，故 x,y 同在 $G-T$ 的一个连通分支中.
取 $\tilde{D}$ 为 $G-T$ 的一个连通分支不含 x,y，由 v 在 $\tilde{D}$ 有邻点，$\tilde{D}\cup\{v\}$ 为 G 的一个连通子图，且 $x,y,z\notin V(\tilde{D}\cup\{v\})$.
而 $\tilde{C}$ 含 v，故 $\tilde{D}\cup\{v\}$ 为 $\tilde{C}$ 子图.
故 $|V(\tilde{D})|<|V(\tilde{C})|$，与 $\tilde{C}$ 的选取矛盾.
综上，假设不成立，存在边 e，$\kappa(G\cdot e)\geq 3$. □

Exercise 3. Let $\kappa(D)\geq k$, and let $x_0,x_1,\cdots,x_k$ be any $k+1$ vertices of D. Prove that D contains k internally vertex-disjoint (x_0,x_i)-paths and k internally vertex-disjoint (x_i,x_0)-paths, $i=1,2,\cdots,k$.

Pf: 在D中新加一个顶点 t 和 k 条弧 (x_i, t), $1 \le i \le k$. 记该有向图为 H.

下说明 $\kappa_D(x_0, t) \ge k$.

取 $S \subset V(H) \setminus \{x_0, t\}$, $|S| < k$. 故 $\exists x_i \notin S$.

由 $\kappa(D) \ge k$, 故 $\kappa(D-S) \ge 1$,

即 $D-S$ 强连通, 故在 x_0 到 x_i 间有有向路。再加上弧 (x_i, t), 便为 x_0 到 t 的一条有向路.

故 (x_0, t) 分离集至少含 k 个点, 即 $\kappa_D(x_0, t) \ge k$.

又因在 H 中, $(x_0, t) \notin A(H)$, 由 Menger 定理有:

$\lambda_H(x_0, t) = \kappa_H(x_0, t) \ge k$.

而 H 中 x_0 到 t 的不同内点不交有向路的 t 的前一个点必定不同, 故取 H 中 k 条内点不交 (x_0, t) 有向路, 都去掉弧 (x_i, t), $1 \le i \le k$, 则为 D 中 k 条内点不交 (x_0, x_i) 有向路, $1 \le i \le k$.

同样地, 考虑对 D 的反向图作同样的分析, 可得类似结果.

□