目　　录

第一章　图和子图 …… 1

1.1　图和简单图 …… 1

1.2　图的同构 …… 4

1.3　关联矩阵和邻接矩阵 …… 7

1.4　子图 …… 8

1.5　顶点的度 …… 11

1.6　路和连通 …… 12

1.7　圈 …… 15

应用 …… 17

1.8　最短路问题 …… 17

1.9　Sperner 引理 …… 23

第二章　树 …… 27

2.1　树 …… 27

2.2　割边和键 …… 29

2.3　割点 …… 33

2.4　Cayley 公式 …… 34

应用 …… 38

2.5　连线问题 …… 38

第三章　连通度 …… 45

3.1　连通度 …… 45

3.2　块 …… 47

应用 …… 51

3.3　可靠通讯网络的构造 …… 51

第四章　Euler 环游和 Hamilton 圈 …… 55

4.1　Euler 环游 …… 55

4.2　Hamilton 圈 …… 57

应用 …… 66

4.3 中国邮递员问题 …… 66
4.4 旅行售货员问题 …… 69
第五章 对集 …… 74
5.1 对集 …… 74
5.2 偶图的对集和覆盖 …… 76
5.3 完美对集 …… 80
应用 …… 85
5.4 人员分派问题 …… 85
5.5 最优分派问题 …… 91
第六章 边着色 …… 97
6.1 边色数 …… 97
6.2 Vizing 定理 …… 100
应用 …… 103
6.3 排课表问题 …… 103
第七章 独立集和团 …… 108
7.1 独立集 …… 108
7.2 Ramsey 定理 …… 110
7.3 Turan 定理 …… 117
应用 …… 120
7.4 Schur 定理 …… 120
7.5 一个几何问题 …… 121
第八章 顶点着色 …… 126
8.1 色数 …… 126
8.2 Brooks 定理 …… 131
8.3 Hajós 猜想 …… 132
8.4 色多项式 …… 134
8.5 围长和色数 …… 139
应用 …… 141
8.6 贮藏问题 …… 141
第九章 平面图 …… 145
9.1 平图和平面图 …… 145
9.2 对偶图 …… 149

9.3 Euler 公式 …… 153
9.4 桥 …… 156
9.5 Kuratowski 定理 …… 161
9.6 五色定理和四色猜想 …… 166
9.7 非 Hamilton 平面图 …… 171
应用 …… 173
9.8 平面性算法 …… 173
第十章 有向图 …… 181
10.1 有向图 …… 181
10.2 有向路 …… 184
10.3 有向圈 …… 187
应用 …… 191
10.4 工件排序问题 …… 191
10.5 高效率计算机鼓轮的设计 …… 192
10.6 单行道路系统的构造 …… 195
10.7 竞赛参加者名次的排列 …… 197
第十一章 网络 …… 203
11.1 流 …… 203
11.2 割 …… 206
11.3 最大流最小割定理 …… 209
应用 …… 216
11.4 Menger 定理 …… 216
11.5 可行流 …… 219
第十二章 圈空间和键空间 …… 226
12.1 环流和势差 …… 226
12.2 生成树的数目 …… 232
应用 …… 234
12.3 完美正方形 …… 234
附录 I 带星号习题的提示 …… 241
附录 II 四个图及其特性表 …… 248
附录 III 一些有趣的图 …… 250

附录 IV　尚未解决的问题 …… 262
附录 V　进一步阅读的建议 …… 271
符号汇编 …… 274
译名对照表 …… 276

第一章　图和子图

1.1　图和简单图

现实世界的许多事例用图形来描写可能是方便的，这种图形是由一个点集以及这个点集中的某些点对的连线构成的．例如，点可以表示人，连线表示一对朋友；或者，用点表示通讯站，而连线表示通讯线路．注意：在这类图形中，人们主要感兴趣的是给定两点是否有一根线连接，而连接的方式则无关紧要．这类事例的数学抽象就产生了图的概念．

一个图 G 是指一个有序三元组 $(V(G), E(G), \phi_G)$，其中 $V(G)$ 是非空的顶点集，$E(G)$ 是不与 $V(G)$ 相交的边集，而 ϕ_G 是关联函数，它使 G 的每条边对应于 G 的无序顶点对(不必相异)．若 e 是一条边，而 u 和 v 是使得 $\phi_G(e) = uv$ 的顶点，则称 e 连接 u 和 v；顶点 u 和 v 称为 e 的端点．

下面两个例子有助于阐明图的定义．

例 1

$$G = (V(G), E(G), \phi_G)$$

这里，

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

而 ϕ_G 定义为

$$\phi_G(e_1) = v_1v_2,\quad \phi_G(e_2) = v_2v_3$$

$$\phi_G(e_3) = v_3v_3,\quad \phi_G(e_4) = v_3v_4$$

$$\phi_G(e_5) = v_2v_4,\quad \phi_G(e_6) = v_4v_5$$

$$\phi_G(e_7) = v_2v_5,\quad \phi_G(e_8) = v_2v_5$$

例 2

$$H = (V(H), E(H), \phi_H)$$

这里，

$$V(H) = \{u, v, w, x, y\}$$
$$E(H) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

而 ϕ_H 定义为

$$\phi_H(a) = uv, \quad \phi_H(b) = uu$$
$$\phi_H(c) = vw, \quad \phi_H(d) = wx$$
$$\phi_H(e) = vx, \quad \phi_H(f) = wx$$
$$\phi_H(g) = ux, \quad \phi_H(h) = xy$$

采用图这一名称，是因为它们可以用图形来表示，而这种图形表示有助于我们理解图的许多性质. 每个顶点用点来表示，每条边用线来表示，此线连接着代表该边端点的点[1]. 图 1.1 是图 G 和 H 的图形. (为清晰起见，这里顶点画成小圆圈.)

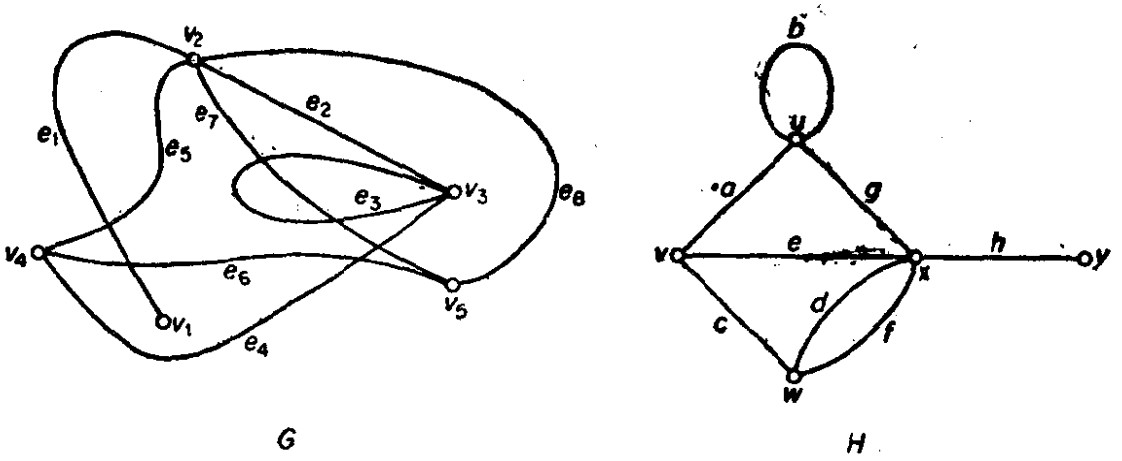


图 1.1 图 G 和 H 的图形

一个图的画法并不是唯一的；表示顶点的点和表示边的线的相对位置是无关紧要的. 例如，图 1.2 给出了 G 的另一个图形. 一个图的图形仅描绘出它的顶点和边之间所具有的关联关系. 然而，我们将常常画出一个图的图形，把它看作是这个图本身；并且它的点称为“顶点”，它的线称为“边”.

注意，在图的一个图形中，两条边可能相交于不是顶点的点上(例如图 1.1 中图 G 的 e_1 和 e_6). 若一个图具有这样的一个图形，

1) 画线时要求每一根线不自身相交，也不通过这样的点，它所代表的顶点不是相应边的端点——显然，这总是可以做到的.

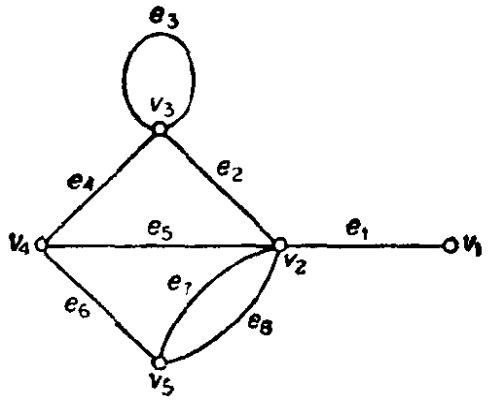


图 1.2　G的另一个图形

它的边仅在端点处相交，则该图称为平面图，因为这种图可以在平面上用简单的方式表示出来．图 1.3(a) 的图是一个平面图，虽然由所给出的这个特殊表示形式来看，这并不是一目了然的(参看习题 1.1.2)．另一方面，图 1.3(b) 的图是一个非平面图．(这将在第九章中证明．)

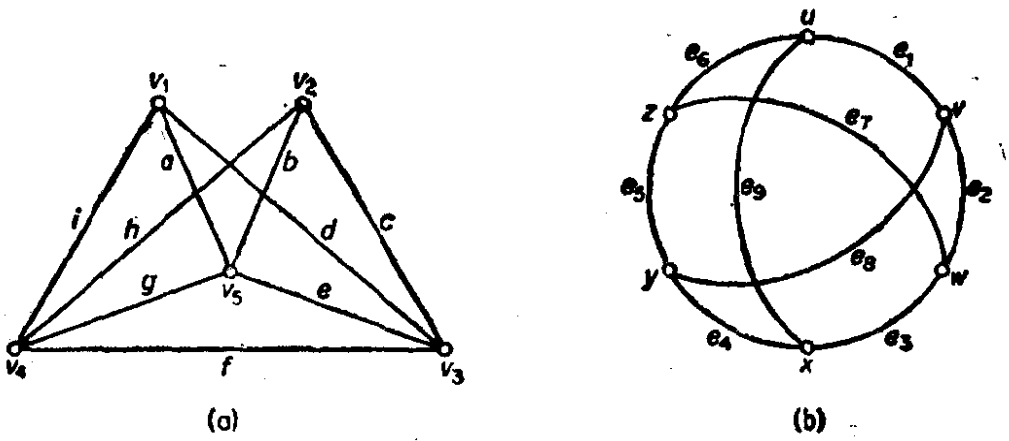


图 1.3　平面图和非平面图

图论中的大多数定义和概念是根据图形表示提出来的．一条边的端点称为与这条边关联，反之亦然．与同一条边关联的两个顶点称为相邻的，与同一个顶点关联的两条边也称为相邻的．端点重合为一点的边称为环，端点不相同的边称为连杆．例如，G的边 e_3(图 1.2) 是一个环，G的其余边都是连杆．

一个图称为有限图，如果它的顶点集和边集都有限．本书只研究有限图，故术语“图”一词总是指“有限图”．只有一个顶点的图称为平凡图，其他所有的图都称为非平凡图．

一个图称为简单图，如果它既没有环也没有两条连杆连接同一对顶点. 图 1.1 的图不是简单图，而图 1.3 的图却是简单图. 图论中大多数内容涉及简单图的研究.

图 G 的顶点数和边数分别用符号 $\nu(G)$ 和 $\varepsilon(G)$ 表示. 本书用字母 G 代表图，并且当讨论的图只有一个时，总是用 G 来表示这个图. 从而在图论符号中我们常略去字母 G，例如，分别用 V，E，ν 和 ε 代替 $V(G)$，$E(G)$，$\nu(G)$ 和 $\varepsilon(G)$.

习　　题

1.1.1　从日常生活中举出能自然地引出图的五个事例.

1.1.2　画出图 1.3(a) 的图的另一个图形，以说明它确实是平面图.

1.1.3　证明：若 G 是简单图，则 $\varepsilon \leqslant \binom{\nu}{2}$.

1.2　图的同构

两个图 G 和 H 是恒等的(记为 $G = H$)，如果 $V(G) = V(H)$，$E(G) = E(H)$ 和 $\phi_G = \phi_H$. 显然两个恒等的图可用同一个图形来表示. 但不恒等的图也可能具有实质上相同的图形. 例如图 1.2 的 G 和图 1.1 的 H，图形看起来完全一样，差别在于它们的顶点和边有不同的标号. 图 G 和 H 不恒等但同构. 一般说来，两个图 G 和 H 称为同构的(记为 $G \cong H$)，如果存在两个一一映射 θ：$V(G) \to V(H)$ 和 ϕ：$E(G) \to E(H)$，使得 $\phi_G(e) = uv$ 当且仅当 $\phi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$；这样一个映射对 (θ, ϕ) 称为 G 和 H 之间的一个同构.

要证明两个图是同构的，就必须指出它们之间的一个同构. 下面给出的映射对 (θ, ϕ)：

$$\theta(v_1) = y,\ \theta(v_2) = x,\ \theta(v_3) = u,\ \theta(v_4) = v,\ \theta(v_5) = w$$

和

$$\phi(e_1) = h,\ \phi(e_2) = g,\ \phi(e_3) = b,\ \phi(e_4) = a$$
$$\phi(e_5) = e,\ \phi(e_6) = c,\ \phi(e_7) = d,\ \phi(e_8) = f$$

是例 1 和例 2 的图 G 和 H 之间的一个同构；显然 G 和 H 有相同的

结构，差异只是顶点和边的名称不同．由于我们主要感兴趣的是图的结构性质，所以在画图时常常略去标号；一个无标号的图可以认为是同构图的等价类的代表．我们给一个图的顶点和边赋以标号的目的，主要是为了便于称呼它们．例如，讨论简单图时，把端点是 u 和 v 的边称为“边 uv”是方便的．（这个约定不会导致误解，因为在简单图中连接任意一对顶点的边最多只有一条．）

在结束本节时，我们介绍一些特殊类型的图．每一对不同的顶点都有一条边相连的简单图称为完全图．在同构意义下，n 个顶点的完全图只有一个，记为 K_n．图 1.4(a)是 K_5 的图形．另一方面，空图是指没有任何边的图．所谓偶图(或二部图)是指一个图，它的顶点集可以分解为两个(非空)子集 X 和 Y，使得每条边都有一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中；这样一种分类 (X, Y) 称为图的一个二分类．完全偶图是具有二分类 (X, Y) 的简单偶图，其中 X 的每个顶点都与 Y 的每个顶点相连；若 $|X| = m$ 而 $|Y| = n$，则这样的图记为 $K_{m,n}$．由立方体的顶点和边所确定的图（图 1.4(b)）是偶图；图 1.4(c) 中的图是完全偶图 $K_{3,3}$．

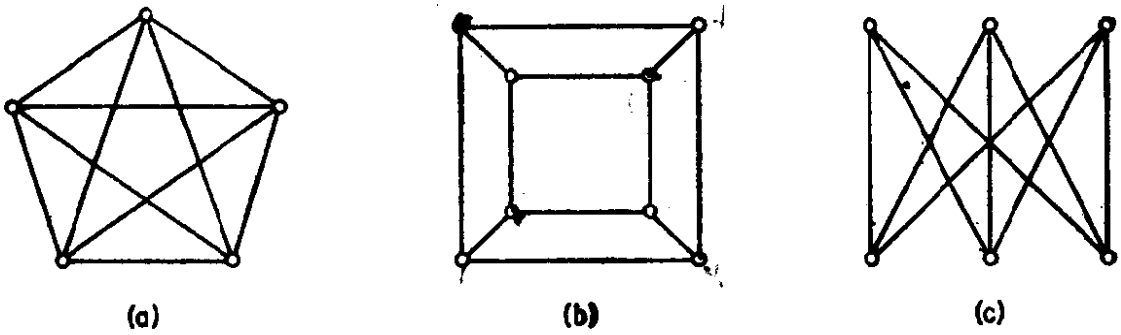


图 1.4 (a) K_5；(b) 立方体；(c) $K_{3,3}$

还有许多结构极为有趣的图．附录 III 中选录了一些这样的图．

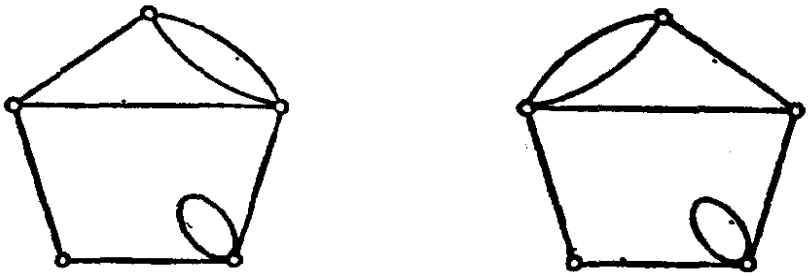
习　题

1.2.1 找出例 1 和例 2 的图 G 和 H 之间的另一个同构，使它不同于课文中已经给出的那个同构．

1.2.2 (a)证明：若 $G \cong H$，则 $\nu(G) = \nu(H)$ 和 $\varepsilon(G) = \varepsilon(H)$．

(b) 举例说明其逆命题不成立.

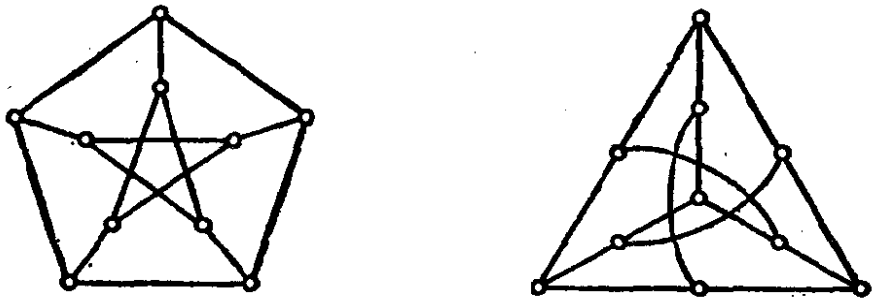
1.2.3 证明: 下面两个图不同构.



1.2.4 证明: 四个顶点的非同构简单图有 11 个.

1.2.5 证明: 两个简单图 G 和 H 同构当且仅当存在一个一一映射 $\theta: V(G) \to V(H)$, 使得 $uv \in E(G)$ 当且仅当 $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

1.2.6 证明: 下面两个图是同构的.



1.2.7 设 G 是简单图. 证明: $\varepsilon = \binom{v}{2}$ 当且仅当 G 是完全图.

1.2.8 证明:

(a) $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$;

(b) 若 G 是简单偶图, 则 $\varepsilon \leqslant v^2/4$.

1.2.9 所谓 k 部图是指这样的图, 它的顶点集可分解为 k 个(非空)子集, 使任何一边的两个端点均不同在任一个子集中; 完全 k 部图是指一个简单图, 它的每个顶点与不在同一子集中的所有顶点均相连接. 具有 n 个顶点的完全 m 部图, 若它的每个部分或是有 $[n/m]$ 个顶点, 或是有 $\{n/m\}$ 个顶点, 则记为 $T_{m,n}$. 证明:

(a) $\varepsilon(T_{m,n}) = \binom{n-k}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2}$, 这里 $k = [n/m]$;

(b)* 若 G 是具有 n 个顶点的完全 m 部图, 则 $\varepsilon(G) \leqslant \varepsilon(T_{m,n})$, 并且仅当 $G \cong T_{m,n}$ 时等式成立.

1.2.10 所谓 k 方体是指这样的图, 它的顶点是 0 和 1 组成的有序 k 元组,

两个顶点相连当且仅当它们恰有一个坐标不同.（图 1.4(b) 中所示的图恰好就是 3 方体.）证明 k 方体是有 2^k 个顶点，$k \cdot 2^{k-1}$ 条边的偶图.

1.2.11 (a) 简单图 G 的补图 G^c 是指和 G 有相同顶点集 V 的一个简单图，在 G^c 中两个顶点相邻当且仅当它们在 G 中不相邻. 画出图 K_n^c 和 $K_{m,n}^c$.

(b) 简单图 G 称为自补的，如果 $G \cong G^c$. 证明：若 G 是自补的，则 $v \equiv 0, 1 \pmod 4$.

1.2.12 图的自同构是指这个图到它自身上的一个同构.

(a) 利用习题 1.2.5 证明：简单图 G 的一个自同构可以认为是在 V 上保持相邻性的一个置换. 这种置换的集在通常的合成运算下构成一个群 $\Gamma(G)$（称为 G 的自同构群）.

(b) 求 $\Gamma(K_n)$ 和 $\Gamma(K_{m,n})$.

(c) 找出一个非平凡简单图，使得它的自同构群只含恒等元.

(d) 证明：对任何简单图 G，有 $\Gamma(G) = \Gamma(G^c)$.

(e) 研究具有元素 (1)(2)(3)，(1, 2, 3) 和 (1, 3, 2) 的置换群 A. 证明：不存在具有顶点集 $\{1, 2, 3\}$ 且适合 $\Gamma(G) = A$ 的简单图.

(f) 找出一个简单图 G，使得 $\Gamma(G) \cong A$.（Frucht 在 1939 年已证明：每个抽象群同构于某个图的自同构群.）

1.2.13 简单图 G 称为顶点可迁的，如果对任意两个顶点 u 和 v，存在 $\Gamma(G)$ 中的一个元素 g，使得 $g(u) = v$；G 称为边可迁的，如果对任意两条边 u_1v_1 和 u_2v_2，存在 $\Gamma(G)$ 中的一个元素 h，使得 $h(\{u_1, v_1\}) = \{u_2, v_2\}$. 求：

(a) 一个图，它是顶点可迁的，但不是边可迁的；

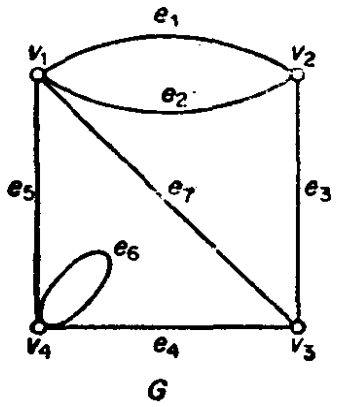
(b) 一个图，它是边可迁的，但不是顶点可迁的.

1.3 关联矩阵和邻接矩阵

对于任意图 G，对应着一个 $v \times \varepsilon$ 矩阵，称为 G 的关联矩阵. 设 $v_1, v_2, \cdots, v_v$ 和 $e_1, e_2, \cdots, e_\varepsilon$ 分别表示 G 的顶点和边，则 G 的关联矩阵是指矩阵 $\boldsymbol{M}(G) = [m_{ij}]$，其中 m_{ij} 是 v_i 和 e_j 相关联的次数（0，1 或 2）. 图的关联矩阵正是描述该图的另一种方式.

伴随于 G 的另一个矩阵是邻接矩阵；这是一个 $v \times v$ 矩阵 $\boldsymbol{A}(G) = [a_{ij}]$，其中 a_{ij} 是连接 v_i 和 v_j 的边的数目. 图 1.5 给出

了一个图和它的关联矩阵和邻接矩阵.



G

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	0	0	1	0	1
v_2	1	1	1	0	0	0	0
v_3	0	0	1	1	0	0	1
v_4	0	0	0	1	1	2	0

$M(G)$

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	1	1
v_2	2	0	1	0
v_3	1	1	0	1
v_4	1	0	1	1

$A(G)$

图 1.5

一般说来,图的邻接矩阵比它的关联矩阵小得多,通常,图就以其邻接矩阵的形式存贮于计算机中.

习 题

1.3.1 设 M 是图 G 的关联矩阵,A 是它的邻接矩阵.

(a) 证明: M 的每一列之和均为 2.

(b) A 的各列之和是多少? $N_G(v_i)$

1.3.2 设 G 是偶图. 证明: 把 G 的顶点适当排列后,可使 G 的邻接矩阵有如下形式:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & A_{12} \\ \hline A_{21} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

其中 A_{21} 是 A_{12} 的转置.

1.3.3* 证明: 若 G 是简单图且 A 的特征值各不相同,则 G 的自同构群是交换群.

1.4 子图

称图 H 是 G 的子图 (记为 $H \subseteq G$), 如果 $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, 并且 ϕ_H 是 ϕ_G 在 $E(H)$ 上的限制. 当 $H \subseteq G$, 但 $H \neq G$ 时,则记为 $H \subset G$, 并且 H 称为 G 的真子图. 若 H 是 G 的子图,则 G 称为 H 的母图. G 的生成子图 (或生成母图) 是指满足 $V(H) = V(G)$ 的子图(或母图) H.

从图G中删去所有的环，并使每一对相邻顶点只留下一条连杆，即可得到G的一个简单生成子图，称为G的基础简单图. 图1.6给出一个图及其基础简单图.

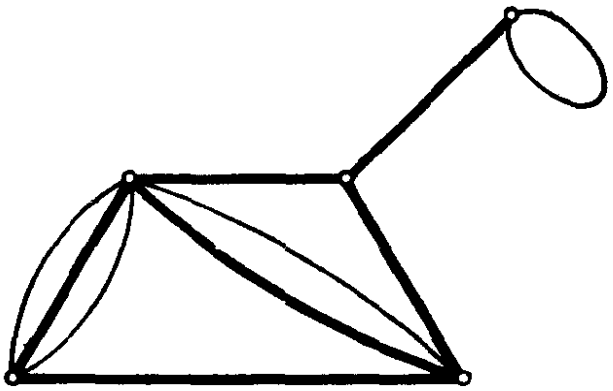


图 1.6　一个图及其基础简单图

假设 V' 是V的一个非空子集. 以 V' 为顶点集，以两端点均在 V' 中的边的全体为边集所组成的子图，称为 G 的由 V' 导出的子图，记为 $G[V']$；$G[V']$ 称为G的导出子图. 导出子图 $G[V\backslash V']$ 记为 $G-V'$；它是从G中删除 V' 中的顶点以及与这些顶点相关联的边所得到的子图. 若 $V'=\{v\}$，则把 $G-\{v\}$ 简记为 $G-v$.

假设 E' 是E的非空子集. 以 E' 为边集，以 E' 中边的端点全体为顶点集所组成的子图称为G的由 E' 导出的子图，记为 $G[E']$；$G[E']$ 称为G的边导出子图. 边集为 $E\backslash E'$ 的G的生成子图简记为 $G-E'$；它是从G中删除 E' 中的边所得到的子图. 类似地，在G上添加边集 E'[1] 的所有边得到的图记为 $G+E'$. 若 $E'=\{e\}$，则用$G-e$和$G+e$来代替 $G-\{e\}$ 和 $G+\{e\}$.

图1.7中画出了这些不同类型的子图.

设 G_1 和 G_2 是G的子图. 若 G_1 和 G_2 没有公共顶点，则称它们是不相交的；若 G_1 和 G_2 没有公共边，则称它们是边不重的. G_1 和 G_2 的并图 $G_1\cup G_2$ 是指G的一个子图，其顶点集为 $V(G_1)\cup$

1）这里的边集 E' 与G的边集E没有公共边——译者注

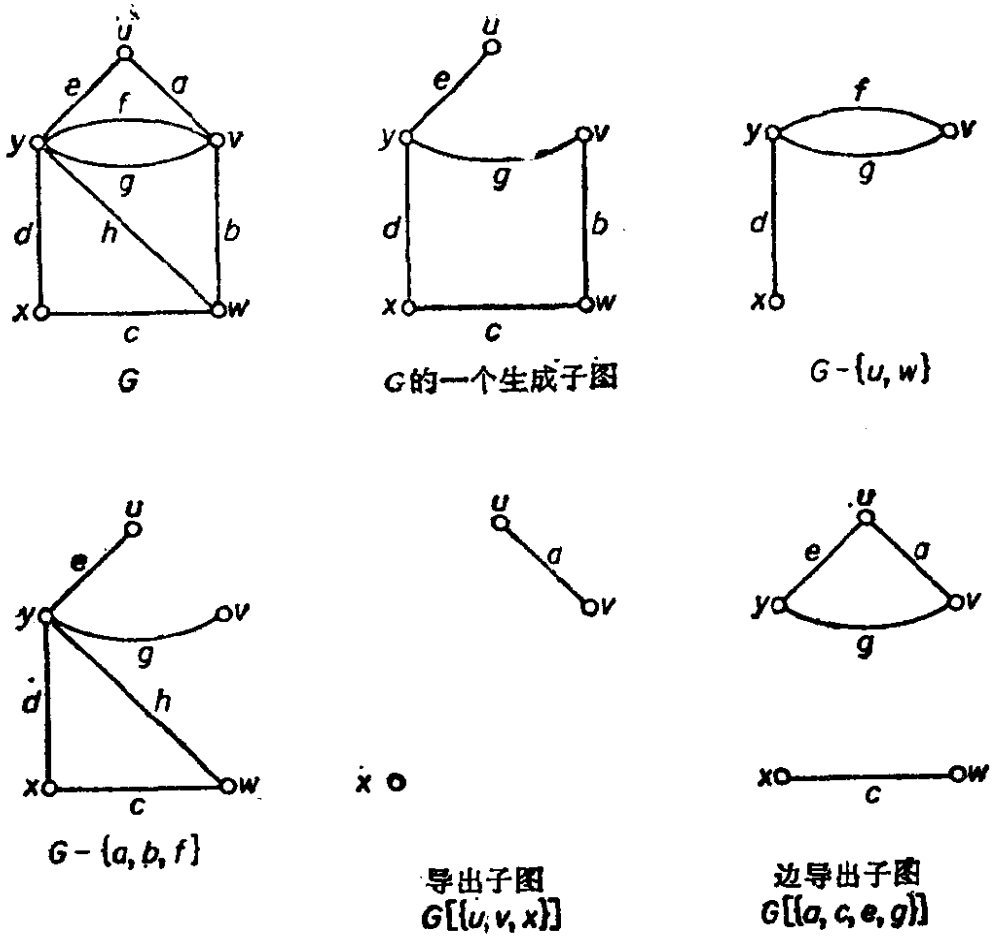


图 1.7

$V(G_2)$，其边集为 $E(G_1)\cup E(G_2)$；如果 G_1 和 G_2 是不相交的，有时就记其并图为 G_1+G_2。类似地可以定义 G_1 和 G_2 的交图 $G_1\cap G_2$，但此时 G_1 和 G_2 至少要有一个公共顶点。

习　　题

1.4.1　证明：每个 n 个顶点的简单图同构于 K_n 的一个子图。

1.4.2　证明：

（a）完全图的每个导出子图是完全图；

（b）偶图的每个子图是偶图。

1.4.3　试述怎样从 $\boldsymbol{M}(G)$ 得到 $\boldsymbol{M}(G-E')$ 和 $\boldsymbol{M}(G-V')$，又怎样从 $\boldsymbol{A}(G)$ 得到 $\boldsymbol{A}(G-V')$。

1.4.4　找出一个偶图，它与任何 k 方体的子图均不同构。

1.4.5*　设 G 是简单图，n 是适合 $1<n<\nu-1$ 的整数。证明：若 $\nu\geqslant 4$，

并且G的所有n个顶点的导出子图均有相同的边数，则或者$G\cong K_n$，或者$G\cong K_n^c$.

1.5 顶点的度

G的顶点v的度(或次) $d_G(v)$是指G中与v关联的边的数目，每个环算作两条边. 用$\delta(G)$和$\Delta(G)$分别表示G的顶点的最小度和最大度[1].

定理 1.1 $\sum_{v\in V} d(v) = 2\varepsilon$

证 考察关联矩阵$\boldsymbol{M}$. 对应于顶点v的那一行的各元素之和恰好是$d(v)$，所以$\sum_{v\in V} d(v)$恰好就是$\boldsymbol{M}$中的所有元素之和. 但是由于(习题 1.3.1a) $\boldsymbol{M}$的ε列中每列之和均为2，故总和也等于2ε.

推论 1.1 在任何图中，奇点个数为偶数.

证 设V_1和V_2分别是G中奇点集和偶点集. 则由定理 1.1 知

$$\sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{v\in V_2} d(v) = \sum_{v\in V} d(v)$$

是偶数，而$\sum_{v\in V_2} d(v)$也是偶数，由此推出$\sum_{v\in V_1} d(v)$是偶数. 即$|V_1|$是偶数.

称图G是k正则的，如果对所有$v\in V$，有$d(v)=k$；正则图是指对某个k而言的k正则图. 完全图和完全偶图$K_{n,n}$是正则的，k方体也是k正则的.

习 题

1.5.1 证明: $\delta \leqslant 2\varepsilon/v \leqslant \Delta$.

1.5.2 证明: 若G是简单图，则$\boldsymbol{MM}'$和$\boldsymbol{A}^2$的对角线上的元素都是G的顶点的度.

---

1) 为说话方便，把奇数度的顶点简称奇点，偶数度的顶点简称偶点. ——译者注

1.5.3 证明：若 k 正则偶图 ($k>0$) 具有二分类 (X, Y)，则 $|X| = |Y|$.

1.5.4 证明：由两人或更多个人组成的人群中，总有两人在该人群内恰好有相同的朋友数.

1.5.5 若 G 有顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，则序列 $(d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_n))$ 称为 G 的度序列. 证明：非负整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是某个图的度序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数.

1.5.6 序列 $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 称为图序列，如果 $\boldsymbol{d}$ 是某一简单图的度序列. 证明：

(a) 序列 (7, 6, 5, 4, 3, 3, 2) 和 (6, 6, 5, 4, 3, 3, 1) 不是图序列；

(b) 若 $\boldsymbol{d}$ 为图序列，且 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$，则 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数，且 $\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$，对 $1 \leqslant k \leqslant n$ 成立. (Erdös 和 Gallai 在 1960 年已证明：$\boldsymbol{d}$ 是图序列的这个必要条件也是充分的.)

1.5.7 设 $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是非负整数的不增序列，并用 $\boldsymbol{d}'$ 记序列 $(d_2 - 1, d_3 - 1, \cdots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \cdots, d_n)$.

(a)* 证明：$\boldsymbol{d}$ 是图序列当且仅当 $\boldsymbol{d}'$ 是图序列.

(b) 利用(a)，叙述可以构作以 $\boldsymbol{d}$ 为度序列的简单图的一个算法，如果这种图存在的话. (V. Havel, S. Hakimi)

1.5.8* 证明：任一无环图 G 都包含一个偶生成子图 H，使得 $d_H(v) \geqslant \frac{1}{2} d_G(v)$ 对所有 $v \in V$ 成立.

1.5.9* 设 $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是平面上的一个点集，其中任意两点之间的距离至少是 1. 证明：最多有 $3n$ 对点的距离恰好是 1.

1.5.10 图 G 的边图是以 $E(G)$ 为顶点集的图，其中两个顶点相邻当且仅当它们在 G 中是相邻的边. 证明：

(a) 若 G 是简单图，则 G 的边图有 $\varepsilon(G)$ 个顶点和 $\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}$ 条边；

(b) K_5 的边图同构于习题 1.2.6 中给出的图的补图.

1.6 路和连通

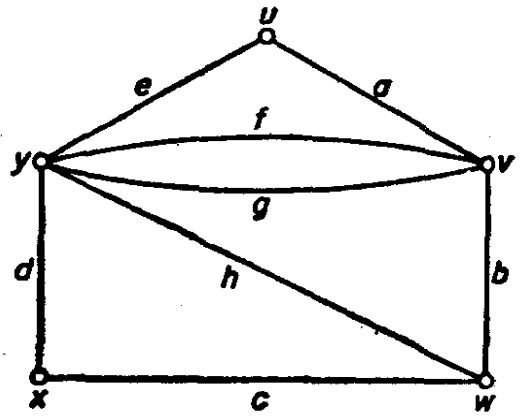
G 的一条途径(或通道)是指一个有限非空序列 $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2$

$\cdots e_k v_k$，它的项交替地为顶点和边，使得对 $1 \leqslant i \leqslant k$，$e_i$ 的端点是 v_{i-1} 和 v_i. 称W是从 v_0 到 v_k 的一条途径，或一条 (v_0, v_k) 途径顶点. v_0 和 v_k 分别称为W的起点和终点，而 $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}$ 称为它的内部顶点. 整数 k 称为 W 的长.

若 $W = v_0 e_1 v_1 \cdots e_k v_k$ 和 $W' = v_k e_{k+1} v_{k+1} \cdots e_l v_l$ 都是途径，则 W 逆转后所得的途径 $v_k e_k v_{k-1} \cdots e_1 v_0$ 记为 W^{-1}，将 W 和 W' 在 v_k 处衔接在一起所得的途径 $v_0 e_1 v_1 \cdots e_l v_l$ 记为 WW'. 途径 $W = v_0 e_1 v_1 \cdots e_k v_k$ 的节是指 W 中由相继项构成的子序列 $v_i e_{i+1} v_{i+1} \cdots e_j v_j$，它也是一条途径；这一子序列又可称为$W$的$(v_i, v_j)$节.

在简单图中，途径 $v_0 e_1 v_1 \cdots e_k v_k$ 由它的顶点序列 $v_0 v_1 \cdots v_k$ 所确定；所以简单图的途径可简单地由其顶点序列来表示. 不仅如此，即使在非简单图中，我们有时也把相继项均相邻的顶点序列看作为“途径”. 在这种场合应该理解为：所作的论述对于具有这种顶点序列的每条途径都是正确的.

若途径 W 的边 $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 互不相同，则 W 称为迹；这时W的长恰好是 $\varepsilon(W)$. 又若途径W的顶点 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ 也互不相同，则 W 称为路. 图1.8指出了一个图的一条途径，一条迹和一条路. “路”一词也可用来表示其顶点和边是一条路的各项的图或子图.



途径: *uavfyfvgyhwbv*
迹: *wcxdyhwbvgy*
路: *xcwhyeuav*

图 1.8

G的两个顶点 u 和 v 称为连通的，如果在G中存在(u, v)路.

连通是顶点集V上的一个等价关系. 于是就存在V的一个分类，把V分成非空子集 $V_1, V_2, \cdots, V_\omega$，使得两个顶点$u$和$v$是连通的当且仅当它们属于同一子集 V_i. 子图 $G[V_1], G[V_2], \cdots, G[V_\omega]$ 称为G的分支. 若G只有一个分支，则称G是连通的；否则称G是不连通的. G的分支个数记为 $\omega(G)$. 图 1.9 画出了连通的和不连通的图.

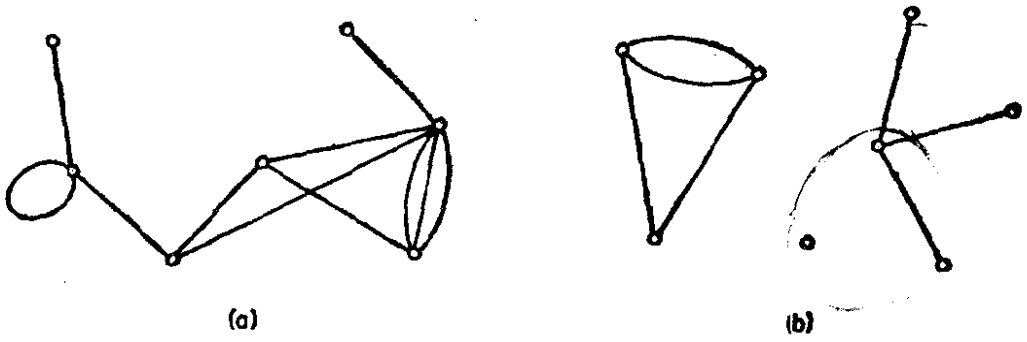


图 1.9 (a) 一个连通图; (b) 一个有三个分支的不连通图

习 题

1.6.1 证明: 若在G中存在(u, v)途径，则在G中也存在(u, v)路.

1.6.2 证明: G中长为k的(v_i, v_j)途径的数目就是 A^k 中的第(i, j)元素.

1.6.3 证明: 若G是简单图且 $\delta \geqslant k$，则G有长为k的路.

1.6.4 证明: G是连通图当且仅当对于把V分为两个非空子集 V_1 和 V_2 的每个分类，总存在一条边，其一个端点在 V_1 中而另一个端点在 V_2 中.

1.6.5 (a) 证明: 若G是简单图且 $\varepsilon > \binom{\nu-1}{2}$，则$G$连通.

(b) 对于 $\nu > 1$，找出一个边数 $\varepsilon = \binom{\nu-1}{2}$ 的不连通简单图.

1.6.6 (a) 证明: 若G是简单图且 $\delta > [\nu/2] - 1$，则G连通.

(b) 当ν是偶数时，找出一个不连通的 $([\nu/2]-1)$ 正则简单图.

1.6.7 证明: 若G不连通，则 G^c 连通.

1.6.8 (a) 证明: 若 $e \in E$，则 $\omega(G) \leqslant \omega(G-e) \leqslant \omega(G)+1$.

(b) 设 $v \in V$. 证明: 在上面的不等式中，一般不能用 $G-v$ 代替 $G-e$.

1.6.9 证明: 若G连通且G的每个顶点的度均为偶数，则对于任何 $v \in V$，

$\omega(G-v)\leqslant\frac{1}{2}d(v)$ 成立.

1.6.10 证明：在连通图中，任意两条最长路必有公共顶点.

1.6.11 若在 G 中顶点 u 和 v 是连通的，则 u 和 v 之间的距离 $d_G(u,v)$ 是 G 中最短 (u,v) 路的长；若没有路连接 u 和 v，则定义 $d_G(u,v)$ 为无穷大. 证明：对于任何三个顶点 u，v 和 w，$d(u,v)+d(v,w)\geqslant d(u,w)$ 成立.

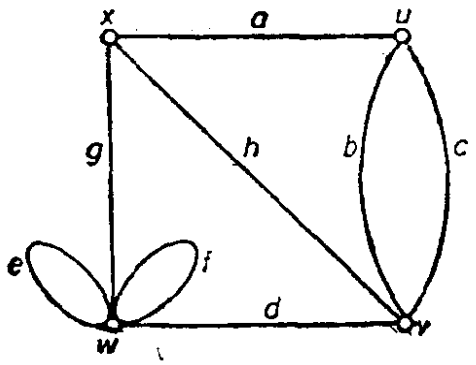
1.6.12 G 的直径是指 G 的两个顶点之间的最大距离. 证明：若 G 的直径大于 3，则 G^c 的直径小于 3.

1.6.13 证明：若 G 是直径为 2 的简单图且 $\Delta=v-2$，则 $\varepsilon\geqslant 2v-4$.

1.6.14 证明：若 G 是连通简单图但不是完全图，则 G 有三个顶点 u，v 和 w，使得 uv，$vw\in E$，而 $uw\notin E$.

1.7 圈

称一条途径是闭的，如果它有正的长且起点和终点相同. 若一条闭迹的起点和内部顶点互不相同，则它称为圈. 与路一样，有时用术语“圈”来表示对应于一个圈的图. 长为 k 的圈称为 k 圈；按 k 是奇数还是偶数，称 k 圈是奇圈或偶圈. 3 圈常称为三角形. 图1.10 给出了闭迹和圈的例子.



闭迹：uçvhxgwfwdvbu
圈：xaubvhx

图 1.10

利用圈的概念，可以给出偶图的一个特征.

定理 1.2 一个图是偶图当且仅当它不包含奇圈.

证 设 G 是具有二分类 (X,Y) 的偶图，并且设 $C=v_0v_1\cdots v_kv_0$ 是 G 的一个圈. 不失一般性，可假定 $v_0\in X$. 因为 $v_0v_1\in E$

且G是偶图，所以 $v_1 \in Y$. 同理 $v_2 \in X$. 一般说来，$v_{2i} \in X$，且 $v_{2i+1} \in Y$. 又因为 $v_0 \in X$，所以 $v_k \in Y$. 于是对某个 i，有 $k = 2i + 1$，由此即得C是偶圈.

显然仅对连通图证明其逆命题就够了. 设G是不包含奇圈的连通图. 任选一个顶点 u 且定义 V 的一个分类 (X, Y) 如下:

$$X = \{x \in V \mid d(u, x) \text{ 是偶数}\}$$

$$Y = \{y \in V \mid d(u, y) \text{ 是奇数}\}$$

现在证明(X,Y)是G的一个二分类.假设 v 和 w 是 X 的两个顶点，P 是最短的 (u, v) 路，Q 是最短的 (u, w) 路，以 u_1 记 P 和 Q 的最后一个公共顶点. 因 P 和 Q 是最短路，P 和 Q 二者的 (u, u_1) 节也是最短的 (u, u_1) 路，故长相同. 现因 P 和 Q 的长都是偶数，所以 P 的 (u_1, v) 节 P_1 和 Q 的 (u_1, w) 节 Q_1 必有相同的奇偶性. 由此推出 (v, w) 路 $P_1^{-1}Q_1$ 长为偶数. 若 v 和 w 相连，则 $P_1^{-1}Q_1wv$ 就是一个奇圈，与假设矛盾，故 X 中任意两个顶点均不相邻；类似地，Y 中任意两个顶点也不相邻.

习　　题

1.7.1　证明: 若边 e 在 G 的某闭迹中，则 e 在 G 的某圈中.

1.7.2　证明: 若 $\delta \geqslant 2$，则 G 包含圈.

1.7.3*　证明: 若 G 是简单图且 $\delta \geqslant 2$，则 G 包含长至少是 $\delta + 1$ 的圈.

1.7.4　G 的围长是指 G 中最短圈的长；若 G 没有圈，则定义 G 的围长为无穷大. 证明:

(a) 围长为 4 的 k 正则图至少有 $2k$ 个顶点，且（在同构意义下）在 $2k$ 个顶点上恰好有一个这样的图；

(b) 围长为 5 的 k 正则图至少有 $k^2 + 1$ 个顶点.

1.7.5　证明: 围长为 5，直径为 2 的 k 正则图恰好有 $k^2 + 1$ 个顶点，当 $k = 2, 3$ 时找出这种图来.（Hoffman 和 Singleton 在 1960 年已证明: 这种图仅当 $k = 2, 3, 7$，可能还有 57 时存在.）

1.7.6　证明:

(a) 若 $\varepsilon \geqslant \nu$，则 G 包含圈；

(b)* 若 $\varepsilon \geqslant \nu + 4$，则 G 包含两个边不重的圈.　　(L. Pósa)

应　　用

1.8　最短路问题

对 G 的每一条边 e，可赋以一个实数 $w(e)$，称为 e 的权．G 连同它边上的权称为赋权图．赋权图经常出现在图论的应用中．例如在友谊图中，权可以表示友谊的深度；在通讯图中，权可以表示各种通讯线路的建造或维修费用．

若 H 是赋权图的一个子图，则 H 的权 $w(H)$ 是指它的各边的权和 $\sum_{e\in E(H)} w(e)$．许多最优化问题相当于要在一个赋权图中找出某类具有最小(或最大)权的子图，其中之一就是最短路问题：给出一个连接各城镇的铁路网络，在这个网络的两个指定城镇之间试确定一条最短路线．

这就是要在一个赋权图的两个指定顶点 u_0 和 v_0 之间找出一条具有最小权的路；这里权指的是直接相连的城镇之间的铁路距离，当然是非负的．图 1.11 的图中粗线指明的路是最小权的 (u_0, v_0) 路 (习题 1.8.1)．

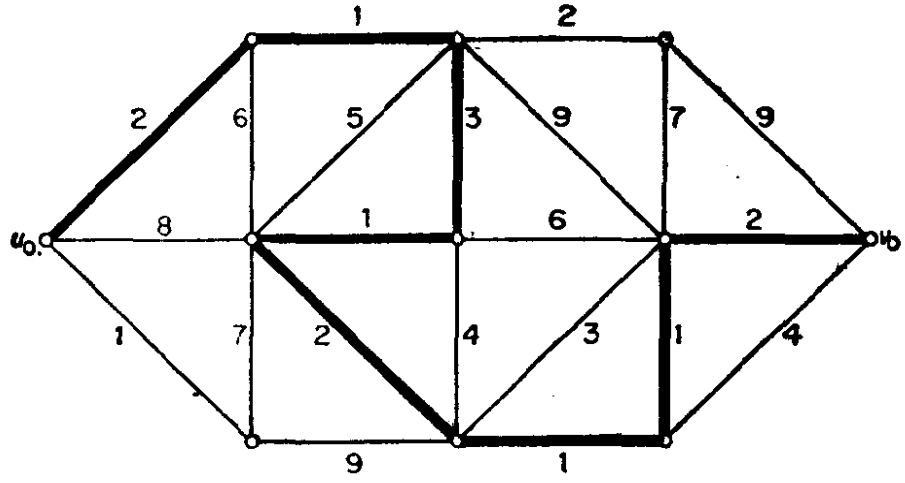


图 1.11　一条最小权的 (u_0, v_0) 路

现在给出一个解最短路问题的算法．为叙述清楚起见，把赋权图中一条路的权称为它的长；类似地，把 (u, v) 路的最小权称为 u 和 v 之间的距离，并记为 $d(u, v)$．当所有的权均为 1 时，这

些定义与在 1.6 节中定义过的通常关于长和距离的概念是一致的.

显然,只要讨论简单图的最短路问题就够了;所以这里将假定 G 是简单图. 还假定所有的权均为正的,但这并不是一个紧要的限制,因为若某边的权为 0,则可使其端点重合. 按照常规,当 $uv \notin E$ 时,规定 $w(uv) = \infty$.

下面所叙述的算法是 Dijkstra (1959) 以及 Whiting 和 Hillier (1960) 各自独立地发现的. 这个算法不仅找到了最短的 (u_0, v_0) 路,而且给出了从 u_0 到 G 的所有其它顶点的最短路,其基本思想如下.

假设 S 是 V 的真子集且 $u_0 \in S$,并以 $\bar{S}$ 记 $V \backslash S$. 若 $P = u_0 \cdots \cdots \bar{u}\bar{v}$ 是从 u_0 到 $\bar{S}$ 的最短路,则显然 $\bar{u} \in S$ 且 P 的 $(u_0, \bar{u})$ 节必然是最短 $(u_0, \bar{u})$ 路. 所以

$$d(u_0, \bar{v}) = d(u_0, \bar{u}) + w(\bar{u}\bar{v})$$

并且从 u_0 到 $\bar{S}$ 的距离由公式

$$d(u_0, \bar{S}) = \min_{\substack{u \in S \\ v \in \bar{S}}} \{d(u_0, u) + w(uv)\} \tag{1.1}$$

给出.

这个公式是 Dijkstra 算法的基础. 从集 $S_0 = \{u_0\}$ 开始,用下述方法构造一个由 V 的子集组成的递增序列 $S_0, S_1, \cdots, S_{p-1}$,使得在第 i 步结束时,由 u_0 到 S_i 的所有顶点的最短路均已知.

第一步是确定距 u_0 最近的一个顶点. 为此只要算出 $d(u_0, \bar{S}_0)$ 并选取顶点 $u_1 \in \bar{S}_0$,使得 $d(u_0, u_1) = d(u_0, \bar{S}_0)$ 即可;由 (1.1) 式容易算出 $d(u_0, \bar{S}_0)$:

$$\begin{aligned} d(u_0, \bar{S}_0) &= \min_{\substack{u \in S_0 \\ v \in \bar{S}_0}} \{d(u_0, u) + w(uv)\} \\ &= \min_{v \in \bar{S}_0} \{w(u_0 v)\} \end{aligned}$$

现置 $S_1 = \{u_0, u_1\}$ 并用 P_1 记路 u_0u_1;显然这是最短的 (u_0, u_1) 路. 一般说来,若集 $S_k = \{u_0, u_1, \cdots, u_k\}$ 以及相应的最短路 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 已经确定,则可用 (1.1) 式来计算 $d(u_0, \bar{S}_k)$,并选

取顶点 $u_{k+1}\in\bar{S}_k$，使得 $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, \bar{S}_k)$. 根据 (1.1) 式，$d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, u_j) + w(u_ju_{k+1})$ 对某个 $j \leqslant k$ 成立；将边 u_ju_{k+1} 连接到路 P_j 上，即得最短 (u_0, u_{k+1}) 路.

可以通过考察图 1.12(a) 中给出的赋权图来说明上述过程. 从 u_0 到其余各顶点的最短路可分七步确定. 在每一步中，已确立的最短路的顶点用实点表示，并用它到 u_0 的距离作为它的标号；

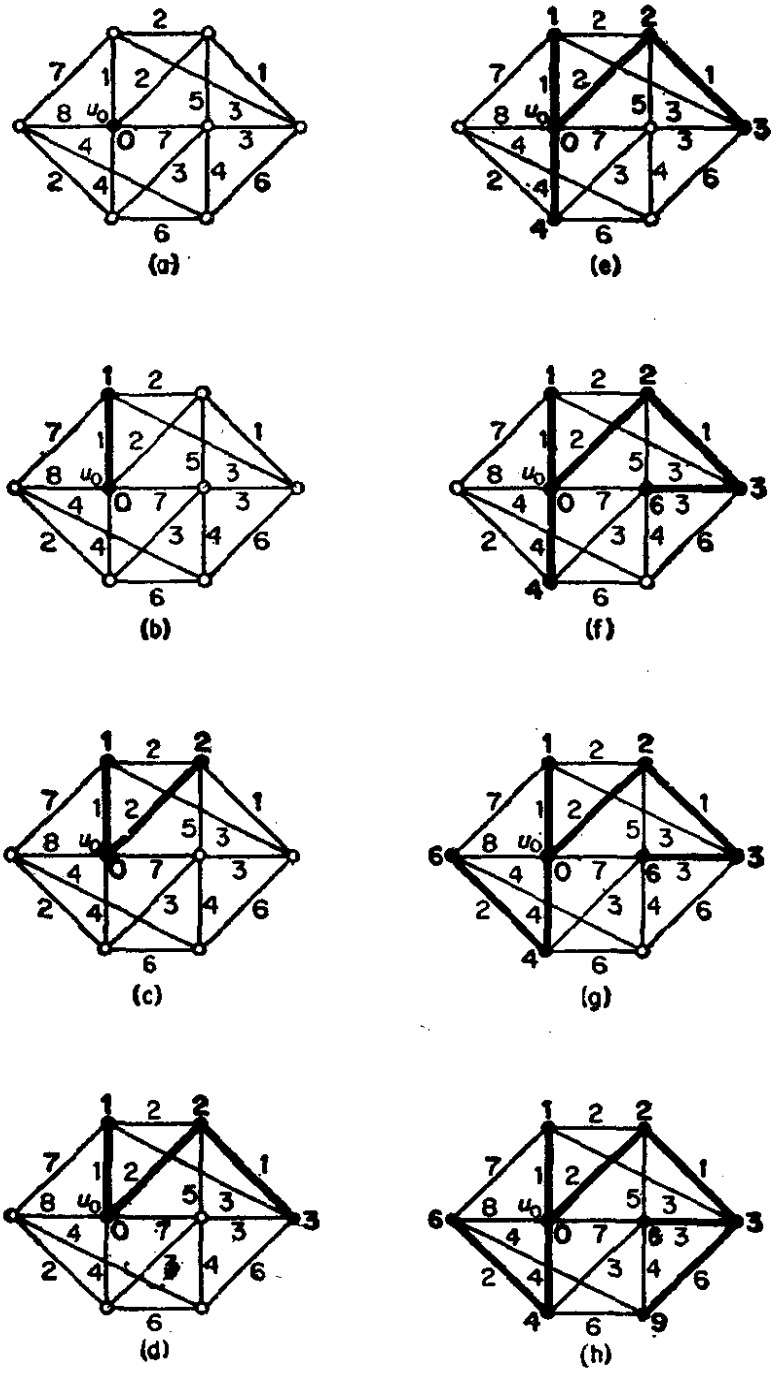


图 1.12　最短路算法

最初 u_0 标为 0. 实际达到最短距离的最短路用粗线表示. 注意，在每一步中，这些最短路合在一起构成一个没有圈的连通图，这种图称为树. 我们可以把这个算法想象为“树的生长”过程. 图 1.12(h) 中的最终的树具有这样的性质：对每个顶点 v，连接 u_0 和 v 的路是最短 (u_0, v) 路.

Dijkstra 算法是上述过程的精心改进. 这一改进是基于这样的考虑：若在每一步通过搜寻来计算(1.1)式的最小值，则许多次的比较成了不必要的重复. 为避免重复并保留从每一步到下一步的计算信息，采用如下的标号程序. 在整个算法中，每个顶点 v 给以标号 $l(v)$，它是 $d(u_0, v)$ 的一个上界. 开始时 $l(u_0) = 0$，而对 $v \neq u_0$，则有 $l(v) = \infty$. (在实际计算中，∞ 被一个足够大的任意数所代替.)在算法进行时，这些标号不断被修改：在第 i 步结束时

$$l(u) = d(u_0, u) \text{ 对 } u \in S_i \text{ 成立}$$

并且

$$l(v) = \min_{u \in S_{i-1}} \{d(u_0, u) + w(uv)\} \text{ 对 } v \in \bar{S}_i \text{ 成立}$$

Dijkstra 算法

1. 置 $l(u_0) = 0$，对 $v \neq u_0$，$l(v) = \infty$，$S_0 = \{u_0\}$ 且 $i = 0$.

2. 对每个 $v \in \bar{S}_i$，用 $\min\{l(v), l(u_i) + w(u_i v)\}$ 代替 $l(v)$. 计算 $\min_{v \in \bar{S}_i} \{l(v)\}$，并把达到这个最小值的一个顶点记为 u_{i+1}. 置 $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.

3. 若 $i = v - 1$，则停止. 若 $i < v - 1$，则用 $i + 1$ 代替 i，并转入第二步.

当算法结束时，从 u_0 到 v 的距离由标号 $l(v)$ 的终值给出. (若我们的兴趣在于确定到某一特定顶点 v_0 的距离，则当某 u_i 等于 v_0 时立即停止.)总结这个算法的框图如图 1.13 所示.

如上所述，Dijkstra 算法仅确定了从 u_0 到所有其他顶点的距离，而并未给出实际最短路. 然而只要在树中沿着先行顶点的轨迹引伸，这些最短路还是容易确定的(习题 1.8.2).

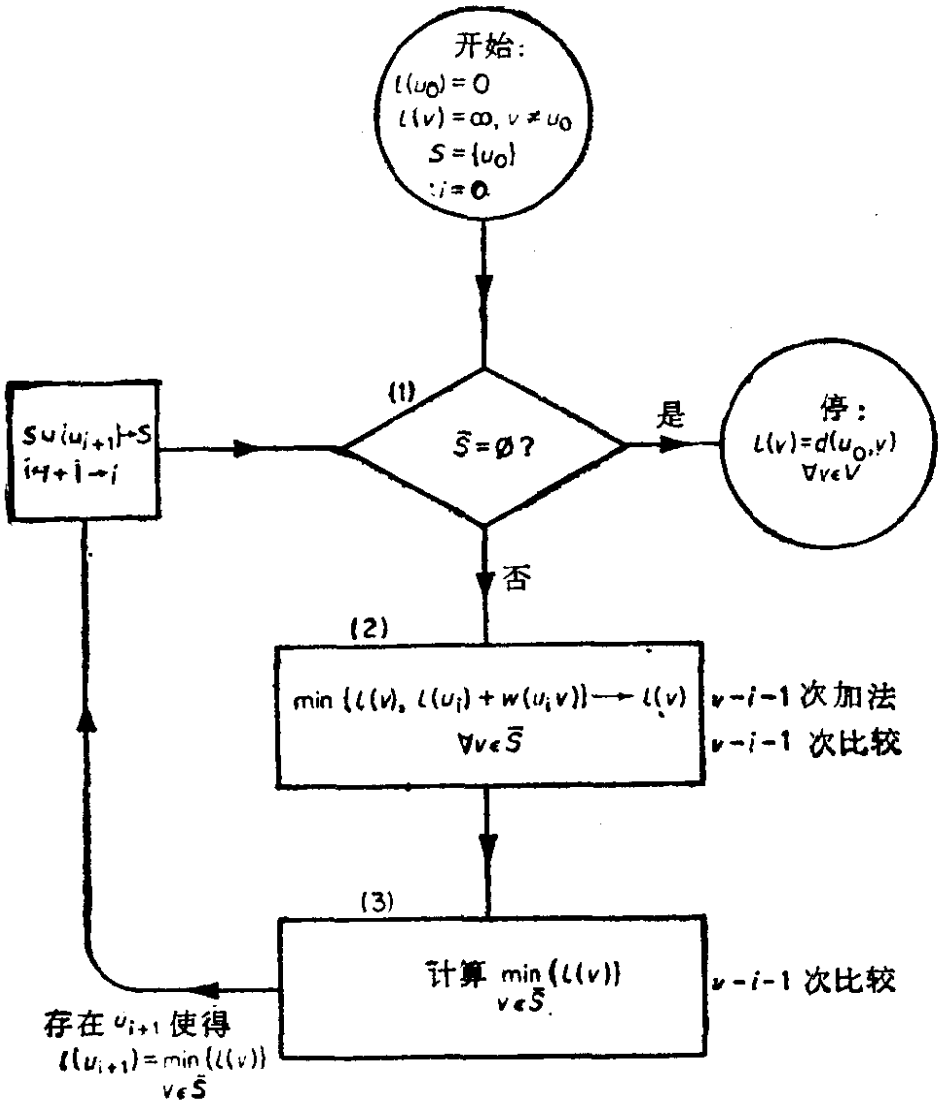


图 1.13 Dijkstra 算法

Dijkstra 算法是 Edmonds (1965) 称为好算法的一个例子. 称一个图论算法是好的，如果在任何图 G 上施行这个算法所需要的计算步数都可由 v 和 ε 的一个多项式(例如 $3v^2\varepsilon$)为其上界. 一个算法的施行若需要指数步数 (例如 2^v)，则对某些大的图而言，它将是十分无效的.

要看出 Dijkstra 算法确是好算法，应注意框图中框 2 和框 3 的计算量: 全部叠代过程总共需要作 $v(v-1)/2$ 次加法和 $v(v-1)$ 次比较. 如何决定一个顶点属于或者不属于 $\bar{S}$ (框 1) 的问题，在框图中没有阐述. Dreyfus (1969) 报告了一个解决该问题的技巧，它总共需要 $(v-1)^2$ 次比较. 若把一次比较或一次加

法作为一个基本计算单位，则这个算法的计算总量约为 $5v^2/2$，它是 v^2 数量级的.(称一个函数 $f(v, \varepsilon)$ 是 $g(v, \varepsilon)$ 数量级的，如果存在一个正常数 c，使得：对所有 v 与 ε，都有 $f(v, \varepsilon)/g(v, \varepsilon) \leqslant c$.)

虽然最短路问题能用好算法予以解决，但在图论中还有许多问题并不存在已知的好算法. 欲作进一步了解的读者请参考 Aho, Hopcroft 和 Ullman (1974) 的著作.

习　　题

1.8.1　在图 1.11 的赋权图中，找出从 u_0 到所有其他顶点的最短路.

1.8.2　为了使 Dijkstra 算法不仅能确定距离，而且能确定最短路，必须附加哪些指令?

1.8.3　某公司在六个城市 $C_1, C_2, \cdots, C_6$ 中都有分公司. 从 C_i 到 C_j 的直接航程票价由下述矩阵的第 (i, j) 元素给出(∞表示无直接航路):

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$

该公司想算出一张任意两个城市之间的最廉航价路线表. 试作出这样的表来.

1.8.4　一只狼、一头山羊和一箩卷心菜在河的同侧. 一个摆渡人要将它们运过河去，但由于船小，他一次只能载三者之一过河. 显然，不管是狼和山羊，还是山羊和卷心菜，都不能在无人监视的情况下留在一起. 问摆渡人应怎样把它们运过河去?

1.8.5　两人有一只容积为 8 加仑的酒壶盛满了酒，还有两只容积分别为 5 和 3 加仑的空壶. 问平分酒的最简单方法应当怎样?

1.8.6　描述一个好算法以确定

(a) 一个图的各个分支;

(b) 一个图的围长.

并说明你的算法好到什么程度?

1.9 Sperner 引理

闭的 n 维球到其自身的每个连续映射 f 都有一个不动点（即有一点 x，使 $f(x)=x$）. 这一强有力的定理名为 Brouwer 不动点定理，在现代数学中有广泛的应用. 多少有点意外的是，它是 Sperner（1928）提出的简单组合引理的一个自然的推论. 在本节中还将看到，Sperner 引理又是推论 1.1 的直接结果.

Sperner 引理涉及到把一个单纯形(线段，三角形，四面体等等)分解为较小的单纯形的问题. 为简单起见，我们只讨论二维情形.

设 T 是平面上的一个闭三角形. 把 T 分解成有限个较小三角形的剖分称为是单纯的，如果任意两个相交三角形或有一个顶点或有整个一条边是公共的（见图 1.14(a)）.

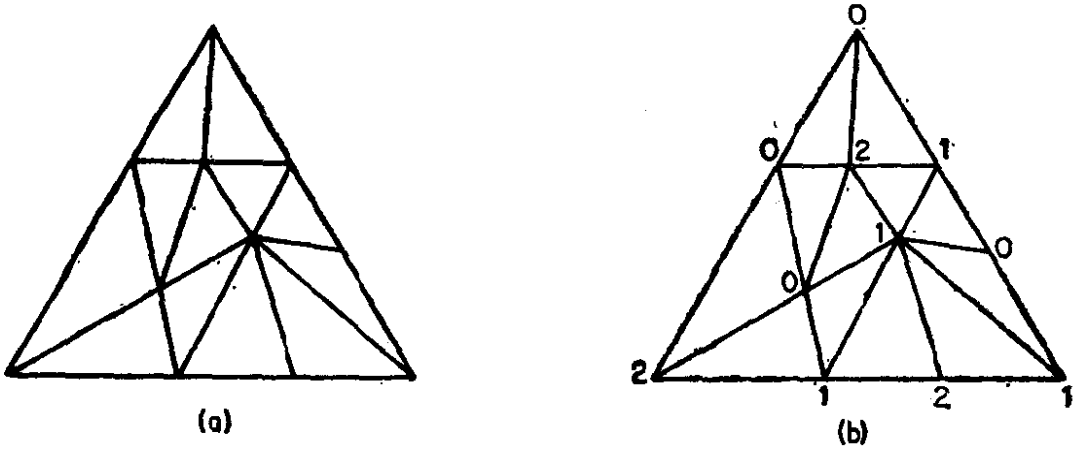


图 1.14 (a) 三角形的一个单纯剖分 (b) 剖分的一个正常标号

假设已给出 T 的一个单纯剖分. 在该剖分中的三角形顶点标以三个符号 0，1 和 2 之一的一个标号称为正常的，如果 (i) T 的三个顶点分别标为 0，1 和 2（以任何顺序），(ii) 对 $0 \leqslant i < j \leqslant 2$，在 T 的连接标号为 i 和 j 的顶点的边上，每个顶点或标为 i，或标为 j.

剖分中的三角形，若其三个顶点具有三个不同的标号，则称为异标三角形. 图 1.14(b) 中的正常标号有三个异标三角形.

定理 1.3(Sperner 引理) 三角形的每个正常标号的单纯剖

分中都有奇数个异标三角形.

证 设 T_0 表示 T 的外部区域，而 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 是该剖分的三角形. 在顶点集 $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ 上用如下方法构作一个图：每当 T_i 和 T_j 的公共边界是一条其端点标号为 0 和 1 的边时，就连接 v_i 和 v_j（见图 1.15）.

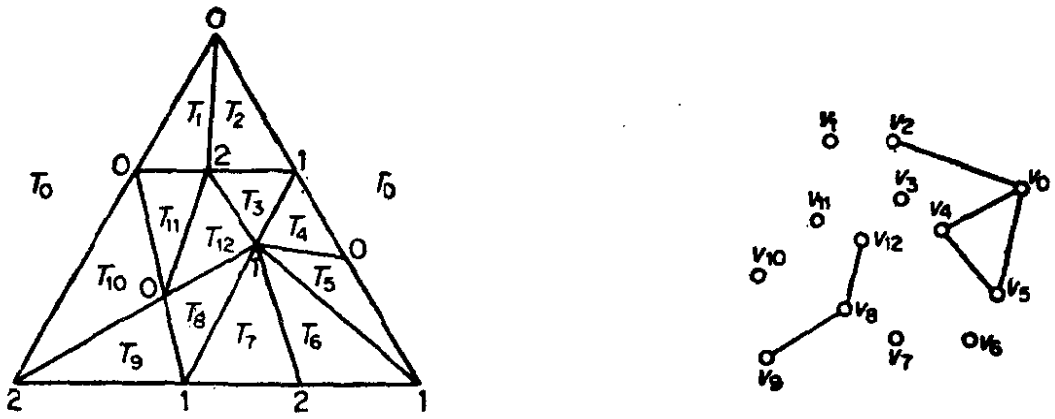


图 1.15

在这个图中，v_0 显然是奇点（习题 1.9.1）. 由推论 1.1 得知：在顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 中有奇数个顶点是奇点. 现在容易看出，这些顶点中没有一个顶点是 3 度的，所以这些顶点的度必为 1. 但顶点 v_i 的度为 1 当仅且当三角形 T_i 是异标三角形.

现简略指出，怎样由 Sperner 引理导出 Brouwer 不动点定理. 为简单起见，仍讨论二维情形. 因为闭 2 维球同胚于闭三角形，因而只要证明从闭三角形到其自身的连续映射有一个不动点即可.

设 T 是给定的具有顶点 x_0, x_1 和 x_2 的闭三角形. 则 T 的每一点 x 可唯一地写为 $x = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$，其中每个 $a_i \geqslant 0$ 且 $\sum a_i = 1$，因而可用向量 (a_0, a_1, a_2) 代表 x；实数 a_0, a_1, a_2 称为 x 的重心坐标.

设 f 是 T 到它自身的任一连续映射，并假设

$$f(a_0, a_1, a_2) = (a_0', a_1', a_2').$$

定义 S_i 为 T 中适合 $a_i' \leqslant a_i$ 的点 (a_0, a_1, a_2) 构成的集. 为证明 f 有一个不动点，只要证明 $S_0 \cap S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ 即可. 因为假设 $(a_0, a_1, a_2) \in S_0 \cap S_1 \cap S_2$，则由 S_i 的定义，对每个 i 有 $a_i' \leqslant a_i$，考虑到

$\sum a_i' = \sum a_i$，就推出

$$(a_0', a_1', a_2') = (a_0, a_1, a_2)$$

换言之，(a_0, a_1, a_2) 是 f 的一个不动点.

考察 T 的任一剖分和一个正常标号，该标号使得标为 i 的每个顶点都属于 S_i，这种标号的存在性是容易看出的(习题1.9.2(a))。由 Sperner 引理推知：在这个剖分中有一个三角形的三个顶点分别属于 S_0，S_1 和 S_2。由于对 T 的任意剖分这一结论均成立，又因为可以选取这样的剖分，使其中每个较小的三角形具有任意小的直径，于是可知存在 S_0，S_1 和 S_2 的三个点，它们互相任意接近。由于 S_i 是闭集(习题 1.9.2(b))，这就推出 $S_0 \cap S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$.

上面证明的细节以及 Sperner 引理的其他应用，请读者参考 Tompkins (1964) 的著作.

习　　题

1.9.1　在 Sperner 引理的证明中，试说明顶点 v_0 是奇点.

1.9.2　在 Brouwer 不动点定理的证明中，试说明：

(a) 存在正常标号，使标为 i 的每个顶点都属于 S_i；

(b) S_i 是闭集.

1.9.3　对高维单纯形的情形，叙述并证明 Sperner 引理.

参 考 文 献

Aho, A. V., Hopcroft, J. E. and Ulman, J. D. (1974). *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass.

Dijkstra, E. W. (1959). A note on two. problems in connexion with graphs. *Numer. Math.*, **1**, 269—71

Dreyfus, S. E. (1969). An appraisal of some shortest-path algorithms. *Operations Res.*, **17**, 395—412

Edmonds, J. (1965). Paths, trees and flowers. *Canad. J. Math.*, **17**, 449—67

Erdos, P. and Gallai, T. (1960). Graphs with prescribed degrees of vertices (Hungarian). *Mat. Lapok*, **11**, 264—74

Frucht, R. (1939). Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe. *Compositio Math*, **6**, 239—50

Hoffman, A. J. and Singleton, R. R. (1960). On Moore graphs with diameters 2 and 3. *IBM J. Res. Develop.*, **4**, 497—504

Sperner, E. (1928). Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. *Hamburger Abhand.*, **6**, 265—72

Tompkins, C. B. (1964). Sperner's lemma and some extensions, in *Applied Combinatorial Mathematics*, ch. 15 (ed. E. F. Beckenbach), Wiley, New York, pp. 416—55

Whiting, P. D. and Hillier, J. A. (1960). A method for finding the shortest route through a road network. *Operational Res. Quart.*, **41**, 37—40

第二章　树

2.1　树

不包含圈的图称为无圈图，连通的无圈图称为树．图2.1给出了有六个顶点的树．

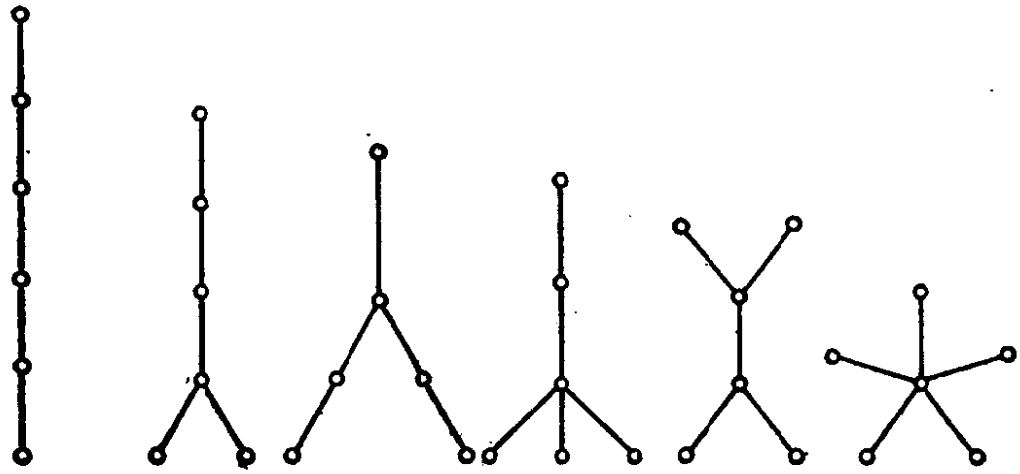


图 2.1　六个顶点的树

定理 2.1　在一棵树中，任意两个顶点均由唯一的路连接．

证　用反证法．设G是树，假设在G中存在两条不同的(u, v)路P_1和P_2．因为$P_1 \neq P_2$，所以存在P_1的一条边$e = xy$，它不是P_2的边．显然，图$(P_1 \cup P_2) - e$是连通的．所以它包含一条(x, y)路P．于是$P + e$就是无圈图G中的圈，导致矛盾．

这个定理的逆命题对没有环的图成立（习题 2.1.1）．

注意，所有六个顶点的树（图 2.1）都有五条边．一般说来有：

定理 2.2　若G是树，则$\varepsilon = \nu - 1$．

证　对ν用归纳法．当$\nu = 1$时，$G \cong K_1$且$\varepsilon = 0 = \nu - 1$．

假设定理对少于ν个顶点的所有树均成立，并设G是有$\nu \geqslant 2$个顶点的树．设$uv \in E$．因为uv是G中唯一的(u, v)路，所以

$G-uv$ 不包含 (u, v) 路. 从而 $G-uv$ 不连通且 $\omega(G-uv)=2$ (习题 1.6.8a). $G-uv$ 的分支 G_1 和 G_2 是无圈且连通的,因此是树. 并且 G_1 和 G_2 的顶点数均小于 v. 所以由归纳法假设,

$$\varepsilon(G_i)=v(G_i)-1, \text{ 对 } i=1,2 \text{ 成立,}$$

从而

$$\begin{aligned}\varepsilon(G)&=\varepsilon(G_1)+\varepsilon(G_2)+1\\&=v(G_1)+v(G_2)-1=v(G)-1\end{aligned}$$

推论 2.2 每棵非平凡树至少有两个 1 度顶点.

证 设 G 是非平凡树. 则

$$d(v)\geqslant 1, \text{ 对所有 } v\in V \text{ 成立,}$$

再由定理 1.1 和 2.2, 有

$$\sum_{v\in V}d(v)=2\varepsilon=2v-2$$

由此推出至少对于两个顶点 v, 有 $d(v)=1$.

推论 2.2 的另一证明方法也许更能说明问题: 证明非平凡树的最长路的起点和终点均是 1 度的 (见习题 2.1.2).

习 题

2.1.1 证明: 若无环图 G 的任意两个顶点均由唯一的路所连接,则 G 是树.

2.1.2 证明: 非平凡树的最长路的起点和终点均是 1 度的, 然后导出推论 2.2.

2.1.3 利用习题 1.7.2 证明推论 2.2.

2.1.4 证明: 每棵恰有两个 1 度顶点的树均是路.

2.1.5 设 G 是有 $v-1$ 条边的图. 证明下述三个语句是等价的:

(a) G 是连通图;

(b) G 是无圈图;

(c) G 是树.

2.1.6 若 G 是树且 $\Delta\geqslant k$, 则 G 至少有 k 个 1 度顶点.

2.1.7 一个无圈图也称为森林. 证明:

(a) 森林的每一个分支是树;

(b) G是森林当且仅当 $\varepsilon = \nu - \omega$.

2.1.8 G的中心是指能使 $\max_{v \in V} d(u, v)$ 尽可能小的顶点 u. 证明: 一棵树或者恰有一个中心,或者有两个相邻的中心.

2.1.9 证明: 若G是森林且恰有$2k$个奇点, 则在G中有k条边不重的路 $P_1, P_2, \cdots, P_k$, 使得 $E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \cdots \cup E(P_k)$.

2.1.10* 证明: 正整数序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$ 是一棵树的度序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu - 1)$.

2.1.11 设T是有 $k+1$ 个顶点的任意一棵树. 证明: 若G是简单图且 $\delta \geqslant k$, 则G有一个子图同构于T.

2.1.12 饱和烃分子形如 C_mH_n, 其中每个碳原子的价键为 4 ,每个氢原子的价键为 1 ,并且任何价键序列都不构成圈. 证明: 对每个正整数 m, 仅当 $n = 2m + 2$ 时 C_mH_n 方能存在.

2.2 割边和键

G的割边是指使得 $\omega(G - e) > \omega(G)$ 的边 e. 图 2.2 给出的图中指出了三条割边.

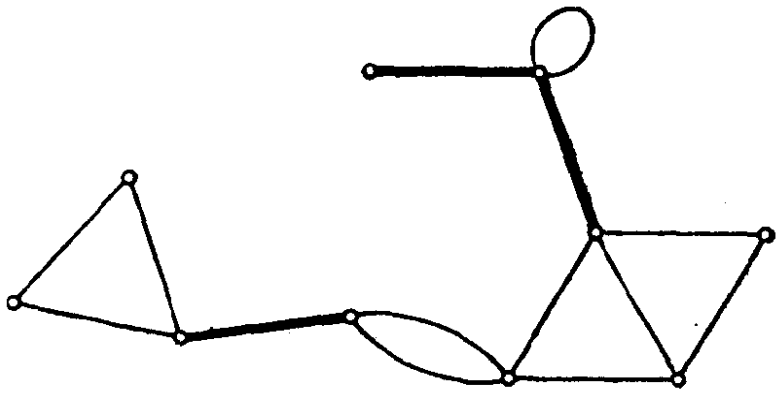


图 2.2 图的割边

定理 2.3 e是G的割边当且仅当e不包含在G的一个圈中.

证 设e是G的割边. 由于 $\omega(G - e) > \omega(G)$, 所以存在$G$的顶点$u$和$v$, 它们在$G$中连通但在 $G - e$ 中不连通. 因此在G中必有某条(u, v)路P经过e. 设x和y是e的端点,并且在P上x前于y. 在$G - e$中, u被P的一节连到x, y被P的一节连到v. 若e在某圈C中, 则在$G - e$中x和y将被路$C - e$所连.

于是，u 和 v 在 $G-e$ 中就连通了，导致矛盾.

反之，假设 $e=xy$ 不是 G 的割边；则 $\omega(G-e)=\omega(G)$. 由于在 G 中存在一条 (x, y) 路 (即 xy)，所以 x 和 y 都在 G 的同一个分支中。由此推知：x 和 y 在 $G-e$ 的同一个分支中，从而在 $G-e$ 中存在一条 (x, y) 路 P. 于是 e 就位于 G 的圈 $P+e$ 中了.

定理 2.4 一个连通图是树当且仅当它的每条边都是割边.

证 设 G 是树且 e 是 G 的边，由于 G 是无圈图，所以 e 不包含在 G 的圈中，由定理 2.3，e 是 G 的割边.

反之，假设 G 连通但不是树，则 G 包含一个圈 C. 由定理 2.3，C 的边不会是 G 的割边.

G 的生成树是指 G 的生成子图，它同时又是树.

推论 2.4.1 每个连通图都包含生成树.

证 设 G 连通并设 T 是 G 的最小连通生成子图. 由定义知 $\omega(T)=1$，且对 T 的每条边 e 有 $\omega(T-e)>1$. 由此推知：T 的每条边均为割边. 而 T 是连通的，故根据定理 2.4，T 是树.

图 2.3 描绘了一个连通图以及它的一棵生成树.

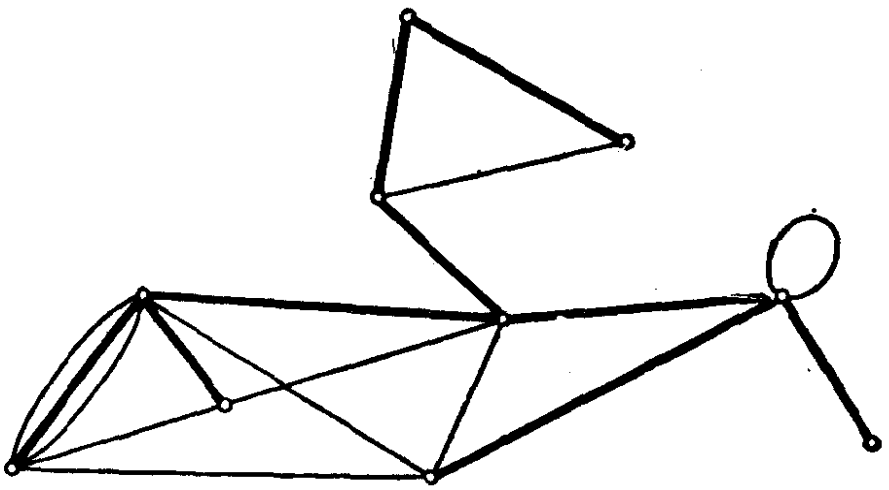


图 2.3 连通图中的一棵生成树

推论 2.4.2 若 G 连通，则 $\varepsilon \geqslant v-1$.

证 设G连通. 由推论 2.4.1, G包含一棵生成树 T. 所以

$$\varepsilon(G) \geqslant \varepsilon(T) = \nu(T) - 1 = \nu(G) - 1$$

定理 2.5 设T是连通图G的生成树,并且 e 是G的不在T中的一条边. 则$T + e$ 包含唯一的圈.

证 由于T是无圈图,因此$T + e$ 的每个圈都包含 e. 此外, C 是$T + e$ 的圈当且仅当$C - e$ 是T中连接 e 的两个端点的路. 由定理 2.1, T 只有一条这样的路;所以 $T + e$ 包含唯一的圈.

对V的子集 S 和 S',用$[S, S']$表示一个端点在 S 中,另一个端点在 S' 中的所有边的集. 所谓G的边割是指形为 $[S, \bar{S}]$ 的E的子集,其中 S 是V的非空真子集,且 $\bar{S} = V \backslash S$. G的极小边割[1]称为键;例如每条割边 e 就给出一个键$\{e\}$. 若G连通, 则G的键B是使$G - B$ 不连通的 E的极小子集. 图 2.4 指出某图的一个边割和一个键.

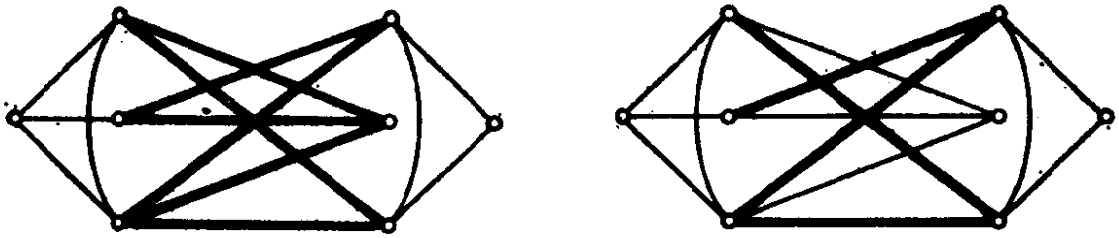


图 2.4 (a) 边割; (b) 键

若H是G的子图, G中H的补图是指子图 $G - E(H)$, 记为 $\overline{H}(G)$. 若G连通, T是G的生成树, 则形为 $\bar{T}$ 的子图称为G的余树.

定理 2.6 设T是连通图G的生成树, e 是T的任一边,则

(i) 余树 $\bar{T}$ 不包含G的键;

(ii) $\bar{T} + e$ 包含G的唯一的键.

证 (i) 设B是G的键. 则$G - B$ 不连通,因而它不能包含生成树 T. 所以 B 不包含在 $\bar{T}$ 中. (ii) 设$T - e$ 的两个分支之一的

1) 极小边割是指其任何真子集均不是边割的边割. ——译者注

顶点集记为 S，则边割 $B = [S, \bar{S}]$ 显然是 G 的键，并且包含在 $\bar{T} + e$ 中．于是，对任何 $b \in B$，$T - e + b$ 是 G 的生成树．所以 G 的每个包含在 $\bar{T} + e$ 中的键，必然包含每一个这样的元素 b．由此推知：B 是 G 的包含在 $\bar{T} + e$ 中的唯一的键．

键和余树之间的关系类似于圈和生成树之间的关系．定理 2.6 的断言 (i) 类似于生成树是无圈的这一简单事实，而 (ii) 类似于定理 2.5．圈和键之间的这种"对偶性"在第十二章将进一步揭示（也可参看习题 2.2.10）．

习　　题

2.2.1　证明：G 是森林当且仅当 G 的每条边均是割边．

2.2.2　设 G 连通且 $e \in E$．证明：

(a) e 在 G 的每棵生成树中当且仅当 e 是 G 的割边；

(b) e 不在 G 的任一生成树中当且仅当 e 是 G 的环．

2.2.3　证明：若 G 是无环图并且恰有一棵生成树 T，则 $G = T$．

2.2.4　设 F 是 G 的最大森林[1]．证明：

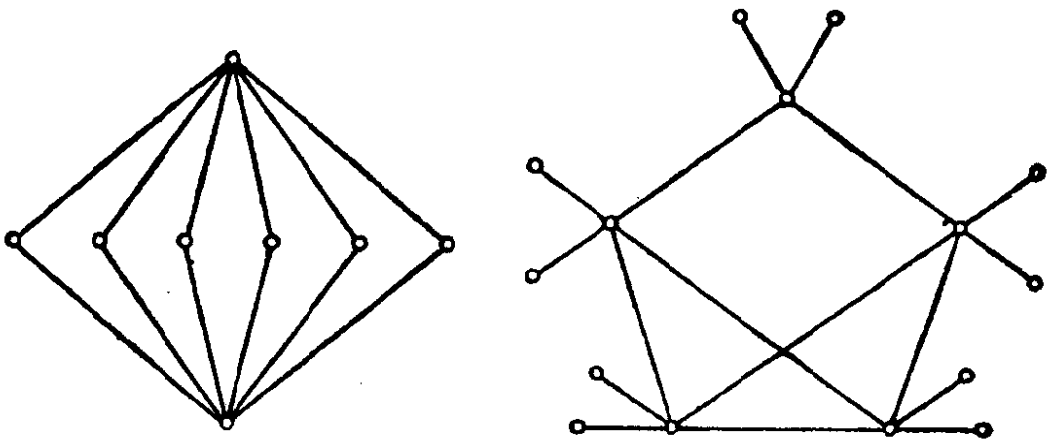
(a) 对 G 的每一个分支 H，$F \cap H$ 是 H 的生成树；

(b) $\varepsilon(F) = \nu(G) - \omega(G)$．

2.2.5　证明：G 至少包含 $\varepsilon - \nu + \omega$ 个不同的圈．

2.2.6　证明：

(a) 若 G 的每个顶点均为偶点，则 G 没有割边；



1) G 的一个最大森林是指 G 中的边数最多的生成森林．——译者注

(b) 若 G 是 k 正则偶图且 $k \geqslant 2$，则 G 没有割边.

2.2.7 在上述图中求非同构生成树的棵数.

2.2.8 设 G 连通且 S 是 V 的非空真子集. 证明：边割 $[S, \bar{S}]$ 是 G 的键当且仅当 $G[S]$ 和 $G[\bar{S}]$ 都连通.

2.2.9 证明：每个边割都是键的边不重并集.

2.2.10 在一个图中设 B_1 和 B_2 是键，C_1 和 C_2 是圈(看作边集).

证明：

(a) $B_1 \triangle B_2$ 是键的边不重并集；

(b) $C_1 \triangle C_2$ 是圈的边不重并集；

这里 $\triangle$ 表示对称差；

(c) 对任意边 e，$(B_1 \cup B_2) \backslash \{e\}$ 都包含键；

(d) 对任意边 e，$(C_1 \cup C_2) \backslash \{e\}$ 都包含圈.

2.2.11 证明：若图 G 包含 k 棵边不重生成树，则对于顶点集 V 的每一个分类 $(V_1, V_2, \cdots, V_n)$，端点在这个分类的不同部分的边的数目至少是 $k(n-1)$. (Tutte 和 Nash-Williams 在 1961 年已经证明：G 包含 k 棵边不重的生成树的这个必要条件也是充分的.)

2.2.12* 设 S 是 n 个元素的集，而 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 S 的 n 个不同子集族. 证明：存在一个元素 $x \in S$，使得集 $A_1 \cup \{x\}$，$A_2 \cup \{x\}$，$\cdots$，$A_n \cup \{x\}$ 均不相同.

2.3 割点

G 的顶点 v 称为割点，如果 E 可以分为两个非空子集 E_1 和 E_2，使得 $G[E_1]$ 和 $G[E_2]$ 恰好有公共顶点 v. 若 G 无环且非平

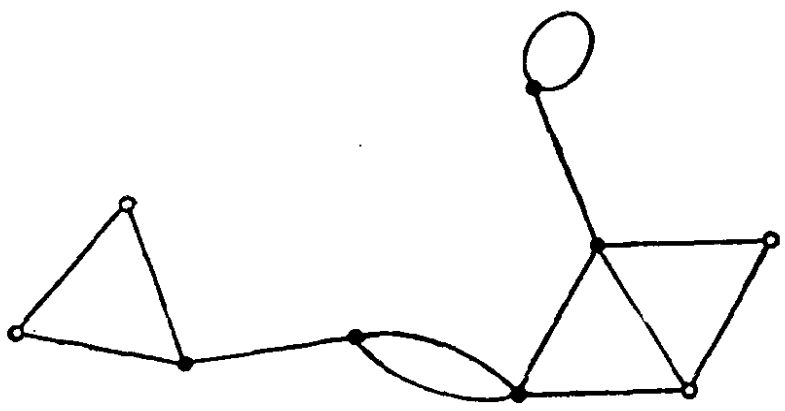


图 2.5 一个图的割点

凡，则 v 是 G 的割点当且仅当 $\omega(G-v)>\omega(G)$。图 2.5 中的图指出了五个割点。

定理 2.7 设 v 是树 G 的顶点，则 v 是 G 的割点当且仅当 $d(v)>1$。

证 若 $d(v)=0$，则 $G\cong K_1$，显然 v 不是割点。

若 $d(v)=1$，则 $G-v$ 是有 $v(G-v)-1$ 条边的无圈图，因此是树(习题 2.1.5)。所以 $\omega(G-v)=1=\omega(G)$，v 不是 G 的割点。

若 $d(v)>1$，则存在相邻于 v 的不同顶点 u 和 w。路 uvw 是 G 中的一条 (u,w) 路。根据定理 2.1，uvw 是 G 中唯一的 (u,w)路。由此推知：在 $G-v$ 中没有(u,w)路，所以 $\omega(G-v)>1=\omega(G)$。于是 v 是 G 的割点。

推论 2.7 每个非平凡的无环连通图，至少有两个不是割点的顶点。

证 设 G 是非平凡无环连通图。由推论 2.4.1，G 包含一棵生成树 T。由推论 2.2 和定理 2.7，T 至少有两个不是割点的顶点。设 v 是任意一个这样的顶点，则 $\omega(T-v)=1$。由于 T 是 G 的生成子图，$T-v$ 是 $G-v$ 的生成子图，所以

$$\omega(G-v)\leqslant\omega(T-v)$$

由此推知：$\omega(G-v)=1$，因而 v 不是 G 的割点。由于至少有两个这样的顶点 v，定理得证。

习　　题

2.3.1 设 G 连通且 $v\geqslant 3$，证明：

(a) 若 G 有割边，则 G 有顶点 v 使 $\omega(G-v)>\omega(G)$；

(b) (a) 的逆命题不一定正确。

2.3.2 证明：恰有两个顶点不是割点的简单连通图是一条路。

2.4 Cayley 公式

对于一个图的生成树的棵数，存在一个简单而优美的递推公

式．它与下面即将介绍的关于边的收缩运算有关．G的边 e 称为被收缩，是指把它删去并使它的两个端点重合；这样得到的图记为 $G \cdot e$．图 2.6 表明了收缩一条边的效果．

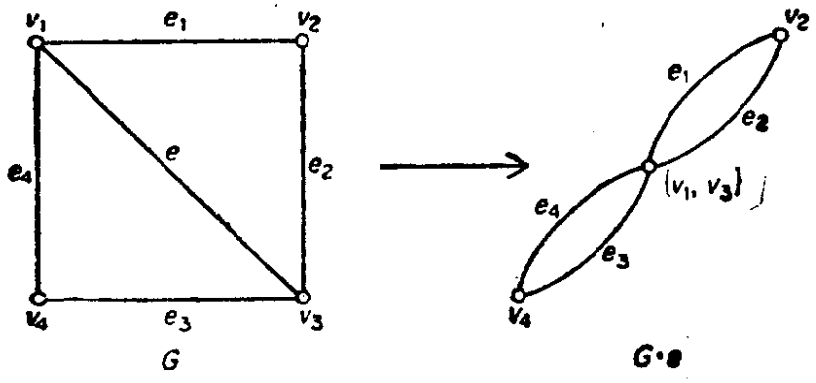


图 2.6　边的收缩

显然若 e 是G的连杆，则

$$\nu(G \cdot e) = \nu(G) - 1$$

$$\varepsilon(G \cdot e) = \varepsilon(G) - 1 \text{ 和 } \omega(G \cdot e) = \omega(G)$$

所以若T是树，则 $T \cdot e$ 也是树．

我们用 $\tau(G)$ 记G的生成树的棵数．

定理 2.8　若 e 是G 的连杆，则 $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$．

证　由于G的每一棵不包含 e 的生成树也是 $G - e$ 的生成树，所以反之，$\tau(G - e)$ 就是G的不包含 e 的生成树的棵数．

对于G的每棵包含 e 的生成树 T，相应有一棵 $G \cdot e$ 的生成树 $T \cdot e$．这个对应显然是一一对应（见图 2.7）．所以 $\tau(G \cdot e)$

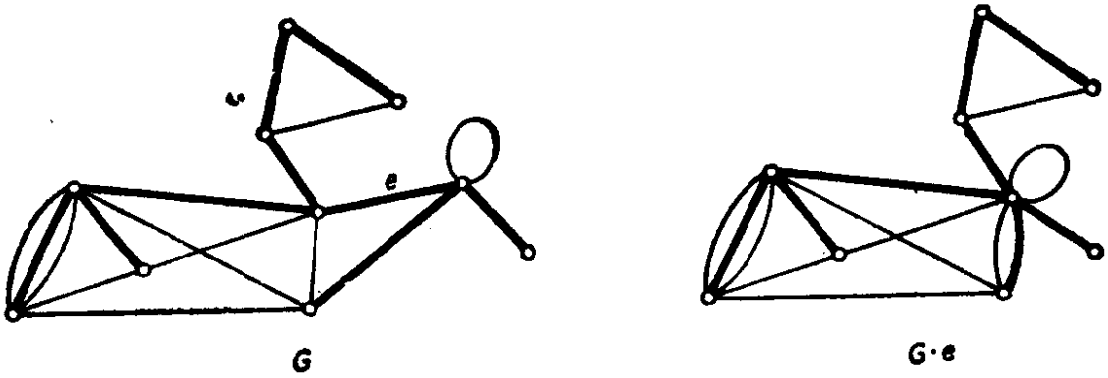


图　2.7

图 2.8 $\tau(G)$ 的递推计算

恰好是G的包含e的生成树的棵数．由此推知：

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$

借助于定理 2.8，图 2.8 阐明了 $\tau(G)$ 的递推计算方法，这里图的生成树的棵数由这个图本身象征性地表示着．

定理 2.8 虽然提供了一个计算图的生成树棵数的方法，但这个方法对于大的图并不适用．有点意外地是，幸而存在一个关于 $\tau(G)$ 的严密的公式，把 $\tau(G)$ 用行列式表达出来． 在第十二章中将给出这一结果．在G是完全图这一特殊情况中，Cayley (1889) 发现了 $\tau(G)$ 的一个简单公式．本书的证明是 Prüfer (1918) 提出的．

定理 2.9 $\tau(K_n) = n^{n-2}$．

证 设 K_n 的顶点集是 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$． 注意，取自N可能组成的长为 $n - 2$ 的序列的个数是 n^{n-2}．于是为了证明本定理，只须在 K_n 的生成树的集和这种序列的集之间建立一一对应就行了．

对于 K_n 的每棵生成树 T．使它与唯一的序列$(t_1, t_2, \cdots t_{n-2})$相联系：把$N$看作一个有序集，设 s_1 是 T 中第一个 1 度顶点；把与 s_1 相邻的那个顶点取作 t_1．现在从 T 中删去 s_1，用 s_2 记 $T - s_1$ 中第一个 1 度顶点，并把与 s_2 相邻的那个顶点作为 t_2． 重复这个手续，直至 t_{n-2} 被确定，留下来恰好是有两个顶点的一棵树；例如图 2.9 中的树产生序列 (4, 3, 5, 3, 4, 5)．可见 K_n 的不同的生成树确定不同的序列．

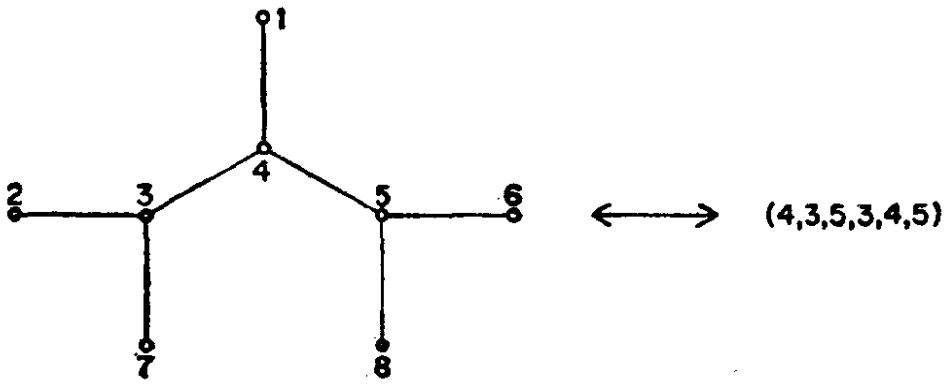


图 2.9

逆过程同样易懂. 首先注意T的任一顶点v在$(t_1, t_2, \cdots, t_{n-2})$中出现$d_T(v)-1$次. 于是$T$中1度顶点恰好是在该序列中未出现的那些顶点. 为了从$(t_1, t_2, \cdots, t_{n-2})$中重新构作$T$, 可按下法进行. 设$s_1$是不在$(t_1, t_2, \cdots, t_{n-2})$中的$N$的第一个顶点; 连接$s_1$与$t_1$. 其次,设$s_2$是不在$(t_2, \cdots, t_{n-2})$中的$N\backslash\{s_1\}$的第一个顶点,并且连接$s_2$与$t_2$. 如此继续下去,直至确定了$n-2$条边$s_1t_1, s_2t_2, \cdots, s_{n-2}t_{n-2}$. 现在添加这样的一条边,它连接$N\backslash\{s_1, s_2, \cdots, s_{n-2}\}$中剩下的两个顶点,即可得到$T$. 容易验证: 不同的序列产生$K_n$的不同的生成树. 这样就建立了所要的一一对应.

注意: n^{n-2}不是K_n的非同构生成树的棵数,而是K_n的不同生成树的棵数; K_6恰好有六棵非同构的生成树(见图2.1),而K_6的不同生成树却有$6^4=1296$棵.

习　　题

2.4.1　利用定理2.8的递推公式,计算$K_{3,3}$的生成树棵数.

2.4.2*　由一个圈添加一个新顶点,并且把这个顶点与圈的所有顶点相连,这样得到的图称为轮. 新的边称为轮的辐. 在具有n条辐的轮中,试给出一个求生成树棵数的表达式.

2.4.3　画出K_4的所有16棵生成树.

2.4.4　证明: 若e是K_n的边,则$\tau(K_n-e)=(n-2)n^{n-3}$.

2.4.5　(a) 设H是每两个相邻顶点都用k条边连接的图,而G是H的基础简单图. 证明: $\tau(H)=k^{v-1}\tau(G)$.

(b) 若图G的每条边用长为k的一条路代替,所得的新图用H表示. 证明: $\tau(H)=k^{e-v+1}\tau(G)$.

(c) 从(b)推出$\tau(K_{2,n})=n2^{n-1}$.

应　　用

2.5　连线问题

假设要建造一个连接若干城镇的铁路网络. 已知城镇v_i和v_j之间直通线路的造价为c_{ij}, 试设计一个总造价最小的铁路网络

这个问题名为连线问题.

把每个城镇看作是具有权 $w(v_iv_j)=c_{ij}$ 的赋权图 G 的顶点，显然问题就转化为：在赋权图 G 中，找出具有最小权的连通生成子图. 由于权表示造价，当然是非负的. 所以可以假定最小权生成子图是 G 的一棵生成树 T. 赋权图的最小权生成树称为最优树；图 2.10 的赋权图中用粗线指出的生成树是一棵最优树（习题 2 5.1）.

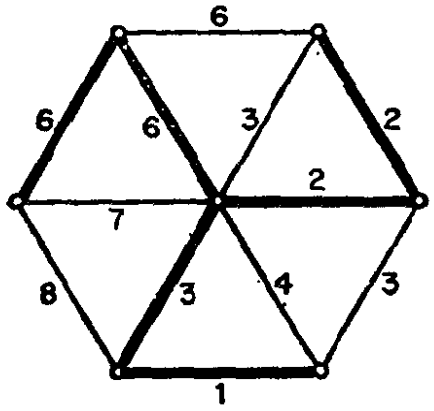


图 2.10 赋权图中的最优树

现在给出在非平凡赋权连通图中寻找最优树的一个好算法，从而解决了连线问题.

首先，探讨每个权 $w(e)=1$ 的情形. 这时，最优树是具有尽可能少的边的生成树. 由于一个图的每一棵生成树具有相同的边数（定理 2.2），所以在这种特殊情况中，只须构作这个图的某一棵生成树就可以了. 找出这种树的一个简单归纳算法如下：

1. 选择一个连杆 e_1.

2. 若已选定边 $e_1, e_2, \cdots, e_i$，则从 $E\backslash\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选取 e_{i+1}，使 $G[\{e_1, e_2, \cdots, e_{i+1}\}]$ 是无圈图.

3. 当第 **2** 步不能继续执行时则停止.

因为连通图的最大无圈子图必然是生成树，所以这个算法是行得通的. Kruskal（1956）把这个算法加以推广进而解决一般的问题；他的算法对任意实数权均有效.

Kruskal 算法

1. 选择连杆 e_1，使得 $w(e_1)$ 尽可能小。

2. 若已选定边 $e_1, e_2, \cdots, e_i$，则从 $E\setminus\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选取 e_{i+1}，使

（i）$G[\{e_1, e_2, \cdots, e_{i+1}\}]$ 为无圈图；

（ii）$w(e_{i+1})$ 是满足 (i) 的尽可能小的权。

3. 当第 2 步不能继续执行时则停止。

作为例子，考察世界上六个最大城市：伦敦 (L)，墨西哥城 (MC)，纽约 (NY)，巴黎 (Pa)，北京 (Pe) 和东京 (T) 之间的航线距离(以英里作单位)表：

	L	MC	NY	Pa	Pe	T
L	—	5558	3469	214	5074	5959
MC	5558	—	2090	5725	7753	7035
NY	3469	2090	—	3636	6844	6757
Pa	214	5725	3636	—	5120	6053
Pe	5074	7753	6844	5120	—	1307
T	5959	7035	6757	6053	1307	—

此表确定了一个顶点为 L，MC，NY，Pa，Pe 和 T 的赋权完全图，它的最优树的构作过程在图 2.11 中表示(其中，为方便起见，距离以百英里计)。

Kruskal 算法显然产生一棵生成树(理由与上面的较简算法相同)。下述定理确保这样的树总是最优的。

定理 2.10 由 Kruskal 算法构作的任何生成树 $T^* = G[\{e_1, e_2, \cdots, e_{v-1}\}]$ 都是最优树。

证 用反证法。对 G 的任何异于 T^* 的生成树 T，用 $f(T)$ 记使 e_i 不在 T 中的最小 i 值。现在假设 T^* 不是最优树，T 是一棵使 $f(T)$ 尽可能大的最优树。

假设 $f(T) = k$；也就是说，$e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}$ 同时在 T 和 T^* 中，但 e_k 不在 T 中。由定理 2.5，$T + e_k$ 包含唯一的圈 C。设 e'_k 是 C 的一条边，它在 T 中而不在 T^* 中。由定理 2.3，e'_k 不是 $T + e_k$ 的割边。因此 $T' = (T + e_k) - e'_k$ 是具有 $v - 1$ 条边

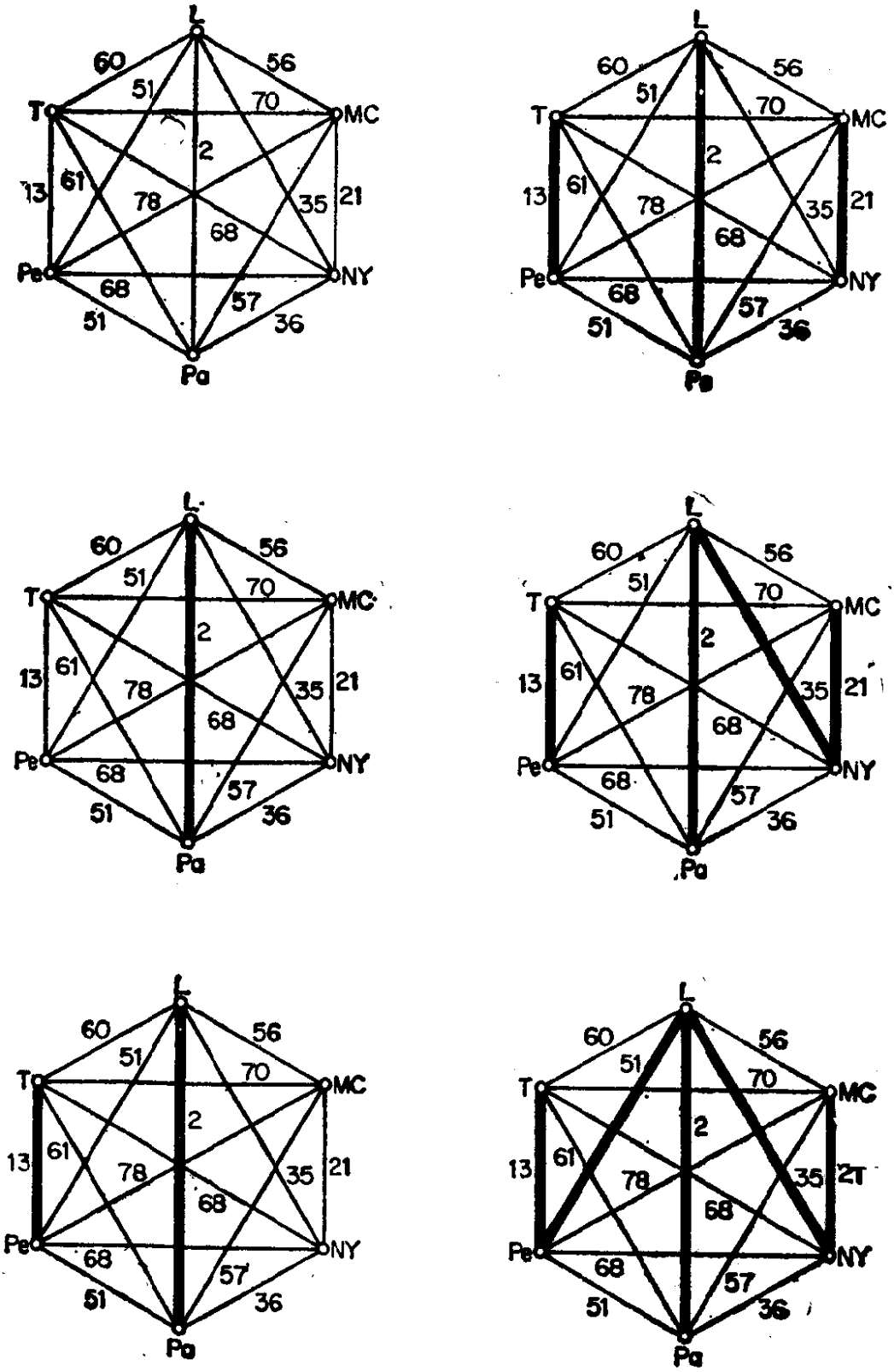


图 2.11

的连通图，所以（习题 2.1.5）它是G的另一棵生成树．显然

$$w(T') = w(T) + w(e_k) - w(e'_k) \qquad (2.1)$$

在 Kruskal 算法中选出的边 e_k，是使 $G[\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}]$ 为无圈图的权最小的边．由于 $G[\{e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}, e'_k\}]$ 是 T 的子图，它也是无圈的．于是得到：

$$w(e'_k) \geqslant w(e_k) \tag{2.2}$$

结合 (2.1) 式和 (2.2) 式，有

$$w(T') \leqslant w(T)$$

所以 T' 也是一棵最优树．然而

$$f(T') > k = f(T)$$

与 T 的选法矛盾．因此 $T = T^*$，从而 T^* 确实是一棵最优树．

Kruskal 算法的框图在图 2.12 中表示．首先把边按权的递增

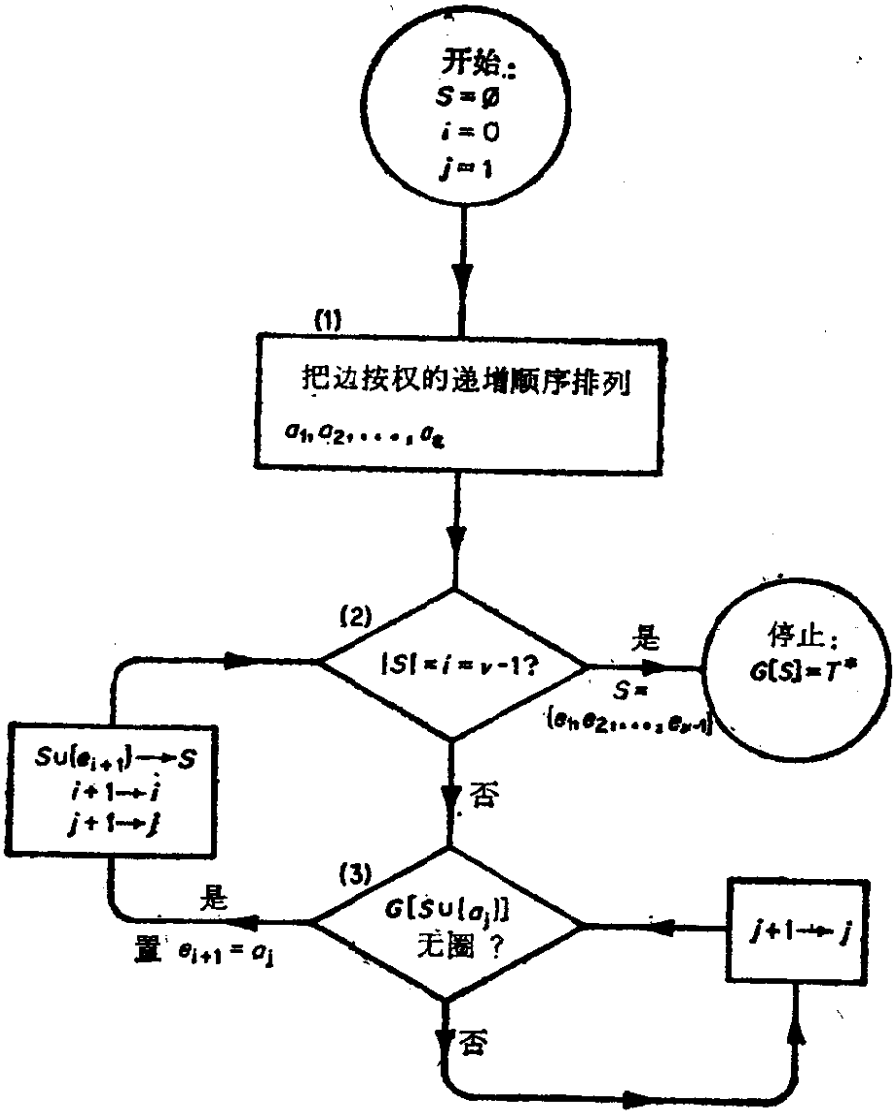


图 2.12　Kruskal 算法

顺序排列(框 1)；这约需 $\varepsilon \cdot \log \varepsilon$ 次计算(见 Knuth, 1973). 框 2 仅仅是检查已选了多少条边. (S 是已选定的边的集，而 i 是这些边的条数.)当 $i = v - 1$ 时，$S = \{e_1, e_2, \cdots, e_{v-1}\}$ 就是 G 的最优树 T^* 的边集. 在框 3 中进行判断：为了检查 $G[S \cup \{a_i\}]$ 是否无圈，就必须查明 a_i 的端点是否在森林 $G[S]$ 的不同分支中. 这可用下面的方法实现. 在任意一步中，这样来给顶点标号：两个顶点属于 $G[S]$ 的同一分支当且仅当它们有相同的标号；最初，顶点 v_l 赋以标号 l，$1 \leqslant l \leqslant v$. 按照这个标号方案，$G[S \cup \{a_i\}]$ 是无圈的当且仅当 a_i 的端点有不同的标号. 若 a_i 的端点标号不同，就取 a_i 作为 e_{i+1}；否则就抛弃 a_i，再检验 e_{i+1} 的下一个候选者 a_{j+1}，一旦 e_{i+1} 加进 S，在各含有 e_{i+1} 一个端点的 $G[S]$ 的两个分支中，用两个标号中较小者，对顶点重新标号. 对每条边，一次比较就足以判定它的端点是否有相同的标号；整个过程要 ε 次计算. 边 e_{i+1} 放入 S 之后，顶点重新标号最多要 v 次比较，因此对所有 $v - 1$ 条边 $e_1, e_2, \cdots, e_{v-1}$，最多需要 $v \cdot (v - 1)$ 次计算. 所以，Kruskal 算法是好算法.

习　　题

2.5.1　应用 Kruskal 算法证明：图 2.10 中给出的树确实是最优的.

2.5.2　用 Kruskal 算法解具有约束的连线问题：用最小费用建造一个连接若干城镇而具有附带要求的网络，即要求某些选定的城镇对是直接连接的.

2.5.3　Kruskal 算法能否用来求：

(a) 赋权连通图中的有最大权的树?

(b) 赋权图中的有最小权的最大森林? 如果可以，怎样实现?

2.5.4　证明：在赋权完全图中，下述 Kruskal 型算法并不一定产生有最小权的生成路：

1. 选一连杆 e_1，使得 $w(e_1)$ 尽可能小.

2. 若边 $e_1, e_2, \cdots, e_i$ 已选定，则用下述方法以 $E \backslash \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选一条边 e_{i+1}：

(i) $G[\{e_1, e_2, \cdots, e_{i+1}\}]$ 是不相交路的并图；

(ii) $w(e_{i+1})$ 是满足 (i) 的尽可能小的权.

3. 当第 2 步不能继续执行时则停止.

2.5.5 连通图 G 的树图是指这样的一个图，它的顶点是 G 的生成树 T_1, T_2, $\cdots$, T_τ, T_i 和 T_j 相连当且仅当它们恰有 $\nu-2$ 条公共边. 证明：任何连通图的树图是连通的.

参 考 文 献

Cayley, A. (1889). A theorem on trees. *Quart. J. Math.*, **23**, 376—78

Knuth, D. E. (1973). *The Art of Computer Programming*, vol. 3: Sorting and Searching, Addison-Wesley, Reading, Mass., p. 184

Kruskal, J. B. Jr. (1956). On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proc. Amer. Math. Soc.* **7**. 48—50

Nash-Williams, C. St. J. A. (1961). Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. *J. London Math. Soc.* **36**, 445—50

Prüfer, H. (1918). Neure Beweis eines Satzes über Permutationen. *Arch Math. Phys.*, **27**, 742—44

Tutte, W. T. (1961). On the problem of decomposing a graph into n connected factors. *J.London Math. Soc.*, **36**, 221—30

第三章 连 通 度

3.1 连通度

在 1.6 节中引进了图的连通概念. 现在来考察图 3.1 的四个连通图.

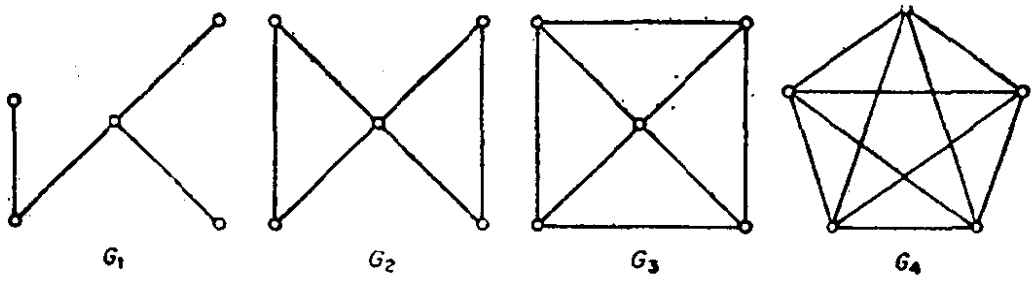


图 3.1

G_1 是树，它是最小连通图；删去任何一条边都将使它不连通. G_2 不会因单单删去一条边而不连通，但删去它的割点就能使它不连通. G_3 中既无割边也无割点，即便如此，G_3 显然不如五个顶点的完全图 G_4 连通得那么好. 因此直观看来，每个后面的图比其前面的图连通程度更强些. 现在要定义图的两个参数：图的连通度和边连通度，用以衡量图的连通程度.

若 V 的子集 V' 使得 $G-V'$ 不连通，则 V' 称为 G 的顶点割. k 顶点割是指有 k 个元素的顶点割. 完全图没有顶点割；事实上，没有顶点割的图也只能是以完全图作为生成子图的那些图. 若 G 至少有一对相异的不相邻顶点，则 G 所具有的 k 顶点割中最小的 k，称为 G 的连通度，记为 $\kappa(G)$；否则定义 $\kappa(G)$ 为 $\nu-1$. 于是，当 G 是平凡的或不连通时，$\kappa(G)=0$. 若 $\kappa(G)\geqslant k$，则称 G 为 k 连通的. 所有非平凡连通图都是 1 连通的.

回想一下 G 的边割的定义，它是 E 的形为 $[S,\bar{S}]$ 的子集，其中 S 是 V 的非空真子集. 一个 k 边割是指有 k 个元素的边割. 若

G非平凡且E'是G的一个边割，则$G-E'$不连通；于是把G的边连通度$\kappa'(G)$定义为：G的所有k边割中最小的k. 若G是平凡的，则$\kappa'(G)$定义为0. 于是，若G平凡或不连通时，则$\kappa'(G)=0$；若G是具有割边的连通图，则$\kappa'(G)=1$. 若$\kappa'(G)\geqslant k$，则G称为k边连通的. 所有非平凡连通图都是1边连通的.

定理 3.1 $\kappa\leqslant\kappa'\leqslant\delta$.

证 若G是平凡的，则$\kappa'=0\leqslant\delta$. 否则，与δ度顶点相关联的连杆集构成了G的一个δ边割，由此推知：$\kappa\leqslant\delta$.

对κ'用归纳法来证明$\kappa\leqslant\kappa'$. 当$\kappa'=0$时命题是正确的，因为此时G是平凡或不连通的. 现在假定命题对一切边连通度小于k的图均成立，并设G是$\kappa'(G)=k>0$的图，而e是G的一个k边割中的边. 置$H=G-e$，则$\kappa'(H)=k-1$. 因此，由归纳法假设知$\kappa(H)\leqslant k-1$.

若H包含完全图作为其生成子图，则G也同样如此，而且

$$\kappa(G)=\kappa(H)\leqslant k-1$$

否则，设S是H的具有$\kappa(H)$个元素的顶点割. 由于$H-S$是不连通的，因此，或者$G-S$是不连通的，并且

$$\kappa(G)\leqslant\kappa(H)\leqslant k-1$$

或者$G-S$是连通的，并且e是它的割边. 在后一情形，或者$\nu(G-S)=2$并且

$$\kappa(G)\leqslant\nu(G)-1=\kappa(H)+1\leqslant k$$

或者(习题2.3.1(a))$G-S$有1顶点割$\{v\}$，从而$S\cup\{v\}$是G的

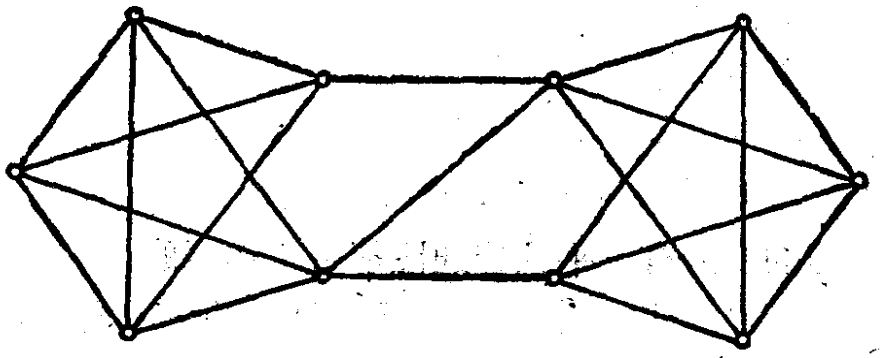


图 3.2

顶点割并且

$$\kappa(G) \leqslant \kappa(H) + 1 \leqslant k$$

于是，在每种情形下，均有 $\kappa(G) \leqslant k - \kappa'(G)$. 按归纳法原理，结果成立.

定理 3.1 中的不等式常常是严格成立的. 例如，图 3.2 中的图 G 有 $\kappa = 2$, $\kappa' = 3$ 和 $\delta = 4$.

习　　题

3.1.1 (a) 证明：若 G 是 k 边连通的，且 $k > 0$，又 E' 是 G 的 k 条边的集，则 $\omega(G - E') \leqslant 2$.

(b) 对 $k>0$，找出一个 k 连通图 G 以及 G 的 k 个顶点的集 V'，使得 $\omega(G - V') > 2$.

3.1.2 证明：若 G 是 k 边连通的，则 $\varepsilon \geqslant k\nu/2$.

3.1.3 (a) 证明：若 G 是简单图且 $\delta \geqslant \nu - 2$，则 $\kappa = \delta$.

(b) 找出一个简单图 G，使得 $\delta = \nu - 3$ 且 $\kappa < \delta$.

3.1.4 (a) 证明：若 G 是简单图且 $\delta \geqslant \nu/2$，则 $\kappa' = \delta$.

(b) 找出一个简单图 G，使得 $\delta = [(\nu/2) - 1]$ 且 $\kappa' < \delta$.

3.1.5 证明：若 G 是简单图且 $\delta \geqslant (\nu + k - 2)/2$ $(k < \nu)$，则 G 是 k 连通的.

3.1.6 证明：若 G 是 3 正则简单图，则 $\kappa = \kappa'$.

3.1.7 证明：若 l, m 和 n 是适合 $0 < l \leqslant m \leqslant n$ 的整数，则存在一个简单图 G，使得 $\kappa = l$, $\kappa' = m$ 和 $\delta = n$. (G. Chartrand 和 F. Harary)

3.2 块

没有割点的连通图称为块. 至少有三个顶点的块是 2 连通的. 一个图的块是指该图的一个子图，这个子图本身是块，而且是有此性质的块中的极大者. 每个图都是它的块的并图；这在图 3.3 中作了解释.

G 中一族路称为内部不相交的，如果 G 中没有这样的顶点，它是这族路中一条以上的路的内部顶点. 下述定理是由 Whitney (1932) 提出的.

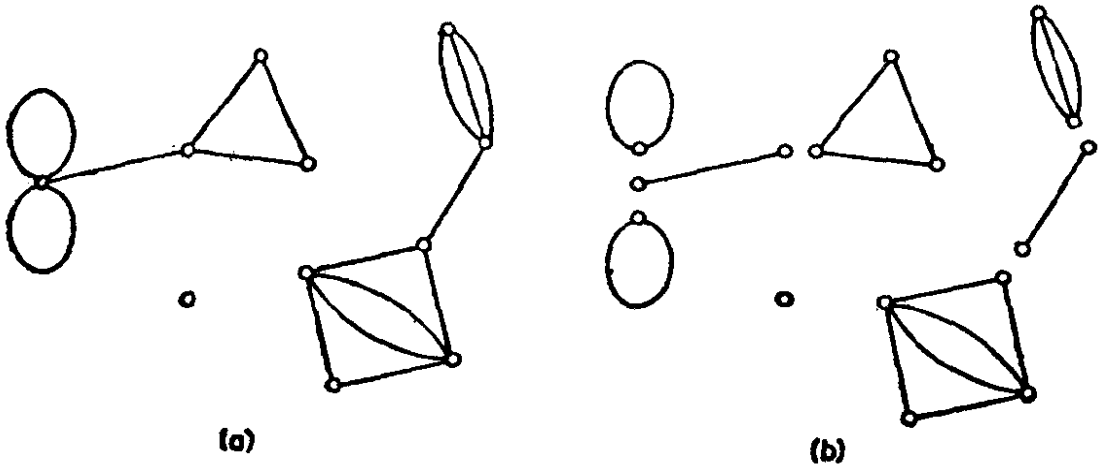


图 3.3 (a) G; (b) G 的块

定理 3.2 一个 $v \geqslant 3$ 的图 G 是 2 连通的，当且仅当 G 的任意两个顶点至少被两条内部不相交的路所连.

证 若 G 的任意两个顶点至少被两条内部不相交的路所连，则显然，G 是连通的，并且没有 1 顶点割. 因此 G 是 2 连通的.

反之，设 G 是 2 连通图. 对 u 和 v 之间的距离 $d(u, v)$ 用归纳法来证明：任意两个顶点 u 和 v 至少被两条内部不相交的路所连.

首先假设 $d(u, v) = 1$. 由于 G 是 2 连通的，因此边 uv 不是割边，由定理 2.3，它包含在某个圈中. 由此推出：u 和 v 被 G 中两条内部不相交的路所连.

现在假设对于距离小于 k 的任意两个顶点定理均成立，并且设 $d(u, v) = k \geqslant 2$. 考察长为 k 的一条 (u, v) 路，并且设 w 是该路上 v 前面的那个顶点. 因为 $d(u, w) = k - 1$，由归纳法假设可知：在 G 中有两条内部不相交的 (u, w) 路 P 和 Q. 又因为 G 是 2 连通的，所以 $G - w$ 是连通的，并且包含一条 (u, v) 路 P'. 设 x 是在 P' 中又在 $P \cup Q$ 中的最后一个顶点（见图 3.4）. 由于 u 在 $P \cup Q$ 中，这样的顶点 x 是存在的；我们不排除 $x = u$ 的可能性.

不失一般性，可假定 x 在 P 中. 于是 G 有两条内部不相交的 (u, v) 路，一条由 P 的一节（从 u 到 x）和 P' 的一节（由 x 到 v）联

合组成，另一条由 Q 和路 wv 组成.

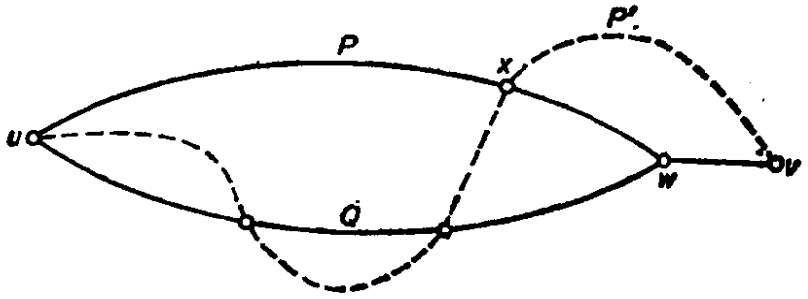


图 3.4

推论 3.2.1 若 G 是 2 连通图，则 G 的任意两个顶点都位于同一个圈上.

证 因为，两顶点位于同一个圈上当且仅当它们由两条内部不相交的路所连，所以这个推论可以从定理 3.2 直接推出.

为了方便，现在引入边的剖分运算. 边 e 称为被剖分，是指删去它，并换上一条连接它的两个端点而长为 2 的路，该路的内部顶点是一个新顶点，如图 3.5 所示.

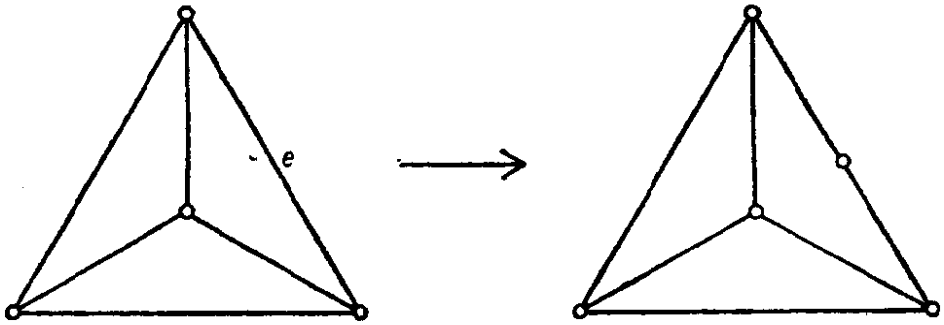


图 3.5 一条边的剖分

可见，由至少有三个顶点的块所组成的类在剖分运算下是封闭的. 下述推论的证明中要用到这个事实.

推论 3.2.2 若 G 是 $v \geqslant 3$ 的块，则 G 的任意两条边都位于同一个圈上.

证 设 G 是 $v \geqslant 3$ 的块，并且 e_1 和 e_2 是 G 的两条边. 将 e_1 和 e_2 剖分构成一个新图 G'，以 v_1 和 v_2 记新顶点. 显然，G' 是至少有五个顶点的块，因而是 2 连通的. 由推论 3.2.1 得出：v_1 和 v_2

位于 G' 的同一个圈上. 于是 e_1 和 e_2 位于 G 的同一个圈上(见图 3.6).

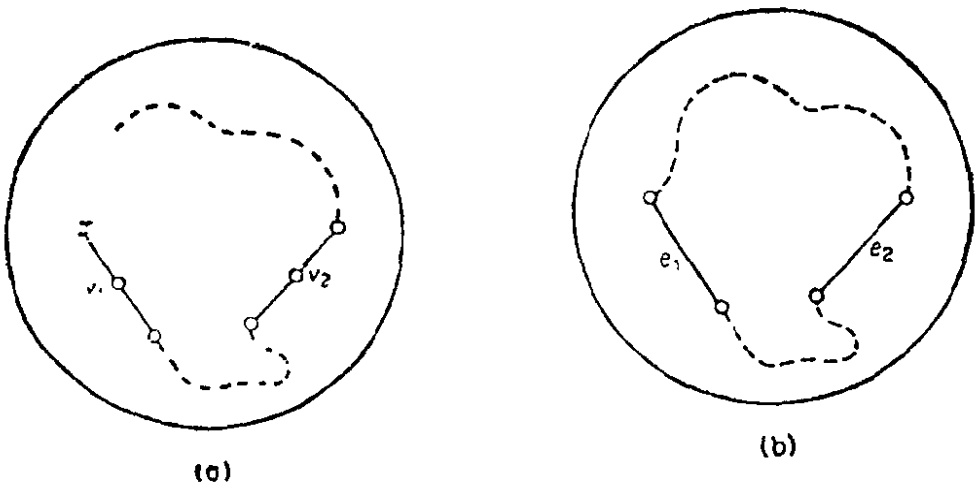


图 3.6 (a) G'; (b) G

定理 3.2 可推广到 k 连通图，名为 Menger 定理：一个 $\nu \geqslant k+1$ 的图 G 是 k 连通的当且仅当 G 的任意两个相异顶点至少被 k 条内部不相交的路所连. 对于边也存在一个类似的定理：图 G 是 k 边连通的当且仅当 G 的任意两个相异顶点至少由 k 条边不重的路所连. 这两个定理的证明将在第十一章中给出.

习 题

3.2.1 证明：一个图是 2 边连通的当且仅当任意两个顶点至少由两条边不重路所连.

3.2.2 举例说明：若 P 是 2 连通图 G 中的 (u, v) 路，则 G 不一定包含一条与 P 内部不相交的 (u, v) 路 Q.

3.2.3 证明：若 G 没有偶圈，则 G 的每个块或是 K_2 或是奇圈.

3.2.4 证明：不是块的连通图至少有两个块，每个恰有一个割点.

3.2.5 证明：G 中块的个数等于 $\omega + \sum_{v \in V} (b(v) - 1)$，这里 $b(v)$ 表示 G 中包含 v 的块的个数.

3.2.6* 设 G 是 2 连通图，而 X 和 Y 是 V 的不相交子集，它们中的每一个至少包含两个顶点. 证明：G 包含不相交的路 P 和 Q 使得

(i) P 和 Q 的起点属于 X,

(ii) P 和 Q 的终点属于 Y，并且

(iii) P 和 Q 的内部顶点都不属于 $X \cup Y$.

3.2.7* 设 G 是非空图. 若对每条边 e, 都有 $\kappa(G-e) < \kappa(G)$, 则称 G 是 κ 临界的.

(a) 证明: 每个 κ 临界的 2 连通图都有一个 2 度顶点.

(Halin, 1969 年已经证明: 一般说来, 每个 κ 临界的 k 连通图都有一个 k 度顶点).

(b) 证明: 若 G 是 $\nu \geq 4$ 的 κ 临界的 2 连通图, 则 $\varepsilon \leq 2\nu - 4$.

(G. A. Dirac)

3.2.8 叙述一个求图的块的好算法.

应　　用

3.3 可靠通讯网络的构造

如果我们认为某图表示一个通讯网络, 那么通讯站(或通讯线路)的最少数目就是图的连通度(或边连通度): 它们的失灵势必危及系统的通讯. 连通度和边连通度越高, 网络就越可靠. 从这个观点来看, 一个树网络, 如 Kruskal 算法得到的那样, 不是非常可靠的, 这就促使我们去考察连线问题的下述推广.

设 k 是给定的正整数, G 是赋权图. 试确定 G 的一个有最小权的 k 连通生成子图.

对 $k=1$, 这个问题简化为连线问题, 它可用 Kruskal 算法求解. 对大于 1 的 k 值, 这个问题还未解决, 并且公认是困难的. 然而若 G 是完全图, 其中每条边的权均指派为 1, 则这个问题有一个简单的解法, 现介绍如下.

注意, 对于有 n 个顶点的每边的权均指派为 1 的赋权完全图而言, 它的有最小权的 m 连通生成子图只不过是一个有 n 个顶点的边数最少的 m 连通图. 我们将用 $f(m, n)$ 表示有 n 个顶点的 m 连通图所能有的最少边数(当然假设 $m < n$). 由定理 3.1 和定理 1.1, 有

$$f(m, n) \geq \{mn/2\} \tag{3.1}$$

通过构作一个 n 个顶点的恰有 $\{mn/2\}$ 条边的 m 连通图 $H_{m,n}$ 我们来证明(3.1)式中的等式成立. $H_{m,n}$ 的结构依赖于 m 和 n 的奇偶性;有三种情形:

情形 1 m 是偶数. 设 $m=2r$. 则 $H_{2r,n}$ 可以构作如下: 它有顶点 $0,1,\cdots,n-1$, 并且当 $i-r\leqslant j\leqslant i+r$ 时(这里取模 n 加法),两顶点 i 和 j 相连. $H_{4,8}$ 在图 3.7(a) 中表示.

情形 2 m 是奇数, n 是偶数. 设 $m=2r+1$. 则 $H_{2r+1,n}$ 构作如下: 首先作出 $H_{2r,n}$ 然后添加一些边,这些边把顶点 i 与顶点 $i+(n/2)$ 相连 $(1\leqslant i\leqslant n/2)$. $H_{5,8}$ 在图 3.7(b) 中表示.

情形 3 m 是奇数, n 是奇数. 设 $m=2r+1$. 则 $H_{2r+1,n}$ 构作如下: 首先作出 $H_{2r,n}$, 然后添加一些边,这些边把顶点 0 连到顶点 $(n-1)/2$ 和 $(n+1)/2$, 并且把顶点 i 连到顶点 $i+(n+1)/2$ $(1\leqslant i\leqslant(n-1)/2)$. $H_{5,9}$ 在图 3.7(c) 中表示.

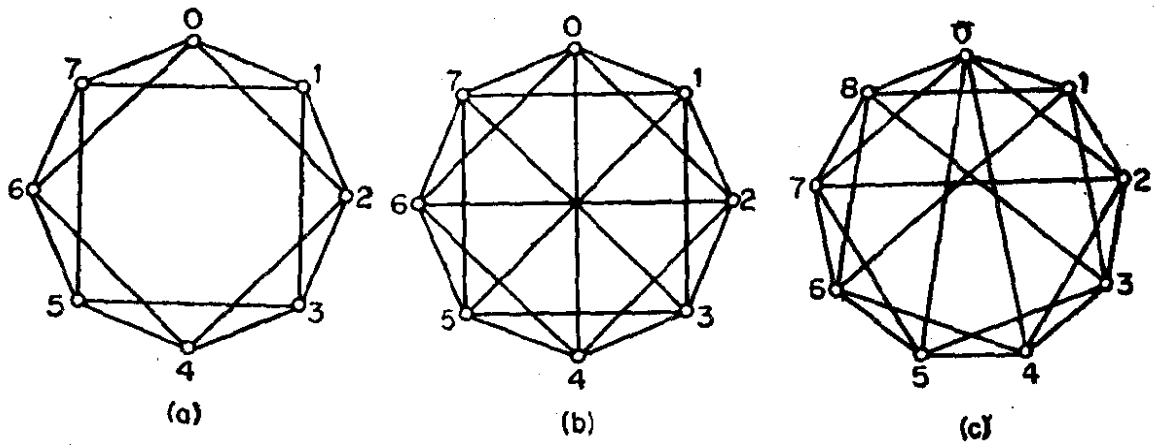


图 3.7 (a) $H_{4,8}$; (b) $H_{5,8}$; (c) $H_{5,9}$

定理 3.3 (Harary, 1962) 图 $H_{m,n}$ 是 m 连通的.

证 考察 $m=2r$ 的情形,我们将证明: $H_{2r,n}$ 中没有少于 $2r$ 个顶点的顶点割. 若有的话,设 V' 是顶点割且 $|V'|<2r$. 设 i 和 j 是属于 $H_{2r,n}-V'$ 的不同分支的两个顶点. 考察两个顶点集

$$S=\{i,i+1,\cdots,j-1,j\}$$

和

$$T=\{j,j+1,\cdots,i-1,i\}$$

这里加法取模 n 加法. 由于 $|V'|<2r$, 不失一般性, 可以假设

$|V' \cap S| < r$。这样，显然在 $S \backslash V'$ 中有一个由不同顶点构成的序列，它开始于 i 而终止于 j，并且任意两个相继项之间的差最多是 r。但是这样的序列就是 $H_{2r,n} - V'$ 中的一条 (i, j) 路，导致矛盾. 因此，$H_{2r,n}$ 是 $2r$ 连通的.

$m = 2r + 1$ 的情形留作习题(习题 3.3.1)

容易看出：$\varepsilon(H_{m,n}) = \{mn/2\}$。于是由定理 3.3，有

$$f(m, n) \leqslant \{mn/2\} \tag{3.2}$$

由 (3.1) 式和 (3.2) 式推知:

$$f(m, n) = \{mn/2\}$$

并且 $H_{m,n}$ 是有 n 个顶点的具有尽可能少的边的 m 连通图.

注意，由于对任何图 G，总有 $\kappa \leqslant \kappa'$ (定理 3.1)，所以 $H_{m,n}$ 也是 m 边连通的. 于是，如果在有 n 个顶点的 m 边连通图中，用 $g(m, n)$ 记它的最小可能的边数，则对 $1 < m < n$，我们有

$$g(m, n) = \{mn/2\} \tag{3.3}$$

习　题

3.3.1　证明：$H_{2r+1,n}$ 是 $(2r + 1)$ 连通的。

3.3.2　证明：$\kappa(H_{m,n}) = \kappa'(H_{m,n}) = m$。

3.3.3　作出一个有 9 个顶点和23条边的 5 连通图，但不同构于图 3.7(c) 中的图 $H_{5,9}$。

3.3.4　证明(3.3)式对 $m > 1$ 和 $n > 1$ 的所有 m 和 n 值均成立。

3.3.5　对所有 $\nu \geqslant 5$，找出一个直径为 2 的 2 连通图 G，使得 $\varepsilon = 2\nu - 5$。(Murty, 1969 年已经证明：每个这样的图，至少有上述边数)。

参 考 文 献

Halin, R. (1969). A theorem on n-connected graphs. *J. Combinatorial Theory*, **7**, 150—54

Harary, F. (1962). The maximum connectivity of a graph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **48**, 1142—46

Murty, U. S. R. (1969). Extremal nonseparable graphs of diameter 2, in *Proof Techniques in Graph Theory* (ed. F. Harary), Academic Press, New

York, pp. 111—18
Whitney, H. (1932). Non-separable and planar graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **34**, 339—62

第四章　Euler 环游和 Hamilton 圈

4.1 Euler 环游

经过G的每条边的迹称为G的 Euler 迹，这是因为 Euler 首先研究了一个图中这种迹的存在性. 在图论的最早著名论文(Euler, 1736) 中，Euler 证明了：在一次穿过城镇的散步中，要通过 Königsberg 城的七座桥，要求每座桥通过一次且只通过一次是不可能做到的. Königsberg 城和 Pregel 河的地图在图 4.1(a)中表示. 可以看出：要证明这样的散步是不可能的，相当于证明图 4.1(b)中的图不包含 Euler 迹.

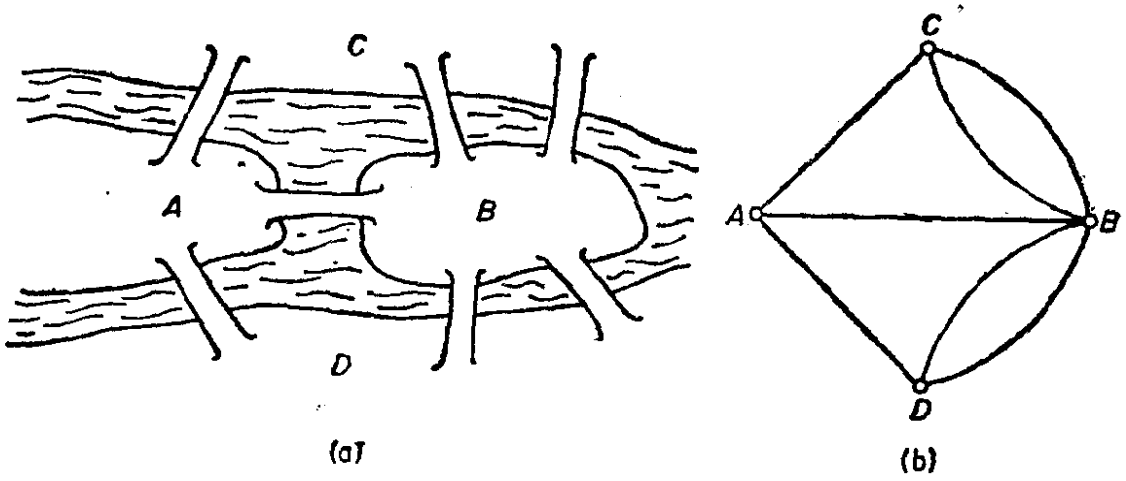


图 4.1　Königsberg 桥及其对应的图

G的环游是指经过G的每条边至少一次的闭途径. Euler 环游是指经过每条边恰好一次的环游（换言之，Euler 环游是闭 Euler 迹). 一个图若包含 Euler 环游，则这个图称为 Euler 图.

定理 4.1　一个非空连通图是 Euler 图当且仅当它没有奇点.

证　设G是 Euler 图，C是G的 Euler 环游，其起点（也是终点）为u. 顶点v作为C的内部顶点每出现一次，就有两条与它关联的边出现，因为 Euler 环游包含G的每条边，所以对于所有的$v \neq u$，$d(v)$都是偶数. 类似地，由于C开始并且终止于u，所以

$d(u)$ 也是偶数. 于是，G 没有奇点.

反之，假设 G 是一个非 Euler 连通图：它至少有一条边，而且没有奇点. 选择这样的一个图 G，使其具有尽可能少的边. 由于 G 的每个顶点的度至少是 2，所以 G 包含一条闭迹（习题 1.7.2）. 设 C 是 G 中其长为最大的闭迹. 根据假设，C 不是 G 的 Euler 环游，因而 $G - E(C)$ 具有适合 $\varepsilon(G') > 0$ 的某一分支 G'. 由于 C 本身是 Euler 图，它没有奇点；于是连通图 G' 也没有奇点. 由于 $\varepsilon(G') < \varepsilon(G)$，根据 G 的选择可以推知：G' 有一条 Euler 环游 C'. 因为 G 是连通的，所以在 $V(C) \cap V(C')$ 中存在一个顶点 v. 不失一般性，可以假定 v 是 C 和 C' 的起点和终点. 于是 CC' 就是 G 的适合 $\varepsilon(CC') > \varepsilon(C)$ 的一条闭迹，和 C 的选择矛盾.

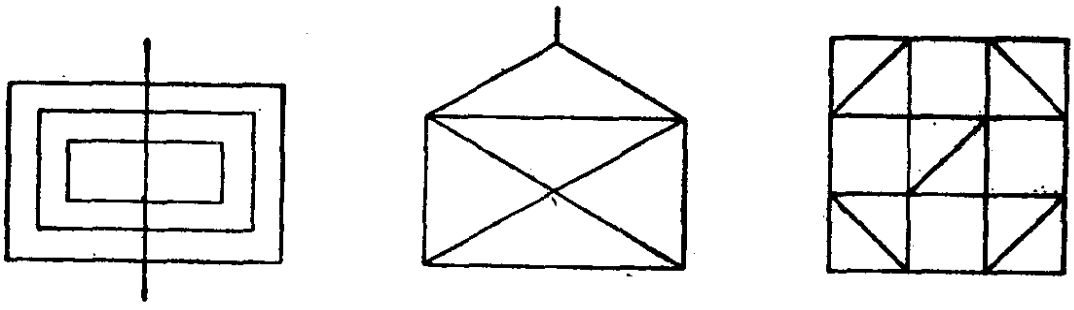
推论 4.1 一个连通图有Euler迹当且仅当它最多有两个奇点.

证 若 G 有 Euler 迹，则如定理 4.1 所证明的，这条迹除起点和终点外的每个顶点都是偶点.

反之，假设 G 是最多有两个奇点的非平凡连通图. 若 G 没有奇点，则由定理 4.1，G 有闭 Euler 迹. 否则，G 恰有两个奇点 u 和 v. 此时，设 $G + e$ 表示 G 中添加连接 u 和 v 的新边 e 所得到的图. 显然，$G + e$ 的每个顶点都是偶点，由定理 4.1，$G + e$ 有 Euler 环游 $C = v_0e_1v_1 \cdots e_{\varepsilon+1}v_{\varepsilon+1}$，这里 $e_1 = e$. 迹 $v_1e_2v_2 \cdots e_{\varepsilon+1}v_{\varepsilon+1}$ 是 G 的一条 Euler 迹.

习　　题

4.1.1 下列图形中哪些能一笔画成（即笔不离纸，线不重复）？



4.1.2 如果可能，画出一个 ν 为偶数而 ε 为奇数的 Euler 图 G，否则说明

为什么不存在这样的图.

4.1.3 证明：若G是 Euler 图，则G的每个块也是 Euler 图.

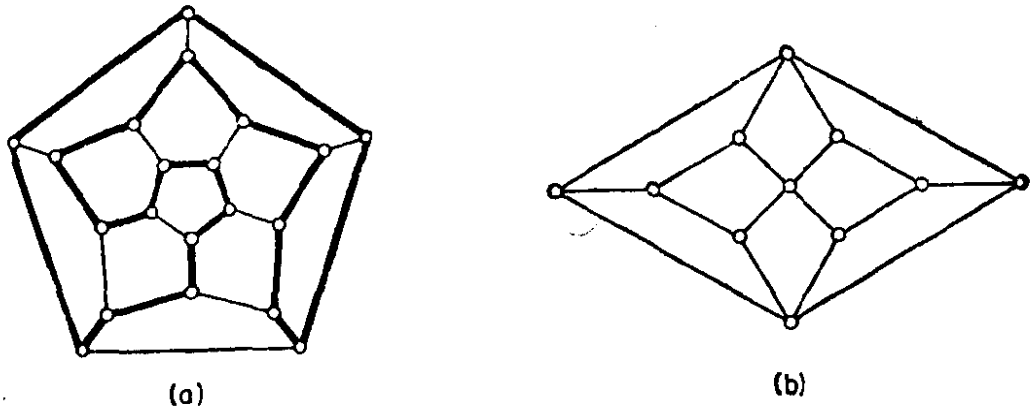
4.1.4 证明：若 G 没有奇点，则存在边不重的圈 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_m$，使得 $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \cdots\cdots \cup E(C_m)$.

4.1.5 证明：若G有 $2k > 0$ 个奇点[1]，则在G中存在k条边不重的迹 $Q_1, Q_2, \cdots\cdots Q_k$，使得 $E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \cdots\cdots \cup E(Q_k)$.

4.1.6* 设G是非平凡的 Euler 图，并且 $v \in V$. 证明：G的每条具有起点 v 的迹都能扩展成G的 Euler 环游当且仅当 $G - v$ 是森林. (O. Ore)

4.2 Hamilton 圈

包含G的每个顶点的路称为G的Hamilton路；类似地，G的Hamilton 圈是指包含G的每个顶点的圈. 这种路和圈用 Hamilton (1856) 的名字命名，是因为他在给他的朋友 Graves 的一封信中描述了关于十二面体(图 4.2(a))的一个数学游戏：一个人在十二面体的任意五个相继的顶点上插上五根大头针，形成一条路，要求另一个人扩展这条路以形成一个生成圈. 一个图若包含 Hamilton 圈，则称这个图是 Hamilton 图. 十二面体是 Hamilton 图 (见图 4.2(a))；Herschel 图(图 4.2(b)) 是非 Hamilton 图，因为它是偶图，并且有奇数个顶点.



(a) (b)

图 4.2 (a) 十二面体 (b) Herschel 图

与 Euler 图的情形相反，到目前为止 Hamilton 图的非平凡的充

1) 应再假设G没有只含偶点的分支. ——译者注

分必要条件尚不知道；事实上这是图论中尚未解决的主要问题之一.

我们首先给出一个简单而有用的必要条件.

定理 4.2 若G是 Hamilton 图，则对于V的每个非空真子集S，均有

$$\omega(G-S)\leqslant|S| \tag{4.1}$$

证 设C是G的 Hamilton 圈，则对于V的每个非空真子集S，均有

$$\omega(C-S)\leqslant|S|.$$

同时，$C-S$是$G-S$的生成子图，因而

$$\omega(G-S)\leqslant\omega(C-S)$$

定理得证.

作为上述定理的一个直观说明，考察图 4.3 的图. 这个图有九个顶点；删去黑点所示的三个顶点，剩下四个分支. 所以不满足(4.1)式，从而由定理 4.2 推知，这个图是非 Hamilton 图.

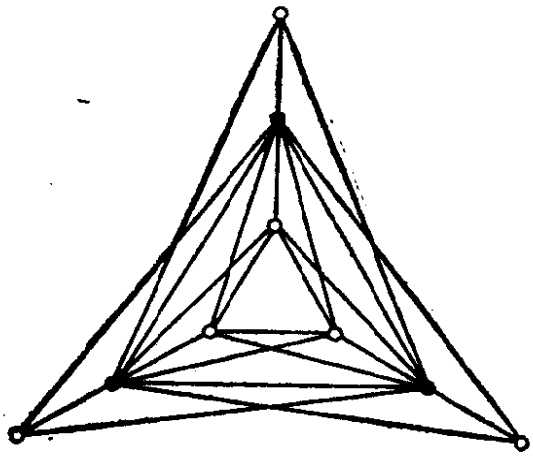


图 4.3

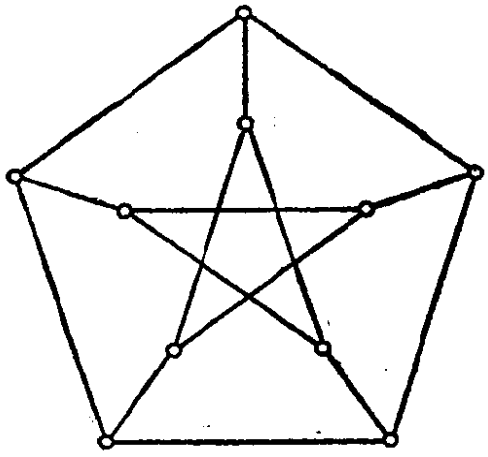


图 4.4 Petersen 图

由此可见，定理 4.2 有时可以用来证明某一特定图是非 Hamilton 图. 可是这个方法并不总是有效的；例如，Petersen 图(图 4.4)是非 Hamilton 图，但是不能利用定理 4.2 来推出这一结果.

现在讨论图G是 Hamilton 图的充分条件；由于一个图是 Hamilton 图当且仅当它的基础简单图是 Hamilton 图，所以只要讨论简单图就够了. 我们从 Dirac (1952) 给出的一个结果开始讨论.

定理 4.3 若G是简单图，且 $\nu \geqslant 3$，$\delta \geqslant \nu/2$，则G是 Hamilton 图.

证 用反证法. 假设定理不成立，设G是 $\nu \geqslant 3$ 和 $\delta \geqslant \nu/2$ 的极大非 Hamilton 简单图. 由于 $\nu \geqslant 3$，所以G不能是完全图. 设 u 和 v 是G的不相邻顶点. 根据G的选择，$G + uv$ 是 Hamilton 图. 并且，由于G是非 Hamilton 图，$G + uv$ 的每个 Hamilton 圈必然包含边 uv，于是在G中存在起点为 $u = v_1$ 终点为 $v = v_\nu$ 的 Hamilton 路 $v_1v_2\cdots v_\nu$. 置

$$S = \{v_i | uv_{i+1} \in E\} \text{ 和 } T = \{v_i | v_iv \in E\}.$$

由于 $v_\nu \notin S \cup T$，故有

$$|S \cup T| < \nu \tag{4.2}$$

而且

$$|S \cap T| = 0 \tag{4.3}$$

因为若 $S \cap T$ 包含某个顶点 v_i，则G将包含 Hamilton 圈 $v_1v_2\cdots v_iv_\nu v_{\nu-1}\cdots v_{i+1}v_1$，与假设矛盾（见图 4.5）.

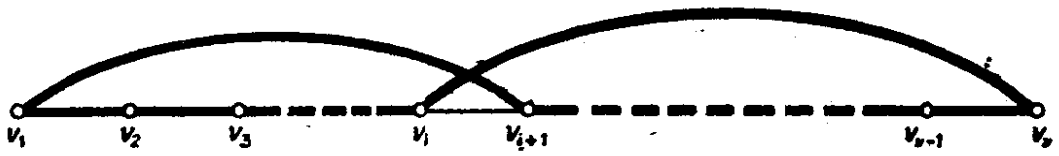


图 4.5

利用 (4.2) 式和 (4.3) 式得到

$$d(u) + d(v) = |S| + |T| = |S \cup T| + |S \cap T| < \nu \tag{4.4}$$

但是这与 $\delta \geqslant \nu/2$ 的假设矛盾.

Bondy 和 Chvátal (1974) 注意到定理 4.3 的证明可以加以修改，获得比 Dirac 更有力的充分条件. 他们的方法基于下述引理.

引理 4.4.1 设G是简单图，u 和 v 是G中不相邻的顶点，且适合

$$d(u) + d(v) \geqslant \nu \tag{4.5}$$

则G是 Hamilton 图当且仅当 $G + uv$ 是 Hamilton 图.

证 若G是 Hamilton 图，则显然 $G + uv$ 也是 Hamilton 图.

反之，假设 $G+uv$ 是 Hamilton 图，而 G 不是，那么和定理 4.3 的证明一样，可得 (4.4) 式. 这与假设 (4.5) 式矛盾.

引理 4.4.1 启发出下述定义. G 的闭包是指用下述方法从 G 中得到的一个图：反复连接 G 中度之和不小于 v 的不相邻的顶点对，直到没有这样的顶点对存在为止. 用 $c(G)$ 表示 G 的闭包.

引理 4.4.2 $c(G)$ 是唯一确定的.

证 设 G_1 和 G_2 是用下述方法从 G 中得到的两个图：反复连接 G 中度之和不小于 v 的不相邻顶点对，直到没有这样的顶点对存在为止. 用 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 和 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 分别表示在构作 G_1 和 G_2 过程中的那些添加给 G 的边的序列，我们将证明每条 e_i 是 G_2 的边，而每条 f_j 是 G_1 的边.

如有可能，设 $e_{k+1}=uv$ 是序列 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 中第一条不属于 G_2 的边. 置 $H=G+\{e_1, e_2, \cdots e_k\}$. 从 G_1 的定义推知：

$$d_H(u)+d_H(v)\geqslant v$$

根据 e_{k+1} 的选择，H 是 G_2 的子图. 因此

$$d_{G_2}(u)+d_{G_2}(v)\geqslant v$$

这就导致矛盾，因为在 G_2 中 u 和 v 是不相邻的. 所以每条 e_i 都是 G_2 的边，并且类似地，每条 f_j 也都是 G_1 的边. 因此 $G_1=G_2$，即 $c(G)$ 是唯一确定的.

图 4.6 表明了有六个顶点的一个图 G 的闭包的构作过程. 在这个例子中 $c(G)$ 是完全图；但要注意，这并不意味着闭包一定是完全图.

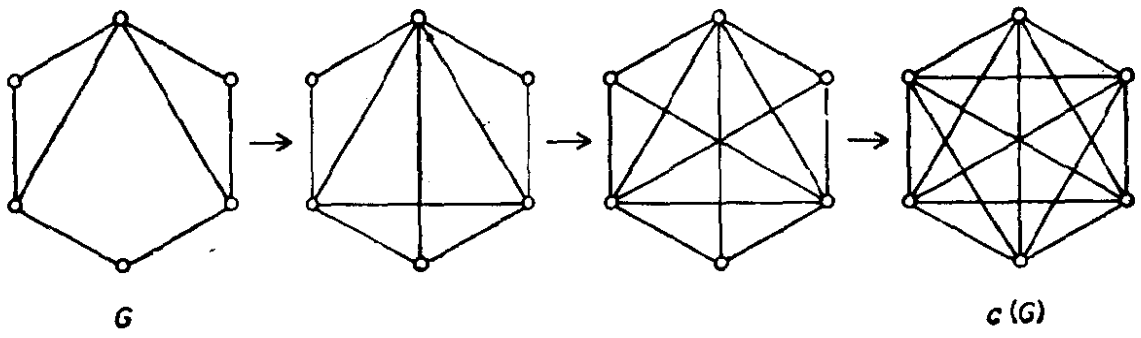


图 4.6 一个图的闭包

定理 4.4 一个简单图是 Hamilton 图当且仅当它的闭包是 Hamilton 图.

证 在构作闭包的过程中,每添加一条边就应用引理 4.4.1 一次,即可证明本定理.

定理 4.4 有许多有趣的推论. 首先,只要稍加注意,就知道所有至少有三个顶点的完全图都是 Hamilton 图,因而有下述结果.

推论 4.4 设 G 是 $v \geqslant 3$ 的简单图. 若 $c(G)$ 是完全图,则 G 是 Hamilton 图.

例如,考察图 4.7 的图. 容易检验,它的闭包是完全图. 因此,由推论 4.4,它本身也是 Hamilton 图. 有趣的是,只要在图 4.3 的图中仅仅改动一条边的一个端点,就可以得到图 4.7 的图,然而已有的结果(推论 4.4 和定理 4.2)说明这个图是 Hamilton 图,而原来的图则不是.

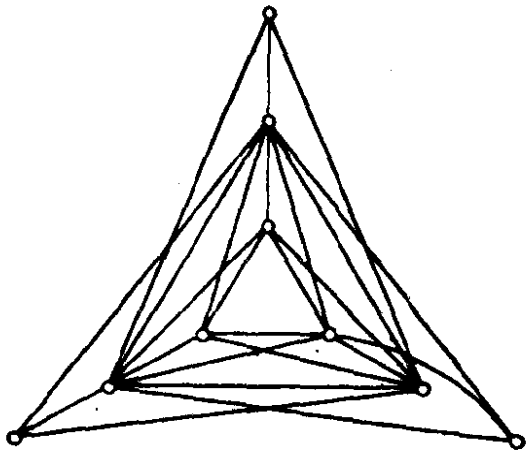


图 4.7 一个 Hamilton 图

可以用推论 4.4 来推导一个图是 Hamilton 图的各种以顶点度表达的充分条件. 例如,当 $\delta \geqslant v/2$ 时,$c(G)$ 显然是完全图,Dirac 条件(定理 4.3)是它的直接推论. 一个比 Dirac 条件更一般的条件是由 Chvátal (1972) 得到的.

定理 4.5 设 G 是度序列为 $(d_1, d_2, \cdots\cdots, d_v)$ 的简单图,这里 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots\cdots \leqslant d_v$,并且 $v \geqslant 3$. 若不存在小于 $v/2$ 的 m,使得 $d_m \leqslant m$ 和 $d_{v-m} < v - m$,则 G 是 Hamilton 图.

证 设 G 满足定理的条件. 我们将证明它的闭包 $c(G)$ 是完全图,从而由推论 4.4 推出定理的结论. 用 $d'(v)$ 记 $c(G)$ 中顶点 v 的度.

假设 $c(G)$ 不是完全图,设 u 和 v 是 $c(G)$ 中两个不相邻的

顶点，适合

$$d'(u) \leqslant d'(v) \tag{4.6}$$

且 $d'(u)+d'(v)$ 尽可能地大；由于在 $c(G)$ 中没有两个不相邻的顶点的度之和为 v 或更大，就有

$$d'(u)+d'(v)<v \tag{4.7}$$

用 S 记 $V\backslash\{v\}$ 中的在 $c(G)$ 中不与 v 相邻的顶点集，用 T 记 $V\backslash\{u\}$ 中的在 $c(G)$ 中不与 u 相邻的顶点集，显然有

$$\text{及}\quad \begin{aligned} |S| &= v-1-d'(v) \\ |T| &= v-1-d'(u) \end{aligned} \tag{4.8}$$

此外，根据 u 和 v 的选择，S 中的每个顶点的度最多是 $d'(u)$，而 $T\cup\{u\}$ 中的每个顶点的度最多是 $d'(v)$，置 $d'(u)=m$，利用(4.7)式和(4.8)式，就发现 $c(G)$ 至少有 m 个顶点，其度最多是 m，并且至少有 $v-m$ 个顶点，其度小于 $v-m$。因为 G 是 $c(G)$ 的生成子图，上述结论对图 G 也成立；所以 $d_m \leqslant m$，且 $d_{v-m}<v-m$。这与假设矛盾，因为由(4.6)式和(4.7)式，$m<v/2$。于是，$c(G)$ 确实是完全图，再由推论 4.4，即得 G 是 Hamilton 图。

对于一个给定的图，常可简单地通过计算它的度序列，并应用定理 4.5 来断定它是 Hamilton 图。这个方法适用于图 4.7 的图，但不适用于图 4.6 的图，尽管后者的闭包是完全图。从这些例子我们看到，定理 4.5 比定理 4.3 强，但不及推论 4.4 强。

一个实数序列 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 称为弱于另一个实数序列 $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 如果 $p_i \leqslant q_i$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$ 成立。图 G 称为度弱于图 H 如果 $v(G)=v(H)$，并且 G 的不减度序列弱于 H 的不减度序列。例如，5 圈度弱于 $K_{2,3}$，这是因为 $(2,2,2,2,2)$ 弱于 $(2,2,2,3,3)$。度极大的非 Hamilton 图(即它不度弱于其它非 Hamilton 图)的族可以简单地描述。为此先介绍两个图的联图的概念。不相交的图 G 和 H 的联图 $G\vee H$ 是指在 $G+H$ 中，把 G 的每个顶点和 H 的每个顶点连接起来所得到的图，其示意表示如图 4.8 所示。

对于 $1 \leqslant m < n/2$，设 $C_{m,n}$ 表示图 $K_m \vee (K_m^c + K_{n-2m})$，它

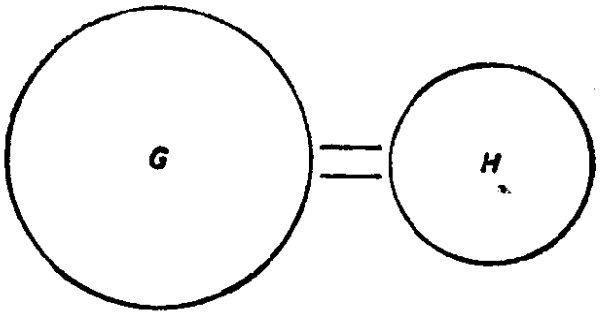


图 4.8　G和H的联图

示于图 4.9(a) 中；两个特殊的例子 $C_{1,5}$ 和 $C_{2,5}$ 在图 4.9(b) 和 4.9(c) 中给出。

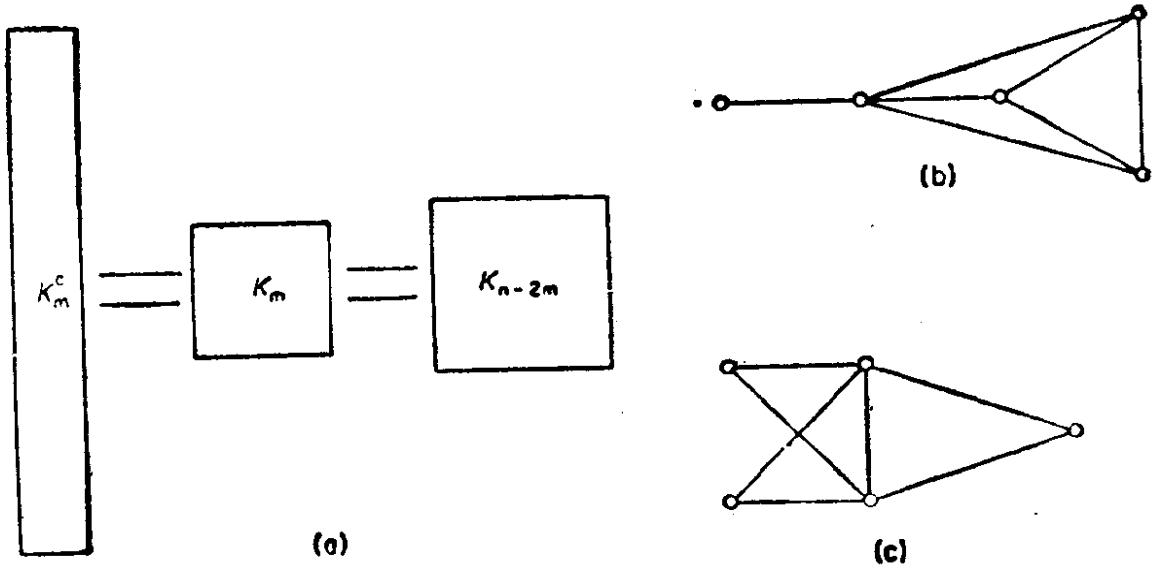


图 4.9　(a) $C_{m,n}$　(b) $C_{1,5}$　(c) $C_{2,5}$

因为若 S 表示 $C_{m,n}$ 中度为 $n-1$ 的 m 个顶点的集，就有 $\omega(C_{m,n}-S)=m+1>|S|$，所以从定理 4.2 立即推知：$C_{m,n}$ 是非 Hamilton 图。

定理 4.6 (Chvátal, 1972)　若G是$v\geqslant 3$的非 Hamilton 简单图，则G度弱于某个 $C_{m,v}$。

证　设G是度序列为$(d_1, d_2, \cdots, d_v)$的非 Hamilton 简单图，这里 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant d_v$，$v\geqslant 3$。则由定理 4.5，存在 $m<v/2$，使得 $d_m\leqslant m$ 且 $d_{v-m}<v-m$。因此 $(d_1, d_2, \cdots, d_v)$ 弱于下面的序列：

$(m, \cdots, m, v-m-1, \cdots, v-m-1, v-1, \cdots, v-1)$，

这个序列有 m 项等于 m，有 $\nu-2m$ 项等于 $\nu-m-1$，有 m 项等于 $\nu-1$，因而它就是 $C_{m,\nu}$ 的度序列.

从定理 4.6 可以推导出 Ore (1961) 和 Bondy (1972) 得到的一个结果.

推论 4.6 若 G 是 $\nu\geqslant 3$ 且 $\varepsilon>\binom{\nu-1}{2}+1$ 的简单图，则 G 是 Hamilton 图，并且，具有 ν 个顶点和 $\binom{\nu-1}{2}+1$ 条边的非 Hamilton 简单图只有 $C_{1,\nu}$ 以及，当 $\nu=5$ 时还有 $C_{2,5}$.

证 设 G 是 $\nu\geqslant 3$ 的非 Hamilton 简单图. 由定理 4.6，对于某个正整数 $m<\nu/2$，G 度弱于 $C_{m,\nu}$. 因此，由定理 1.1，有

$$\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(C_{m,\nu}) \tag{4.9}$$

$$=\frac{1}{2}[m^2+(\nu-2m)(\nu-m-1)+m(\nu-1)]$$

$$=\binom{\nu-1}{2}+1-\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$$

$$-(m-1)(\nu-2m-1)$$

$$\leqslant\binom{\nu-1}{2}+1 \tag{4.10}$$

并且，仅当 G 具有和 $C_{m,\nu}$ 相同的度序列时，(4.9) 式中等式成立；又仅当 $m=2$ 且 $\nu=5$，或者 $m=1$ 时，(4.10)式中等式成立. 因此 $\varepsilon(G)$ 能等于 $\binom{\nu-1}{2}+1$ 仅当 G 与 $C_{1,\nu}$ 或 $C_{2,5}$ 有相同的度序列，易知这意味着 $G\cong C_{1,\nu}$ 或者 $G\cong C_{2,5}$.

习　　题

4.2.1 证明：若

(a) G 不是 2 连通图，或者

(b) G 是具有二分类 (X,Y) 的偶图，这里 $|X|\neq|Y|$，则 G 是非 Hamilton 图.

4.2.2 一只老鼠边吃边走通过一块 $3\times3\times3$ 立方体的奶酪，要通过所有

(27 个) $1 \times 1 \times 1$ 子立方体，若它从某个角落开始，并且每次总是移动到一个未被吃过的子立方体，它能否最后到达立方体的中心？

4.2.3 证明：若 G 有 Hamilton 路，则对于 V 的每个真子集 S，有 $\omega(G-S) \leqslant |S| + 1$。

4.2.4* 设 G 是具有度序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$ 的非平凡简单图，这里 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_\nu$。证明：若不存在小于 $(\nu+1)/2$ 的 m 值，使得 $d_m < m$ 且 $d_{\nu-m+1} < \nu - m$，则 G 有 Hamilton 路。 (V. Chvátal)

4.2.5 (a) 设 G 是具有度序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$ 的简单图，并且 G^c 有度序列 $(d_1', d_2', \cdots, d_\nu')$。这里 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots\cdots \leqslant d_\nu$ 及 $d_1' \leqslant d_2' \leqslant \cdots\cdots \leqslant d_\nu'$。证明：若对所有 $m \leqslant \nu/2$，$d_m \geqslant d_m'$ 成立，则 G 有 Hamilton 路。

(b) 试证：若 G 是自补图，则 G 有 Hamilton 路。

4.2.6* 设 G 是具有二分类 (X, Y) 的简单偶图，这里 $|X| = |Y| \geqslant 2$，并且 G 有度序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_\nu)$，这里 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_\nu$。证明：若不存在小于或等于 $\nu/4$ 的 m，使得 $d_m \leqslant m$ 且 $d_{\nu/2} \leqslant \nu/2 - m$，则 G 是 Hamilton 图。 (V. Chv'atal)

4.2.7 试直接从推论 4.4 证明推论 4.6。

4.2.8 证明：若 G 是适合 $\nu \geqslant 6\delta$ 且 $\varepsilon > \binom{\nu-\delta}{2} + \delta^2$ 的简单图，则 G 是 Hamilton 图。 (P. Erdös)

4.2.9* 证明：若 G 是 $\nu > 2\delta$ 的连通简单图，则 G 有长至少是 2δ 的路。 (G. A. Dirac)

(Dirac 1952 年还证明：若 G 是 $\nu \geqslant 2\delta$ 的 2 连通简单图，则 G 有长至少是 2δ 的圈。)

4.2.10 利用习题 4.2.9 的注证明：每个有 $(4k+1)$ 个顶点的 $2k$ 正则简单图都是 Hamilton 图 $(k \geqslant 1)$。 (C. St. J. A. Nash-Williams)

4.2.11 若 G 的每两个顶点都由 Hamilton 路连接着，则 G 称为 Hamilton 连通图。

(a) 证明：若 G 是 Hamilton 连通图且 $\nu \geqslant 4$，则 $\varepsilon \geqslant \left[\frac{1}{2}(3\nu+1)\right]$。

(b)* 对于 $\nu \geqslant 4$，构作一个 $\varepsilon = \left[\frac{1}{2}(3\nu+1)\right]$ 的 Hamilton 连通图 G。 (J. W. Moon)

4.2.12 若 G 不是 Hamilton 图，但对于每一个 $v \in V$，$G - v$ 都是 Hamilton 图，则 G 称为超 Hamilton 图。证明：Petersen 图(图 4.4)是超 Hamilton

图.

(Herz, Duby 和 Vigué 1967 年已证明：事实上，它是最小的超 Hamilton 图.)

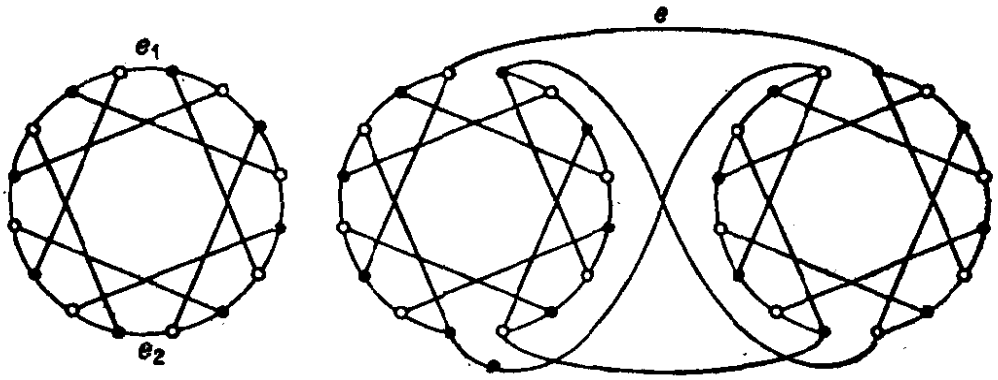
4.2.13* 若 G 没有 Hamilton 路，但对于每一个 $v \in V$，$G - v$ 都有 Hamilton 路，则 G 称为超可描画图.

证明：Thomassen 图（见附录 III）是超可描画图.

4.2.14 (a) 证明：在下面的 G_1 中不存在恰好包含 e_1 或 e_2 的 Hamilton 圈.

(b) 利用 (a) 证明：在 G_2 中每个 Hamilton 圈都包含边 e.

(c) 试证：Horton 图（见附录 III）是非 Hamilton 图.



4.2.15 对下列问题给出一个好算法：

(a) 构作一个图的闭包；

(b) 若某图的闭包是完全图，求该图的 Hamilton 圈.

应　　用

4.3 中国邮递员问题

邮递员的工作是：在邮局里选出邮件，递送邮件，然后再返回邮局. 自然，他必须走过他投递范围内的每一条街道至少一次. 在这个前提下，希望选择一条尽可能短的路线. 这个问题名为中国邮递员问题，因为它首先是中国数学家管梅谷(1962)研究的.

在一个赋权图中，环游 $v_0e_1v_1\cdots e_nv_0$ 的权定义为 $\sum_{i=1}^{n} w(e_i)$.

显然，中国邮递员问题就是在具有非负权的赋权连通图中找出一条最小权的环游．这种环游称为最优环游．

若G是 Euler 图，则G的任何 Euler 环游都是最优环游，因为 Euler 环游是一条通过G的每条边恰好一次的环游．在这种情形下，中国邮递员问题是容易解决的，因为在 Euler 图中，存在着确定Euler环游的好算法．由 Fleury 提出的算法(见 Lucas 1921)，用依次描画一条迹的方法来构作 Euler 环游，而这种描画服从一个条件：在每一步中，未描画的子图的割边仅当没有别的边可选择时才被描画．

Fleury 算法

1. 任意选取一个顶点v_0，置 $W_0 = v_0$．

2. 假设迹 $W_i = v_0e_1v_1\cdots e_iv_i$ 已经选定，那么按下述方法从 $E\backslash\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选取边 e_{i+1}：

(i) e_{i+1}和 v_i 相关联；

(ii) 除非没有别的边可选择，否则 e_{i+1} 不是$G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 的割边．

3. 当第 **2** 步不能再执行时，算法停止．

根据这个定义可知，Fleury 算法作出G中的一条迹．

定理4.7 若G是 Euler 图，则G中任一用 Fleury 算法作出的迹都是G的 Euler 环游．

证 设G是 Euler 图，$W_n = v_0e_1v_1\cdots e_nv_n$ 是G中用 Fleury 算法作出的迹．显然，终点v_n在G_n中的度必然为零．由此推知，$v_n = v_0$；换言之，W_n是闭迹．

现在假设W_n不是G的 Euler 环游，并且设S是G_n中度为正的顶点集．那么，S是非空的，且 $v_n \in \bar{S}$，这里 $\bar{S} = V\backslash S$．设m是使得 $v_m \in S$ 以及 $v_{m+1} \in \bar{S}$ 的最大整数．由于W_n终止于$\bar{S}$，所以 e_{m+1} 是 G_m 中 $[S, \bar{S}]$ 的仅有的一条边，因此也就是G_m的一条割边(见图 4.10)．

设e是G_m中和v_m关联的另外任意一条边．可以推得(第 **2**

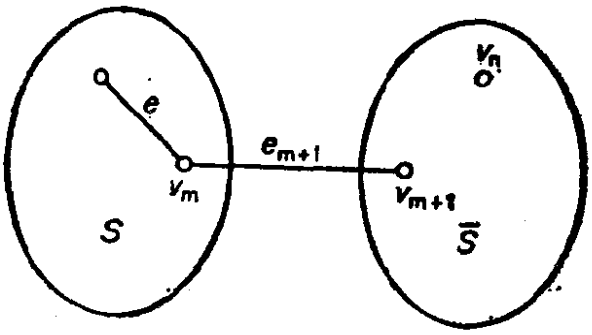


图 4.10

步)：e 必然也是 G_m 的一条割边，因而是 $G_m[S]$ 的割边．但是由于 $G_m[S] = G_n[S]$，所以 $G_m[S]$ 中的每个顶点都是偶点．可是由此推出 $G_m[S]$ 没有割边（习题 2.2.6(a)），导致矛盾．

Fleury 算法是好算法的证明留作习题（习题 4.3.2）．

若 G 不是 Euler 图，则 G 的任何环游，特别是 G 的最优环游，通过某些边将超过一次．例如，在图 4.11(a) 的图中，$xuywvzwyxuwvxzyx$ 是最优环游（习题 4.3.1），注意四条边 ux，xy，yw 和 wv 都被这条环游通过两次．

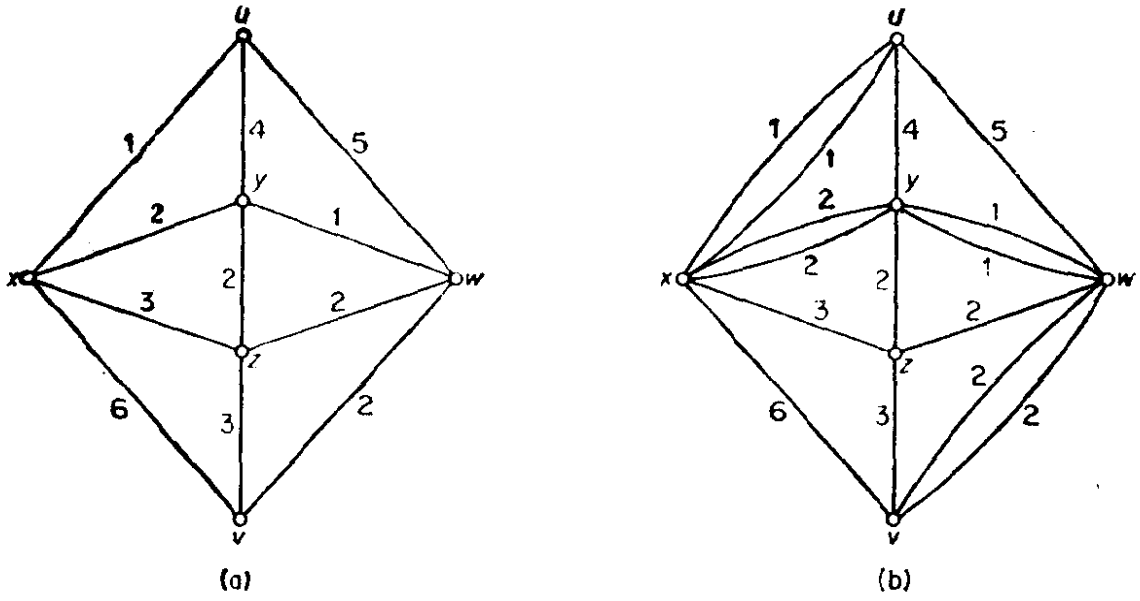


图 4.11

现在引进有关一条边的重复运算是方便的．将边 e 的两个端点再用一条权为 $w(e)$ 的新边连接时，称边 e 为重复的．在图 4.11(a) 的图中，把边 ux，xy，yw 和 wx 重复，得到图 4.11(b) 中表示的图．

现在可以把中国邮递员问题重新叙述如下：给定一个具有非负权的赋权图 G.

(i) 用添加重复边的方法求 G 的一个 Euler 赋权母图 G^*，使得

$$\sum_{e\in E(G^*)\setminus E(G)} w(e) \text{ 尽可能小；}$$

(ii) 求 G^* 的 Euler 环游.

这个问题和中国邮递员问题的等价性，可以从下述对应关系得到，即图 G 的一条经过边 e 为 $m(e)$ 次的环游，对应于由 G 对 e 重复 $m(e)-1$ 次而得到图中的一条 Euler 环游，反之亦然.

我们已经提供了一个求解 (ii) 的好算法，即 Fleury 算法. 求解 (i) 的好算法已经由 Edmonds 和 Johnson (1973) 给出. 遗憾的是，要在这里介绍它的话就太费篇幅了. 但是我们讨论一种容易求解的特殊情形，即 G 恰好有两个奇点的情形.

假设 G 恰有两个奇点 u 和 v；设 G^* 是用添加重复边的方法得到的 G 的 Euler 生成母图，并把 $E(G^*)$ 记为 E^*. 显然，G^* 的子图 $G^*[E^*\setminus E]$ (即在 G^* 中由不在 G 中的边所导出的子图)也只有这两个奇点 u 和 v. 从推论 1.1 推知：u 和 v 在 $G^*[E^*\setminus E]$ 的同一个分支里，因而它们由一条 (u, v) 路 P^* 连接着. 显然

$$\sum_{e\in E^*\setminus E} w(e) \geqslant w(P^*) \geqslant w(P),$$

这里 P 是 G 中的一条最小权 (u, v) 路. 于是，当 G^* 是从 G 在最小权 (u, v) 路上重复每条边所得到的图时，$\sum_{e\in E^*\setminus E} w(e)$ 就达到最小值. 求这种路的一个好算法已在 1.8 节给出.

习　　题

4.3.1　证明：在图 4.11(a) 的赋权图中 $xuywvzwyxuwvxzyx$ 是最优环游.

4.3.2　画出 Fleury 算法的框图，并证明它是好算法.

4.4　旅行售货员问题

一个旅行售货员想去访问若干城镇，然后回到他的出发地. 给

定各城镇之间所需的旅行时间后，应怎样计划他的路线，使他能对每个城镇恰好进行一次访问而总时间最短？这个问题名为旅行售货员问题.(或货郎担问题)用图论的术语说，就是在一个赋权完全图中，找出一个有最小权的 Hamilton 圈. 称这种圈为最优圈. 与最短路问题及连线问题相反，目前还没有求解旅行售货员问题的有效算法. 所以希望有一个方法以获得相当好(但不一定最优)的解. 我们将指出如何用先前的一些理论来服务于这一目的.

一个可行的办法是首先求一个 Hamilton 圈 C，然后适当修改 C 以得到具有较小权的另一个 Hamilton 圈，而下述方法或许是一种最简单的修改方法.

设 $C = v_1v_2\cdots v_vv_1$. 则对于所有适合 $1 < i+1 < j < v$ 的 i 和 j，我们能得到一个新的 Hamilton 圈:

$$C_{ij} = v_1v_2\cdots v_iv_jv_{j-1}\cdots v_{i+1}v_{j+1}v_{j+2}\cdots v_vv_1,$$

它是由 C 中删去边 v_iv_{i+1} 和 v_jv_{j+1}，添加边 v_iv_j 和 $v_{i+1}v_{j+1}$ 而得到的，如图 4.12 所示.

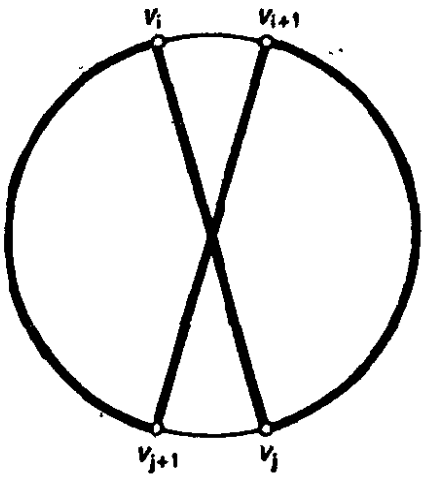


图 4.12

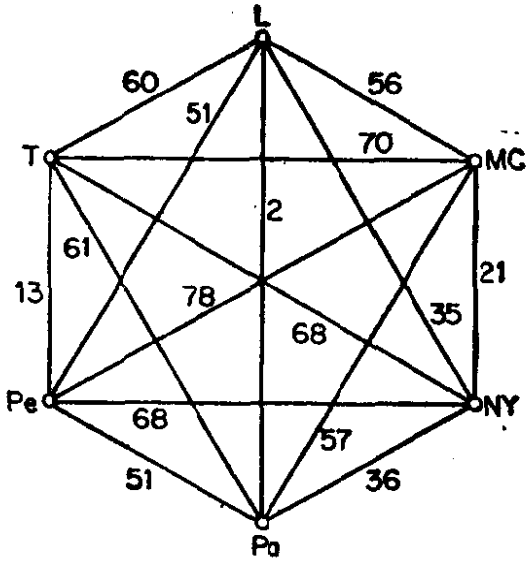


图 4.13

若对于某一对 i 和 j 有

$$w(v_iv_j) + w(v_{i+1}v_{j+1}) < w(v_iv_{i+1}) + w(v_jv_{j+1}),$$

则圈 C_{ij} 将是圈 C 的一个改进.

在接连进行上述的一系列修改之后，最后得到一个圈，不能再用此法改进了．这个最后的圈几乎可以肯定不是最优的，但有理由认为它常常是比较好的．为了得到更高的精确度，这个程序可以重复几次，每次都从不同的圈开始．

作为一个例子，考察图 4.13 所示的赋权图；它就是 2.5 节中用来说明 Kruskal 算法的图．

开始用的圈是 L MC NY Pa Pe T L，可以如图 4.14 所表明的那样进行三次修改．最终得到一个权为 192 的圈：L NY MC T PePa L．

这个解法的优劣程度有时能用 Kruskal 算法加以说明．假设 C 是 G 中的最优圈．则对于任何顶点 v，$C-v$ 是在 $G-v$ 中的 Hamilton 路，因而也是 $G-v$ 的生成树．由此推知：若 T 是 $G-v$ 中的最优树，同时 e 和 f 是和 v 关联的两条边，并使得 $w(e)+w(f)$ 尽可能地小，则 $w(T)+w(e)+w(f)$ 将是 $w(C)$ 的一个下界．在我们的例子中，取 NY 作为顶点 v，求得

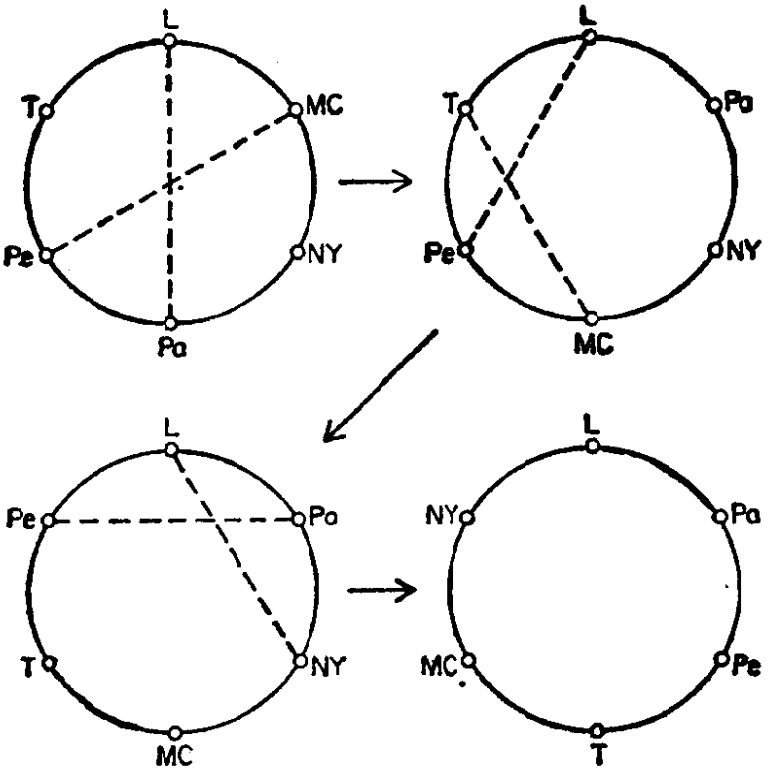


图 4.14

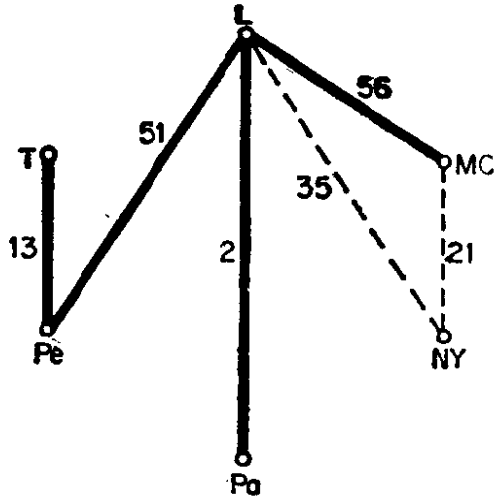


图 4.15

(见图 4.15):

$$w(T) = 122,\ w(e) = 21 \text{ 及 } w(f) = 35$$

所以可以断定: 在图 4.13 的图中,最优圈的权 $w(C)$ 满足

$$178 \leqslant w(C) \leqslant 192$$

这里介绍的方法已由 Lin (1965) 以及 Held 和 Karp (1970; 1971) 所进一步发展. 特别是 Lin 发现,圈的修改过程一次替换三条边比一次仅替换两条边更为有效; 然而,有点奇怪的是,进一步推广这一想法,就不利了. 关于旅行售货员问题的概论可参看 Bellmore 和Nemhauser (1968) 的著作.

习　　题

4.4.1* 设G是赋权完全图, 对于所有的 $x, y, z \in V$, 权满足三角形不等式: $w(xy) + w(yz) \geqslant w(xz)$. 证明: G中最优圈的权最多是 $2w(T)$,这里T是G中的一棵最优树.

(D. J. Rosencrantz, R. E. Stearns, P. M. Lewis)

参 考 文 献

Bellmore, M. and Nemhauser, G. L. (1968). The traveling salesman problem: a survey. *Operations Res.*, **16**, 538—58

Bondy, J. A. (1972). variations on the hamiltonian theme Canad. *Math. Bull.*, **15**, 57—62

Chvátal, V. (1972). On Hamilton's ideals. *J. Combinatorial Theory* B, **12**, 163—168

Dirac, G. A. (1952). Some theorems on abstract graphs. *Proc. London Math. Soc.* **2**, 69—81

Edmonds, J. and Johnson, E. L. (1973). Matching, Euler tours and the Chinese postman. *Math. Programming*, **5**, 88—124

Euler, L. (1736). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae*, **8**, 128—40

Hamilton, W. R. (1856). Letter to John T. Graves on the Icosian, 17 Oct., 1856, in *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton* (eds. H. Halberstam and R. E. Ingram), vol. 3 (Algebra), Cambridge University Press, 1931, pp. 612— 25.

Held, M. and Karp, R. M. (1970). The traveling-salesman problem and minimum spanning trees. *Operations Res.* **18**, 1138—62

Held, M. and Karp, R. M. (1971). The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: part II, *Math. Programming*, **1**, 6—25

Herz, J. C., Duby, J. J and Vigué, F. (1967). Recherche systématique des graphes hypohamiltoniens, in *Théorie des Graphes* (ed. P. Rosens thiel), Dunod-Gordon and Breach, pp. 153—59

Kuan, M-K. (1962). Graphic programming using odd or even points. *Chinese Math.*, **1**, 273—77

Lin, S. (1965). Computer solutions of the traveling salesman problem, *Bell System Tech. J.*, **44**, 2245—69

Lucas, E. (1921). *Récréations Mathématiques IV*, Paris

Ore, O. (1961). Arc coverings of graphs. *Ann. Mat. Pura Appl.*, **55**, 315—21

第五章　对　　集

5.1　对集

设M是E的一个子集，它的元素是G中的连杆，并且这些连杆中的任意两个在G中均不相邻，则称M为G的对集(或匹配)；M中一条边的两个端点称为在M下是配对的. 若对集M的某条边与顶点v关联，则称M饱和顶点v，并且称v是M饱和的，否则称v是M非饱和的. 若G的每个顶点均为M饱和的，则称M为G的完美对集. 若G没有另外的对集M'，使得$|M'| > |M|$，则M称为G的最大对集；显然，每个完美对集都是最大对集. 图 5.1 指出了两个图的最大对集与完美对集.

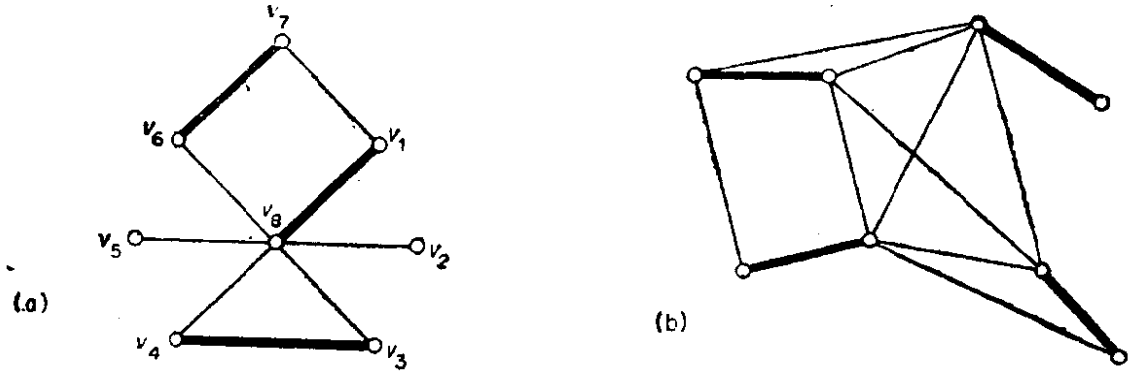


图 5.1　(a) 最大对集；(b) 完美对集

设M是G的对集，G的M交错路是指其边在$E\backslash M$和M中交错出现的路. 例如，在图 5.1(a) 的图中，路$v_5v_8v_1v_7v_6$是一条M交错路. M可扩路是指其起点和终点都是M非饱和的M交错路.

定理 5.1　(Berge, 1957)　G的对集M是最大对集当且仅当G不包含M可扩路.

证　设M是G的对集，并假设G包含M可扩路$v_0v_1\cdots v_{2m+1}$. 定义$M'\subseteq E$为

$$M' = (M\backslash\{v_1v_2, v_3v_4, \cdots, v_{2m-1}v_{2m}\}) \cup \{v_0v_1, v_2v_3, \cdots, v_{2m}v_{2m+1}\},$$

则 M' 是 G 的对集，且 $|M'| = |M| + 1$. 因而 M 就不是最大对集.

反之，假设 M 不是最大对集，且令 M' 是 G 的最大对集. 则

$$|M'| > |M| \tag{5.1}$$

置 $H = G[M \triangle M']$，这里 $M \triangle M'$ 表示 M 和 M' 的对称差（见图 5.2）.

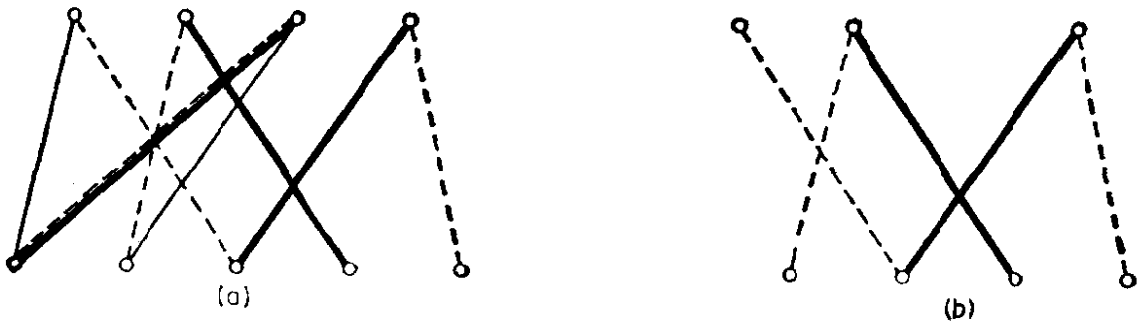


图 5.2 (a) 具有 M（粗线）和 M'（虚线）的图 G； (b) $G[M \triangle M']$

H 的每个顶点在 H 中具有的度不是 1 就是 2. 因为它最多只能和 M 的一条边以及 M' 的一条边关联，因此 H 的每个分支或是其边在 M 和 M' 中交错的偶圈，或是其边在 M 和 M' 中交错的路. 由 (5.1) 式，H 包含的 M' 的边多于 M 的边，因而必定有 H 的一条路组成的分支 P 开始于 M' 的边且终止于 M' 的边，因此 P 的起点和终点在 H 中被 M' 所饱和，在图 G 中就是 M 非饱和的. 于是 P 是 G 的一条 M 可扩路.

习　　题

5.1.1 (a) 证明：每个 k 方体都有完美对集 ($k \geq 2$).

(b) 求 $K_{2,n}$ 和 $K_{n,n}$ 中不同的完美对集的个数.

5.1.2 证明：一棵树最多只有一个完美对集.

5.1.3 对每个 $k > 1$，找出一个没有完美对集的 k 正则简单图的例子.

5.1.4 两人在图 G 上做游戏，方法是交替地选择相异的顶点 $v_0, v_1, v_2, \cdots$，使得对每个 $i > 0$，v_i 相邻于 v_{i-1}. 最后一个顶点的选择者得胜.

证明：第一个选点人有一个得胜策略当且仅当 G 没有完美对集.

5.1.5 G 的 k 正则生成子图称为 G 的 k 因子，并且若 G 存在边不重的 k 因

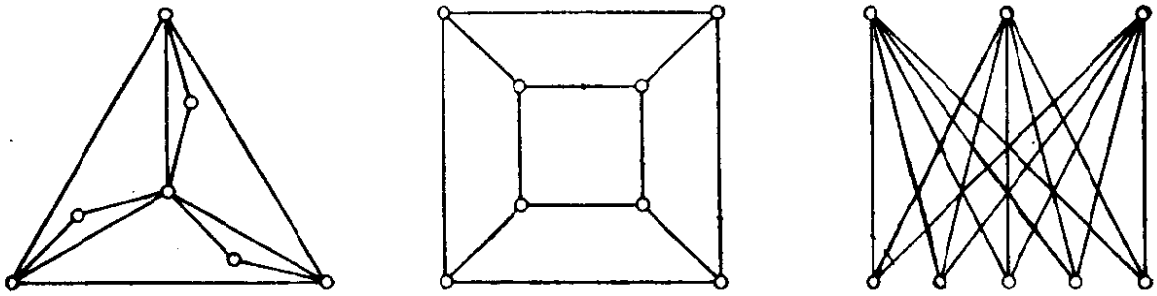
子 $H_1, H_2, \cdots, H_n$，使得 $G = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup \cdots \cup H_n$，则称 G 是 k 可因子分解的.

(a)* 证明:

(i) $K_{n,n}$ 和 K_{2n} 是 1 可因子分解的;

(ii) Petersen 图不是 1 可因子分解的.

(b) 下面的图中哪些图有 2 因子?



(c) 利用 Dirac 定理 (4.3) 证明: 若 G 是简单图，ν 是偶数，且 $\delta \geqslant \frac{\nu}{2} + 1$，则 G 有 3 因子.

5.1.6* 证明: K_{2n+1} 可以表示为 n 个连通的 2 因子的并图 ($n \geqslant 1$).

5.2 偶图的对集和覆盖

对于图 G 的任一顶点集 S，定义 G 中 S 的邻集为与 S 的顶点相邻的所有顶点的集; 此集记为 $N_G(S)$. 现在假设 G 是具有二分类 (X, Y) 的偶图. 在许多应用中总是希望找 G 的一个对集，使它饱和 X 的每个顶点; 在 5.4 节中将要讨论的人员分派问题就是一例. 存在这种对集的充分必要条件由 Hall (1935) 首先给出.

定理 5.2 设 G 为具有二分类 (X, Y) 的偶图，则 G 包含饱和 X 的每个顶点的对集当且仅当

$$|N(S)| \geqslant |S| \quad \text{对所有 } S \subseteq X \text{ 成立} \tag{5.2}$$

证 假设 G 包含对集 M，它饱和 X 的每个顶点，并设 S 是 X 的子集. 由于 S 的顶点在 M 下和 $N(S)$ 中的相异顶点配对，显然有 $|N(S)| \geqslant |S|$.

反之，假设 G 是满足 (5.2) 式的偶图，但 G 不包含饱和 X 的所有顶点的对集，则将有如下矛盾. 设 M^* 是 G 的最大对集，根据

假设，M^* 不饱和 X 的所有顶点．设 u 是 X 的一个 M^* 非饱和顶点，并设 Z 表示通过 M^* 交错路与 u 连接的所有顶点的集．由于 M^* 是最大对集，从定理 5.1 可知：u 为 Z 中唯一的 M^* 非饱和顶点．置 $S = Z \cap X$ 和 $T = Z \cap Y$（见图 5.3）．

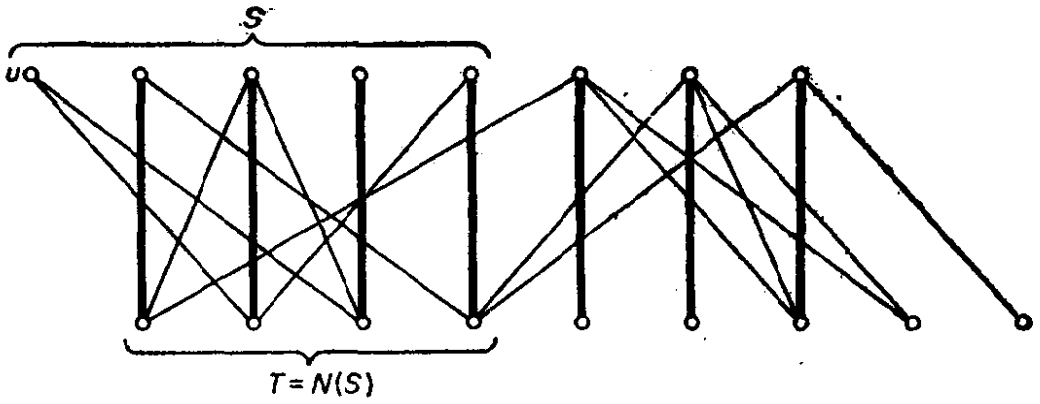


图 5.3

显然，$S\backslash\{u\}$ 中的顶点，在 M^* 下与 T 中的顶点配对．因此

$$|T| = |S| - 1 \tag{5.3}$$

而且 $N(S) \supseteq T$．事实上有

$$N(S) = T \tag{5.4}$$

因为 $N(S)$ 中每个顶点均由一个 M^* 交错路连接于 u，但是由 (5.3) 式和 (5.4) 式推出

$$|N(S)| = |S| - 1 < |S|$$

这与假定 (5.2) 式矛盾．

以上证明提供了寻找偶图的最大对集的一个好算法的基础．这一算法将在 5.4 节中给出．

推论 5.2 若 G 是 k 正则偶图 $(k > 0)$，则 G 有完美对集．

证 设 G 是具有二分类 (X, Y) 的 k 正则偶图 $(k > 0)$．由于 G 是 k 正则的，所以 $k|X| = |E| = k|Y|$，又由于 $k > 0$，所以 $|X| = |Y|$．现在设 S 是 X 的一个子集，并且用 E_1 和 E_2 分别表示与 S 和 $N(S)$ 中的顶点关联的边集，根据 $N(S)$ 的定义，有 $E_1 \subseteq E_2$．因此

$$k|N(S)| = |E_2| \geqslant |E_1| = k|S|$$

由此可知 $|N(S)| \geqslant |S|$，再根据定理 5.2，可知 G 有一个饱和 X 的每个顶点的对集 M．由于 $|X| = |Y|$，所以 M 是完美对集．

推论 5.2　有时名为婚姻定理，因为它可以更形象地重新叙述如下：如果一个乡村里每位姑娘恰好认识 k 位小伙子，而每个小伙子也恰好认识 k 位姑娘，那么每位姑娘能够和她认识的一个小伙子结婚，并且每个小伙子也能和他认识的一位姑娘结婚．

图 G 的一个覆盖是指 V 的一个子集 K，使得 G 的每条边都至少有一个端点在 K 之中．一个覆盖 K 称为 G 的最小覆盖如果 G 没有覆盖 K' 使得 $|K'| < |K|$（见图 5.4）．

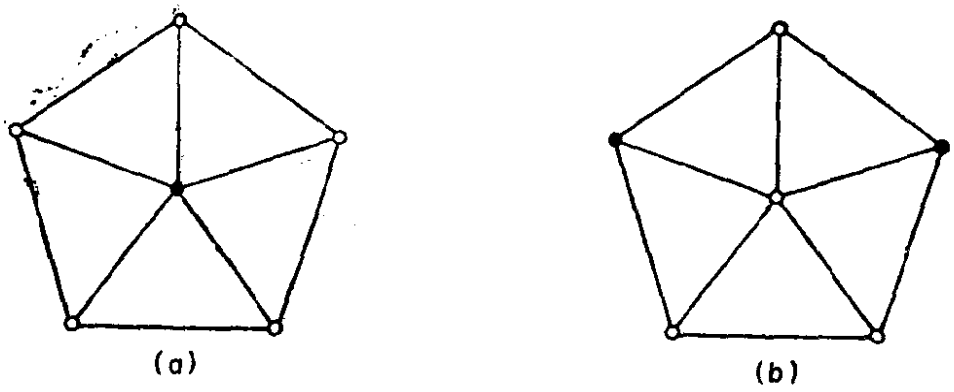


图 5.4　(a) 一个覆盖；(b) 一个最小覆盖

若 K 是 G 的覆盖，并且 M 是 G 的对集，则 K 至少包含 M 中每条边的一个端点．于是，对任何对集 M 和任何覆盖 K，均有 $|M| \leqslant |K|$．实际上，若 M^* 是最大对集，且 $\tilde{K}$ 是最小覆盖，则

$$|M^*| \leqslant |\tilde{K}| \tag{5.5}$$

一般说来，(5.5)式中的等式不成立（例如，参看图 5.4）．虽然如此，若 G 是偶图，则有 $|M^*| = |\tilde{K}|$．这个结果由 König (1931) 提出，它与 Hall 定理紧密相关．在给出它的证明之前，我们先给出一个简单的然而是重要的结果．

引理 5.3　设 M 是对集，K 是覆盖，适合 $|M| = |K|$．则 M 是最大对集，且 K 是最小覆盖．

证　若 M^* 是最大对集，且 $\tilde{K}$ 是最小覆盖，则由(5.5)式，

$$|M| \leqslant |M^*| \leqslant |\tilde{K}| \leqslant |K|$$

由于 $|M| = |K|$，所以 $|M| = |M^*|$，$|\tilde{K}| = |K|$.

定理 5.3 在偶图中，最大对集的边数等于最小覆盖的顶点数.

证 设 G 是具有二分类 (X, Y) 的偶图，而 M^* 是 G 的最大对集，用 U 表示 X 中的 M^* 非饱和顶点的集，用 Z 表示由 M 交错路连接到 U 中顶点的所有顶点的集. 置 $S = Z \cap X$ 且 $T = Z \cap Y$. 与定理 5.2 的证明一样，可知 T 中的每个顶点都是 M^* 饱和的，并且 $N(S) = T$. 定义 $\tilde{K} = (X \backslash S) \cup T$（见图 5.5）. 则 G 的每条边必然至少有一个端点在 $\tilde{K}$ 中，因为否则就存在一条边，其一个端点在 S 中，而另一个端点在 $Y \backslash T$ 中，这与 $N(S) = T$ 相矛盾. 于是 $\tilde{K}$ 是 G 的覆盖，并且显然有

$$|M^*| = |\tilde{K}|$$

由引理 5.3，$\tilde{K}$ 是最小覆盖，定理得证.

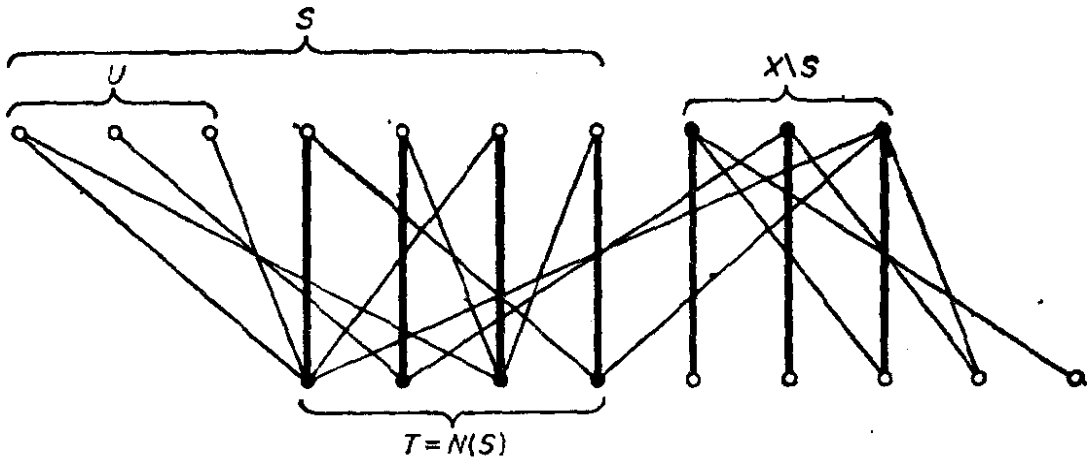


图 5.5

习　　题

5.2.1 证明：一个 8×8 方格棋盘移去其中两个对角上的 1×1 方格之后，不可能用 1 × 2 长方形恰好填满.

5.2.2 (a) 证明：偶图 G 有完美对集当且仅当对所有 $S \subseteq V$ 有 $|N(S)| \geqslant |S|$.

(b) 举例说明：舍弃 G 是偶图这个条件之后，上述语句不再成立.

5.2.3 对于 $k>0$，证明

(a) 每个 k 正则偶图是 1 可因子分解的；

(b)* 每个 $2k$ 正则图是 2 可因子分解的。 (J. Petersen)

5.2.4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是某集 S 的子集。族 $(A_1, A_2, \cdots, A_m)$ 的一个相异代表系是指 S 的一个子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 适合：当 $1 \leqslant i \leqslant m$ 时有 $a_i \in A_i$ 并且当 $i \neq j$ 时有 $a_i \neq a_j$。证明：$(A_1, A_2, \cdots, A_m)$ 有相异代表系当且仅当对于 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 的所有子集 J，有

$$\left|\bigcup_{i \in J} A_i\right| \geqslant |J|$$

(P. Hall)

5.2.5 矩阵的一行或一列统称为一条线。证明：包含一个 (0, 1)矩阵中所有元素 1 的线的最小条数，等于这样的元素 1 的最大个数，这些元素 1 之中任意两个都不在相同的线上。

5.2.6 (a) 证明 Hall 定理(5.2)的如下推广：若 G 是具有二分类(X, Y)的偶图，则 G 的最大对集的边数是 $|X| - \max\limits_{S \subseteq X}\{|S| - |N(S)|\}$

(D. König, O. Ore)

(b) 试证：若 G 是简单偶图，并且 $|X| = |Y| = n$ 以及 $\varepsilon > (k-1)n$，则 G 有边数为 k 的对集。

5.2.7 由 König 定理 (5.3) 推导 Hall 定理 (5.2)。

5.2.8* 若非负实数矩阵 Q 的每行元素之和均为 1，每列元素之和亦为 1，则称 Q 为双随机的。所谓排列矩阵是指每行和每列均恰有一个元素 1 的 (0, 1) 矩阵。(因而每个排列矩阵都是双随机的。) 证明：

(a) 每个双随机矩阵必然是方阵。

(b) 每个双随机矩阵 Q 都可以表示为排列矩阵的凸线性组合，即

$$Q = c_1P_1 + c_2P_2 + \cdots + c_kP_k.$$

这里，每个 P_i 都是排列矩阵，每个 c_i 都是非负实数，且 $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i = 1$

(G. Birkhoff, J. von Neumann)

5.2.9 设 H 是有限群，K 是 H 的子群。证明：存在元素 $h_1, h_2, \cdots, h_n \in H$，使得 $h_1K, h_2K, \cdots, h_nK$ 都是 K 的左陪集，且 $Kh_1, Kh_2, \cdots, Kh_n$ 都是 K 的右陪集。 (P. Hall)

5.3 完美对集

图有完美对集的一个充分必要条件由 Tutte (1947) 获得。

这里给出的证明是由 Lovász (1973) 提出的.

图的分支根据它有奇数个或偶数个顶点而分别称为奇分支或偶分支,我们用 $o(G)$ 表示 G 的奇分支的个数.

定理 5.4 G 有完美对集当且仅当

$$o(G-S)\leqslant |S| \quad \text{对所有 } S\subset V \text{ 成立} \tag{5.6}$$

证 显然只要对于简单图证明这个定理就行了.

首先假设 G 有完美对集 M. 设 S 是 V 的一个真子集,并设 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 是 $G-S$ 的奇分支,因为 G_i 是奇分支,所以 G_i 的某一顶点 u_i 一定在 M 下和 S 的一个顶点 v_i 配对(见图 5.6). 所以,由于 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}\subseteq S$, 因而有

$$o(G-S)=n=|\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}|\leqslant |S|.$$

反之,假设 G 满足(5.6)式,但没有完美对集,则 G 是没有完美对集的极大图 G^* 的生成子图. 由于 $G-S$ 是 G^*-S 的生成子图,所以 $o(G^*-S)\leqslant o(G-S)$. 因而由 (5.6) 式有

$$o(G^*-S)\leqslant |S| \quad \text{对所有 } S\subset V(G^*) \text{ 成立} \tag{5.7}$$

特别地,置 $S=\varnothing$, 得 $o(G^*)=0$, 因而 $v(G^*)$ 是偶数.

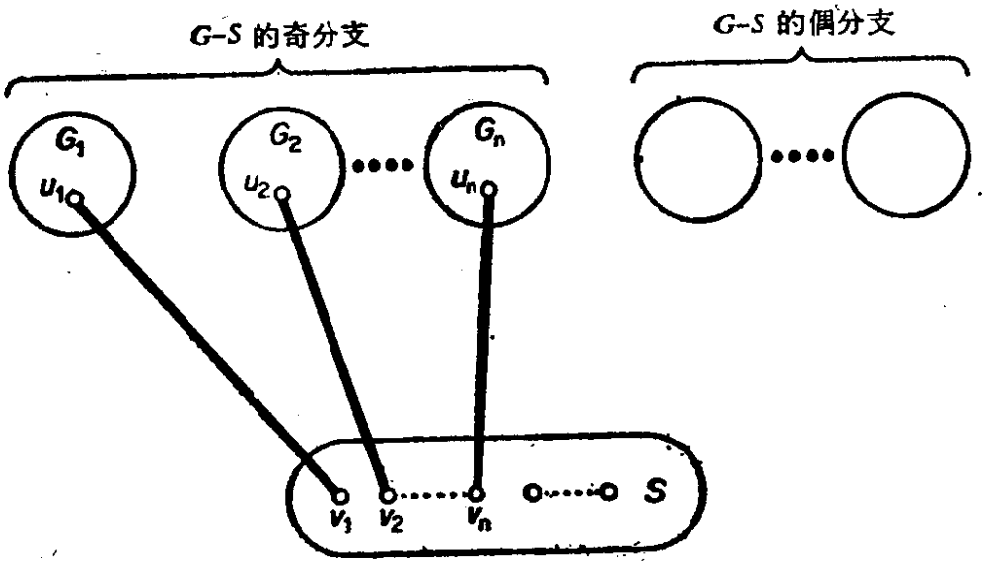


图 5.6

用 U 表示 G^* 中度为 $v-1$ 的顶点集. 由于当 $U=V$ 时, G^* 显然有完美对集,因此可以假定 $U\neq V$. 我们将证明: G^*-U 是完全图的不相交的并图. 假设不然, G^*-U 的某一分支不

是完全图，则在此分支里存在顶点 x，y 和 z．使得 $xy \in E(G^*)$，$yz \in E(G^*)$ 和 $xz \notin E(G^*)$（习题 1.6.14）．此外，由于 $y \notin U$，在 $G^* - U$ 中存在顶点 w，使得 $yw \notin E(G^*)$．这种情形直观地表示在图 5.7 中．

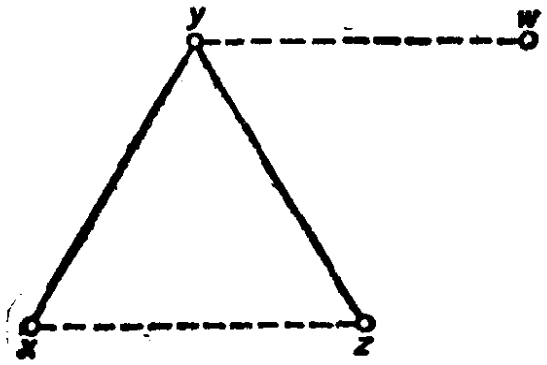


图 5.7

由于 G^* 是不包含完美对集的极大图，所以对于所有 $e \notin E(G^*)$，$G^* + e$ 都有完美对集．设 M_1 和 M_2 分别是 $G^* + xz$ 和 $G^* + yw$ 的完美对集，并且用 H 表示由 $M_1 \Delta M_2$ 导出的 $G^* \cup \{xz, yw\}$ 的子图．由于 H 的每个顶点的度均为 2，所以 H 是圈的不相交并图．进而，由于沿着这些圈的 M_1 的边和 M_2 的边是交错的，所以所有这些圈都是偶圈．我们分两种情形加以讨论．

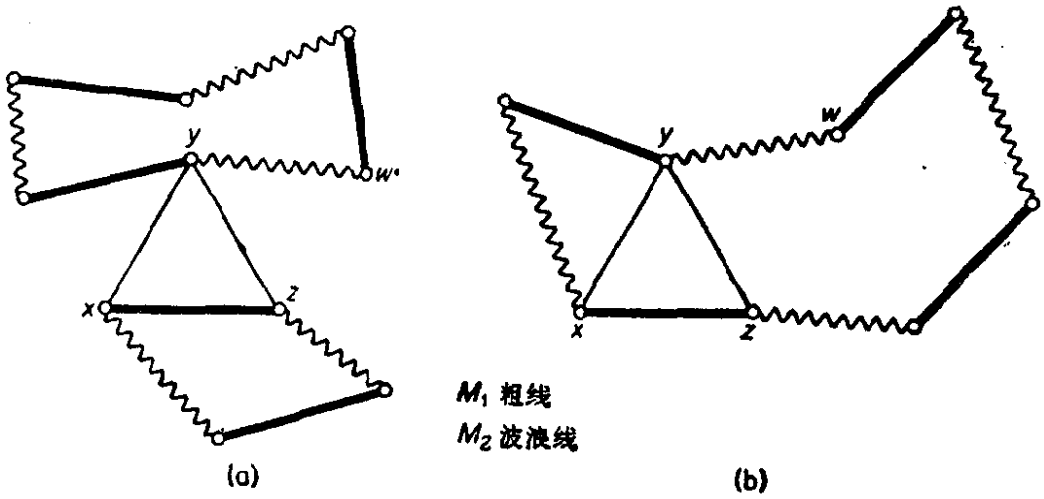


图 5.8

情形 1 xz 和 yw 在 H 的不同分支中（图 5.8(a)）．于是，若 yw 在 H 的圈 C 中，则 M_1 在 C 中的边连同 M_2 不在 C 中的边一起

组成 G^* 的一个完美对集，这和 G^* 的定义矛盾.

情形 2 xz 和 yw 在 H 的同一分支 C 中. 根据 x 和 z 的对称性，可以假定顶点 x，y，w，z 依次出现在 C 中（图 5.8(b)）. 于是 M_1 在 C 的 $yw\cdots z$ 节中的边连同边 yz 以及 M_2 不在 C 的 $yw\cdots z$ 节中的边一起组成 G^* 的一个完美对集，再次与 G^* 的定义矛盾.

因此不论情形 1 或情形 2 都导致矛盾，由此可知 G^*-U 确是完全图的不相交的并图.

现在，根据 (5.7) 式有 $o(G^*-U)\leqslant|U|$. 因此 G^*-U 的奇分支个数最多是 $|U|$，但这样一来，G^* 显然就有一个完美对集：G^*-U 的各奇分支中的一个顶点和 U 的一个顶点配对，U 中余下的顶点以及 G^*-U 的各分支中余下的顶点则也相互配对，正如图 5.9 所表示的那样.

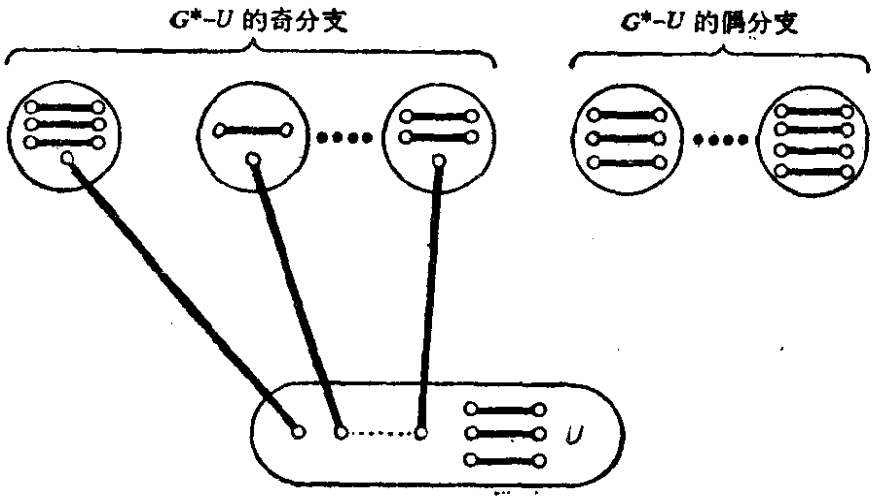


图 5.9

由于假定 G^* 是没有完美对集的，因而得到了希望出现的矛盾. 于是 G 确实有完美对集.

上面的定理也可以藉助于 Hall 定理加以证明（见 Anderson，1971）.

现在从 Tutte 定理推导一个由 Petersen（1891）首先得到的结果.

推论 5.4 每个没有割边的 3 正则图都有完美对集.

证 设 G 是没有割边的 3 正则图，S 是 V 的真子集，用 G_1，

$G_2, \cdots, G_n$ 表示 $G-S$ 的奇分支，并设 m_i 是一个端点在 G_i 中，另一个端点在 S 中的那些边的条数. 由于 G 是 3 正则的，所以

$$\sum_{v \in V(G_i)} d(v) = 3\nu(G_i) \quad \text{对 } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ 成立} \tag{5.8}$$

并且

$$\sum_{v \in S} d(v) = 3|S| \tag{5.9}$$

由(5.8)式，$m_i = \sum_{v \in V(G_i)} d(v) - 2\varepsilon(G_i)$ 是奇数. 又由于 G 没有割边，所以 $m_i \neq 1$. 因此

$$m_i \geqslant 3 \quad \text{对于 } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ 成立} \tag{5.10}$$

从 (5.10) 式和 (5.9) 式即可推出

$$o(G-S) = n \leqslant \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} m_i \leqslant \frac{1}{3}\sum_{v \in S} d(v) = |S|$$

所以，根据定理 5.4，G 有完美对集.

具有割边的 3 正则图不一定有完美对集. 举例来说，从定理 5.4 可知，图 5.10 中的图 G 没有完美对集，因为 $o(G-v) = 3$.

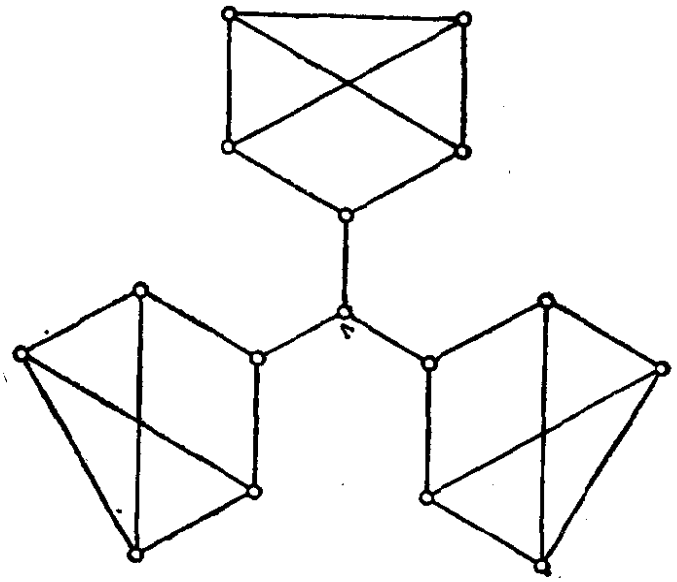


图 5.10

习　　题

5.3.1* 从 Tutte 定理 (5.4) 来推导 Hall 定理 (5.2)。

5.3.2 证明推论 5.4 的下述推广：若 G 是 $(k-1)$ 边连通的 k 正则图，并且 v 是偶数，则 G 有完美对集。

5.3.3 证明一棵树 G 有完美对集当且仅当 $o(G-v)=1$ 对于所有 $v \in V$ 成立。 (V. Chungphaisan)

5.3.4* 证明 Tutte 定理 (5.4) 的下述推广： G 的最大对集的边数是 $\frac{1}{2}(v-d)$，这里 $d=\max\limits_{S \subset V}\{o(G-S)-|S|\}$ (C. Berge)

5.3.5 (a) 利用 Tutte 定理 (5.4) 给出没有完美对集的极大简单图的一个表征。

(b) 设 G 是简单图且 v 是偶数，$\delta < \frac{v}{2}$。证明：若 $\varepsilon > \binom{\delta}{2} + \binom{v-2\delta-1}{2} + \delta(v-\delta)$，则 G 有完美对集[1]。

应　　用

5.4 人员分派问题

某公司准备分派 n 个工人 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 做 n 件工作 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$，已知这些工人中每个人都胜任一件或几件工作。试问能不能把所有的工人都分派做一件他所胜任的工作？这就是人员分派问题.

构作一个具有二分类 (X, Y) 的偶图 G，这里 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，并且 x_i 与 y_i 相连当且仅当工人 X_i 胜任工作 Y_j。于是问题转化为确定 G 是否有完美对集的问题。按照 Hall 定理(5.2)，或者 G 有这样的对集，或者存在 X 的子集 S。使得 $|N(S)|<|S|$。我们将按这两种情形提供解决人员分派问题的一个算法。给定任意一个具有二分类 (X, Y) 的偶图 G，这个算法就是寻找 G 的一个对集，使其饱和 X 中的每一个顶点；如果做不到这一点的话，就去寻找 X 的一个子集 S，使 $|N(S)|<|S|$。

---

1) 此题有误，参看林国宁："无完美对集最大简单图"一文。——译者注

算法的基本思想方法是很简单的. 从任一对集M开始，若M饱和X中的每个顶点，则M就是所需要的对集. 如果不是这样，则在X中选择一个M非饱和的顶点u，并且系统地寻找一条以u为起点的M可扩路，寻找的方法在下面再详述. 找出一条这样的路P，如果它存在的话；这时，$\hat{M} = M \triangle E(P)$就是比$M$更大的对集，因而饱和$X$中更多的顶点. 然后以$\hat{M}$代替$M$，并重复这个程序. 如果这样的路不存在，则通过$M$交错路与$u$相连接的那些顶点的集$Z$就可找到. 于是（如同定理5.2的证明那样），$S = Z \cap X$满足$|N(S)| < |S|$.

设M是G中的对集，u是X的一个M非饱和顶点. 若树$H \subseteq G$满足(i) $u \in V(H)$及(ii)对H的每个顶点v，H中唯一的(u, v)路是一条M交错路，则称树H是一棵扎根于u的M交错树. 某图的一棵M交错树在图5.11中表示.

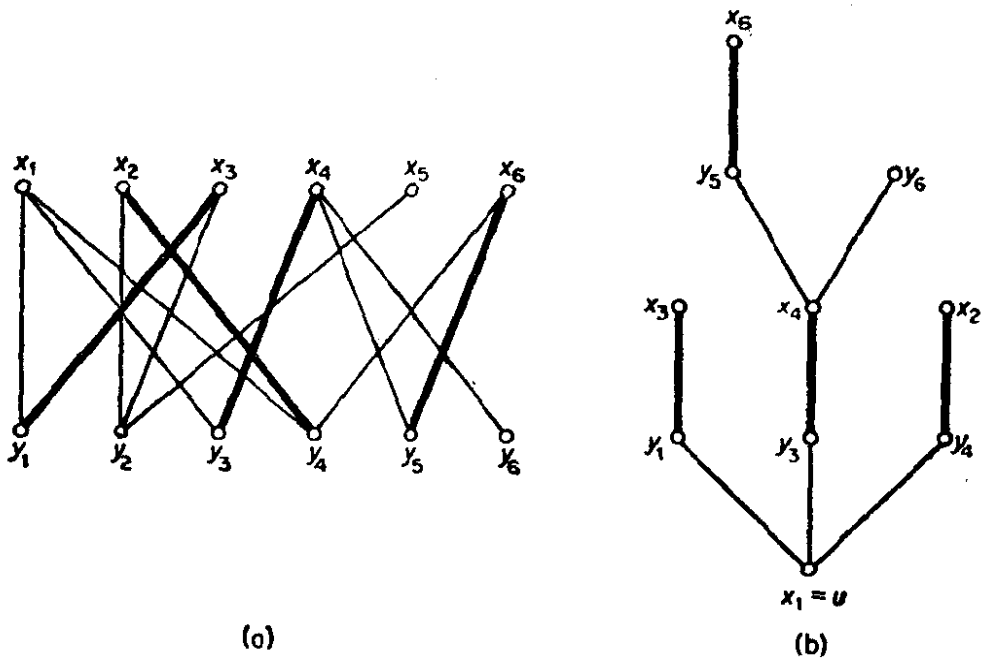


图5.11 (a) G的一个对集M； (b) G的一棵M交错树

寻找以u为起点的一条M可扩路，其程序包含了“生长”一棵扎根于u的M交错树. 这个程序首先是由Edmonds (1965)提出的. 开始时，H仅由单一顶点u组成，而在以后的任何步骤中它都按以下方式生长：

(i) 除 u 外 H 的所有顶点是 M 饱和的，并且在 M 下配对(如图 5.12(a))，或者

(ii) M 包含不同于 u 的 M 非饱和顶点(如图 5.12(b))。

如果是情形 (i)(正象开始时那样)，则置 $S = V(H) \cap X$，以及 $T = V(H) \cap Y$，有 $N(S) \supseteq T$；于是或者 $N(S) = T$ 或者 $N(S) \supset T$。

(a) 若 $N(S) = T$，由于 $S \backslash \{u\}$ 中的顶点和 T 中的顶点配对，所以 $|N(S)| = |S| - 1$，这说明 G 没有饱和 X 的所有顶点的对集。

(b) 若 $N(S) \supset T$，则存在 $Y \backslash T$ 中的顶点 y 相邻于 S 中的顶点 x，由于 H 的所有顶点，除了 u 之外，都在 M 下配对，因此或者 $x = u$，或者 x 和 H 的一个顶点配对，所以 $xy \notin M$。如果 y 是 M 饱和的，同时 $yz \in M$，则添加顶点 y 和 z 以及边 xy 和 yz 来生长 H，然后再回到情形 (i)。如果 y 是 M 非饱和的，则添加顶点 y 和边 xy 来生长 H，结果得到情形(ii)。这样，H 的 (u, y) 路就是具有起点 u 的 M 可扩路，正如所要求的那样。

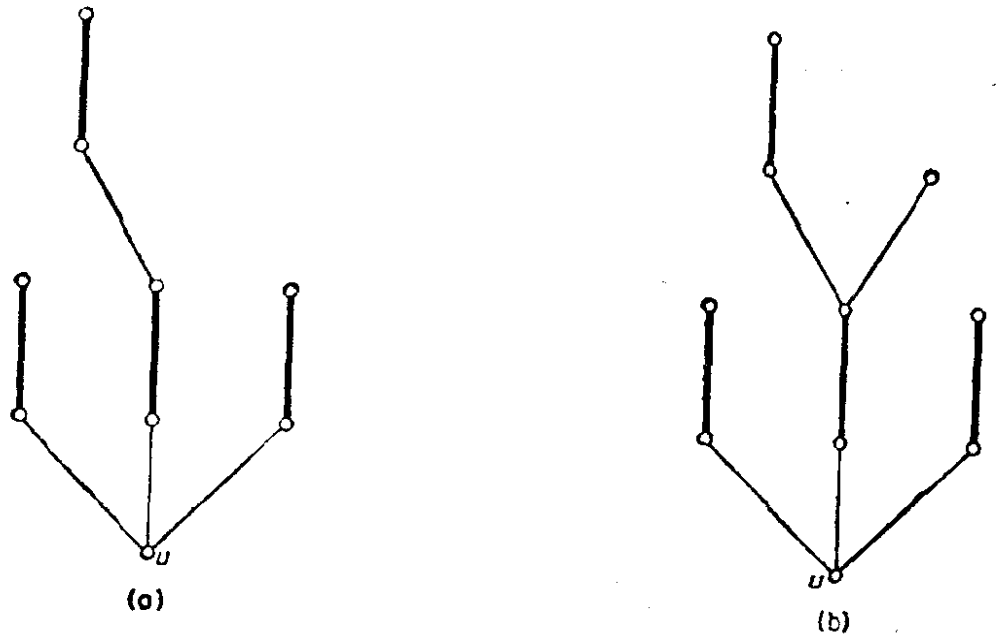


图 5.12 (a) 情形(i)； (b) 情形(ii)

图 5.13 直观说明了上述树的生长程序。

上面叙述的方法名为匈牙利方法，可以总结如下：从任意一

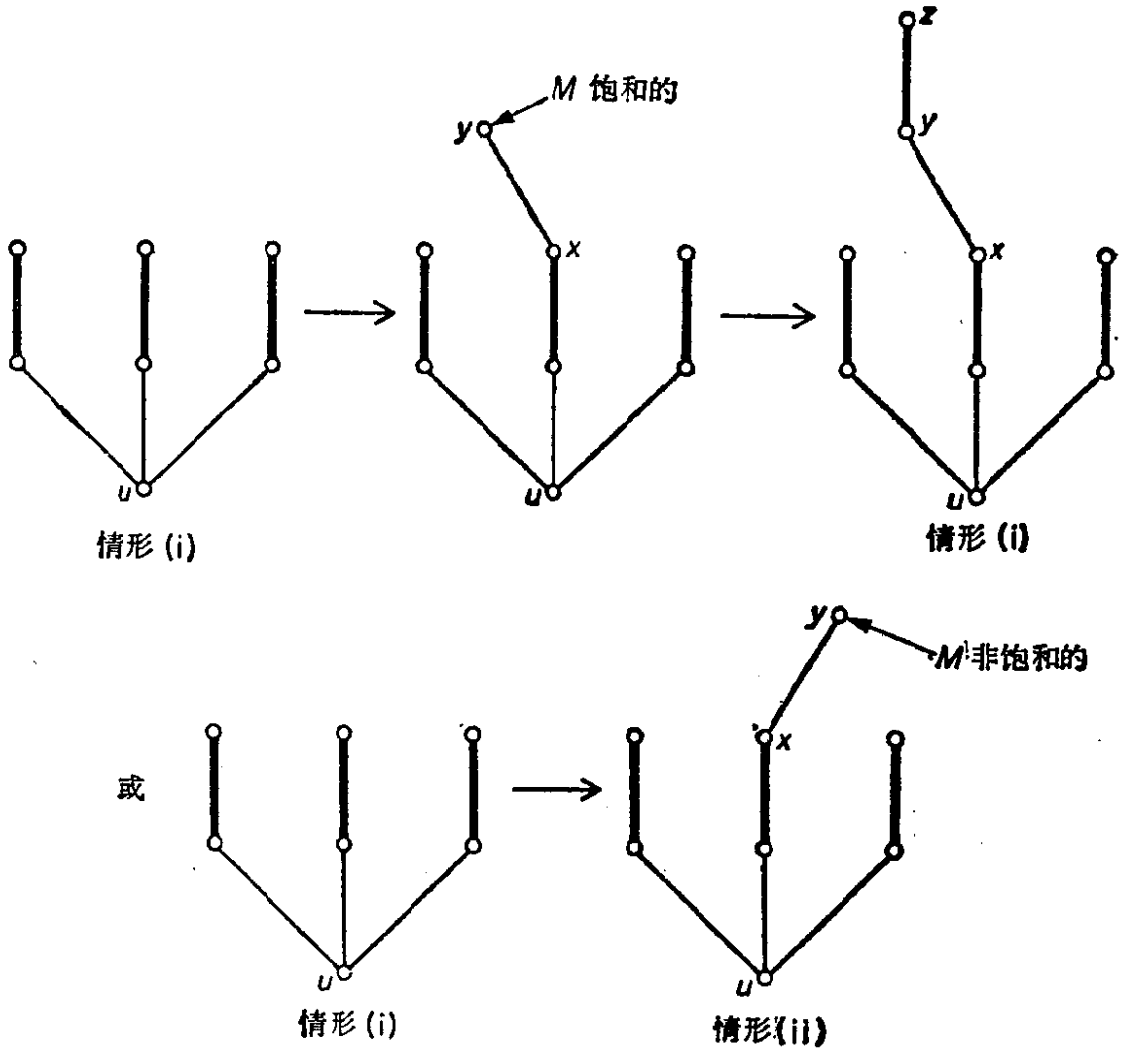


图 5.13　树的生长程序

个对集 M 开始.

1. 若 M 饱和 X 的每个顶点，则停止. 否则，设 u 是 X 中的 M 非饱和顶点. 置 $S=\{u\}$ 及 $T=\varnothing$.

2. 若 $N(S)=T$，由于 $|T|=|S|-1$，所以 $|N(S)|<|S|$，因而停止，因为根据 Hall 定理，不存在饱和 X 的每个顶点的对集. 否则，设 $y\in N(S)\backslash T$.

3. 若 y 是 M 饱和的. 设 $yz\in M$，用 $S\cup\{z\}$ 代替 S，$T\cup\{y\}$ 代替 T，并转到第 2 步(注意，这样替换后，$|T|=|S|-1$ 依然成立). 否则，设 P 是 M 可扩 (u, y) 路，用 $\hat{M}=M\Delta E(P)$ 代替 M，并转到第 1 步.

作为例子，考虑图 5.14(a) 中的图. 并以 $M=\{x_2y_2, x_3y_3,$

$x_5y_5\}$ 为初始对集，在图 5.14(b) 中，生长出一棵从 x_1 开始的 M 交错树，并找出一条 M 可扩路 $x_1y_2x_2y_1$，这样得到一个新的对集 $\hat{M}=\{x_1y_2, x_2y_1, x_3y_3, x_5y_5\}$，并从 x_4 生长出一棵 $\hat{M}$ 交错树（图 5.14(c) 及图 5.14(d)）。由于不存在以 x_4 为起点的 M 可扩路，算法停止。集 $S=\{x_1, x_3, x_4\}$ 及其邻集 $N(S)=\{y_2, y_3\}$ 表明 G 没有完美对集。

图5.15给出匈牙利方法的框图。由于这个算法是通过树的生

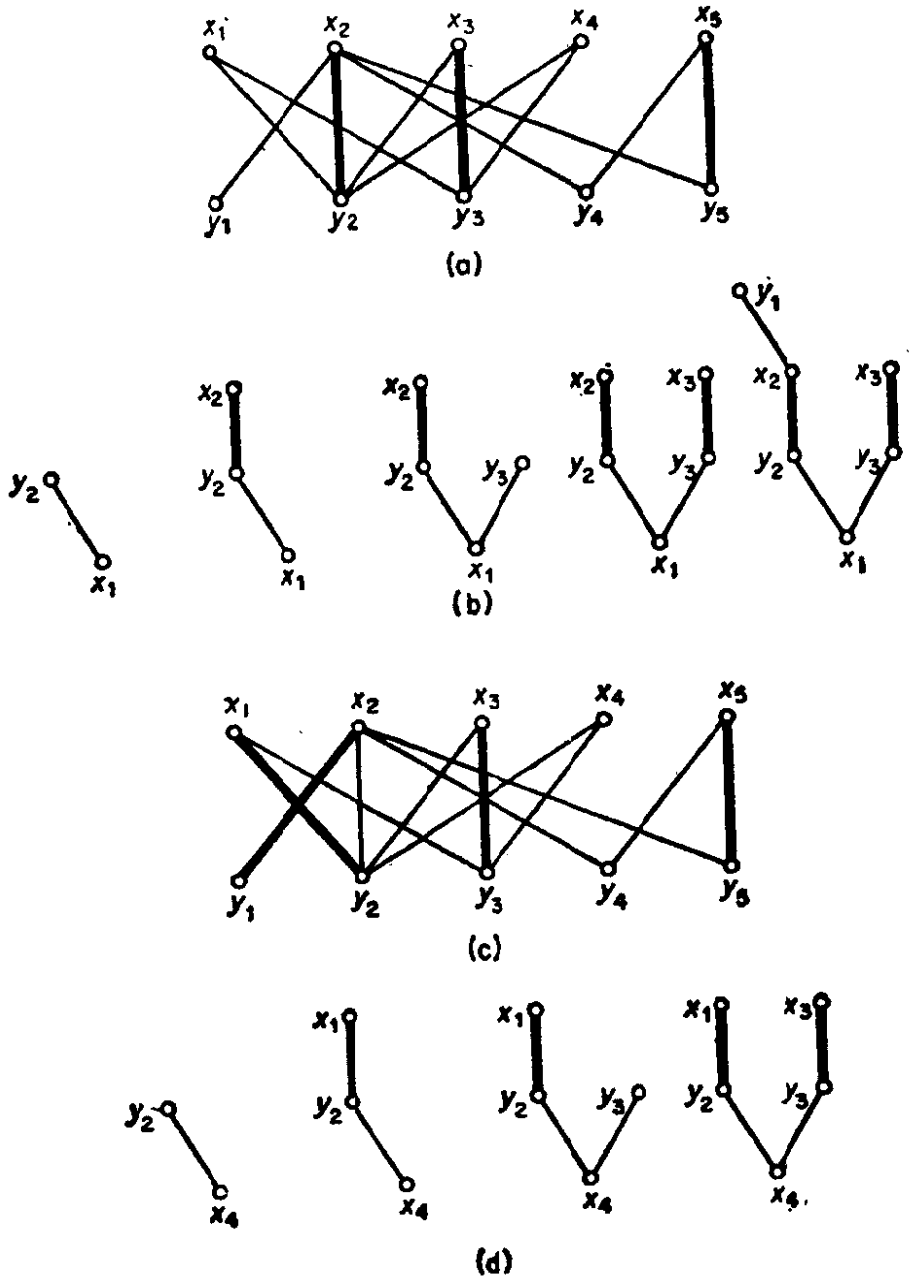


图 5.14 (a) 对集 M；(b) M 交错树
(c) 对集 $\hat{M}$；(d) $\hat{M}$ 交错树

长程序 I 循环进行，在找到一个适合 $|N(S)| < |S|$ 的 $S \subseteq X$ 之前，或是在找到一条 M 可扩路之前，程序 I 最多能循环 $|X|$ 次，又由于在找出所需要的对集之前，初始对集最多能扩张 $|X|$ 次，所以很明显，匈牙利方法是一个好算法.

把以上程序稍加修改就能够用来求偶图的最大对集（习题 5.4.1）. 确定任意图的最大对集的一个好算法已由 Edmonds (1965) 给出.

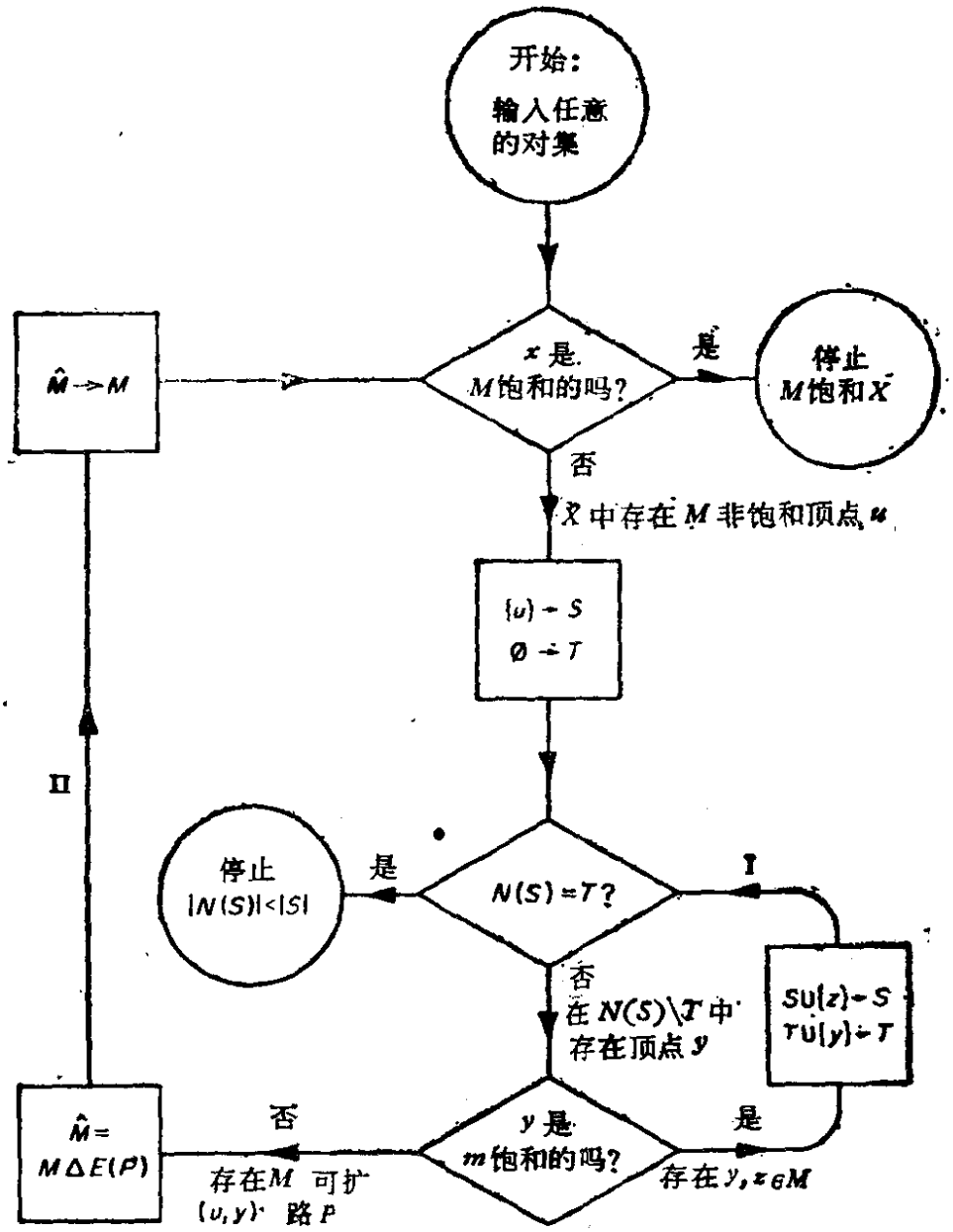


图 5.15 匈牙利方法

习　　题

5.4.1　叙述怎样利用匈牙利方法来找偶图的最大对集。

5.5　最优分派问题

在5.4节中叙述的匈牙利方法，用以确定工人分派工作的可行方案(当这种方案确实存在时)，是一个有效的方法．此外，还可以指望把工人们对各种工作的效率考虑进去（也许这种效率可以用公司的收益来衡量)，以便使得工人们的总效率达到最大．寻找这种分派的问题名为最优分派问题.

考察一个具有二分类(X, Y)的赋权完全偶图，这里$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，边$x_iy_j$有权$w_{ij}=w(x_i, y_j)$，表示工人$X_i$做工作$Y_j$时的效率．最优分派问题显然等价于在这个赋权图中寻找一个有最大权的完美对集．我们不妨称这种对集为最优对集.

当然，若枚举所有$n!$个完美对集，然后在它们中间求一个最优的，这样来解最优分派问题无疑是可以的．但是，对于很大的n，这种办法显然是极为无效的．在本节中，我们将提供在赋权完全偶图中寻找最优对集的一个好算法.

若在顶点集$X\cup Y$上的实值函数l适合下述条件：对所有的$x\in X$以及$y\in Y$，均有

$$l(x)+l(y)\geqslant w(x, y) \tag{5.11}$$

则把这个函数定义为该偶图的一个可行顶点标号．(实数$l(v)$称为顶点v的标号)．可行顶点标号是这样的顶点标号，它使每条边的两个端点的标号之和至少与这条边的权一样大．不管边的权是什么，总存在一个可行顶点标号；

$$\left.\begin{aligned} l(x)&=\max_{y\in Y} w(xy) \quad 若\ x\in X\\ l(y)&=0 \qquad\qquad\quad 若\ y\in Y \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

给出的函数l就是这样的可行顶点标号.

若 l 是可行顶点标号，则用 E_l 表示使(5.11)式中等式成立的那些边的集，即

$$E_l = \{xy \in E \mid l(x) + l(y) = w(xy)\}$$

具有边集 E_l 的 G 的生成子图不妨称为对应于可行顶点标号 l 的相等子图，并用 G_l 表示. 相等子图与最优对集之间的联系由下述定理给出.

定理 5.5 设 l 是 G 的可行顶点标号. 若 G_l 包含完美对集 M^*，则 M^* 是 G 的最优对集.

证 假设 G_l 包含完美对集 M^*. 由于 G_l 是 G 的生成子图，所以 M^* 也就是 G 的完美对集. 于是

$$w(M^*) = \sum_{e \in M^*} w(e) = \sum_{v \in V} l(v) \tag{5.13}$$

这是因为每个 $e \in M^*$ 都属于这个相等子图，并且 M^* 的边的端点覆盖 V 的每个顶点恰好一次. 另一方面，若 M 是 G 的任一完美对集，则有

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e) \leqslant \sum_{v \in V} l(v) \tag{5.14}$$

从(5.13)式和(5.14)式推出 $w(M^*) \geqslant w(M)$. 于是 M^* 是最优对集.

Kuhn (1955) 和 Munkres (1957) 提出了在赋权完全偶图中寻找最优对集的一个算法，而上面的定理提供了这个算法的基础. 我们这里的处理方式基本上按照 Edmonds (1967) 的论述.

首先给出任一可行顶点标号 l ((5.12)式给出的函数 l 就是一例)，然后决定 G_l，在 G_l 中选取任一对集 M，并且应用匈牙利方法. 若在 G_l 中已经找到一个完美对集，则由定理 5.5，该对集就是最优的. 否则匈牙利方法将终止于一个非完美的对集 M' 和一棵既不包含 M' 可扩路，又不能在 G_l 中进一步生长的 M' 交错树 H. 随后，把 l 修改为具有下述性质的另一个可行顶点标号 $\hat{l}$：M' 和 H 都包含在 $G_{\hat{l}}$ 中，并且 H 能够在 $G_{\hat{l}}$ 中伸展. 每当必要时，连续不断地进行这种可行顶点标号的修改，直到一个完美对集在某个相等子图中找到为止.

Kuhn-Munkres 算法

从任一可行顶点标号 l 开始，然后决定 G_l，并且在 G_l 中选取任一对集 M.

1. 若 X 是 M 饱和的，则 M 是完美对集（因为 $|X| = |Y|$），并且因而由定理 5.5 可知 M 是最优对集；在这种情形下，算法终止. 否则，令 u 是一个 M 非饱和顶点，置 $S = \{u\}$，$T = \varnothing$.

2. 若 $N_{G_l}(S) \supset T$，则转到第 **3** 步. 否则 $N_{G_l}(S) = T$. 计算

$$\alpha_l = \min_{\substack{x \in S \\ y \notin T}} \{l(x) + l(y) - w(xy)\},$$

且由

$$\hat{l}(v) = \begin{cases} l(v) - \alpha_l & \text{若 } v \in S \\ l(v) + \alpha_l & \text{若 } v \in T \\ l(v) & \text{其他} \end{cases}$$

给出可行顶点标号 $\hat{l}$.（注意 $\alpha_l > 0$ 且 $N_{G_{\hat{l}}}(S) \supset T$.）以 $\hat{l}$ 代替 l，

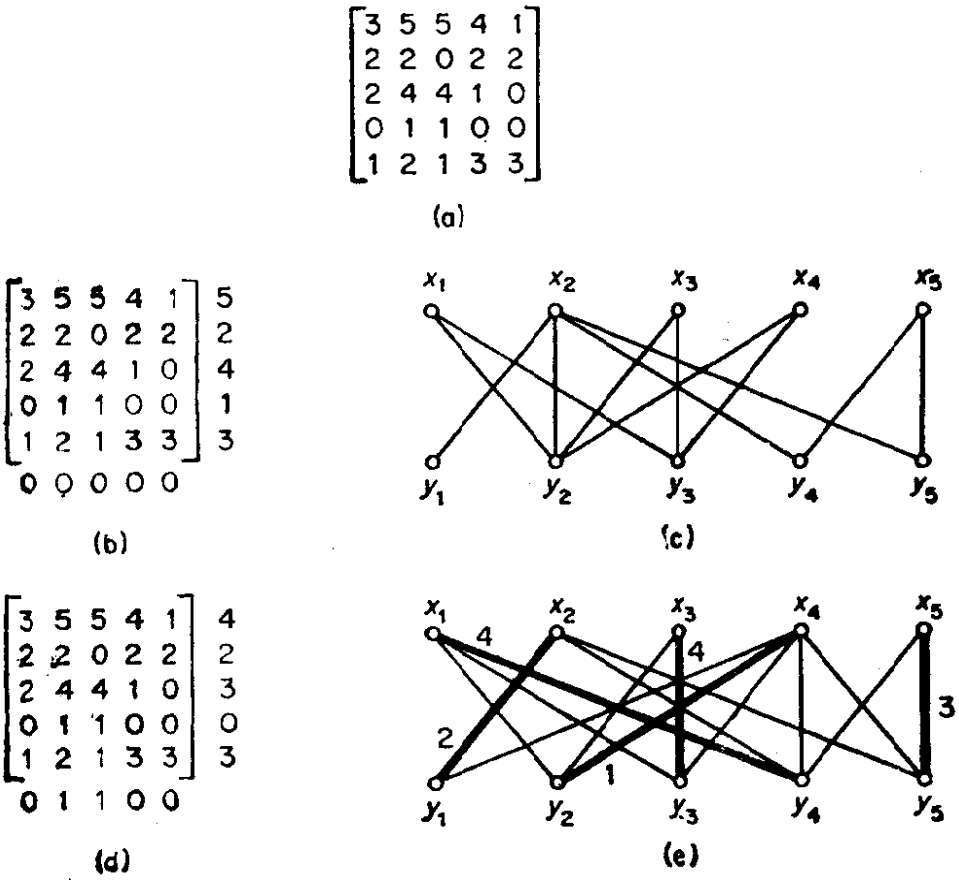


图 5.16

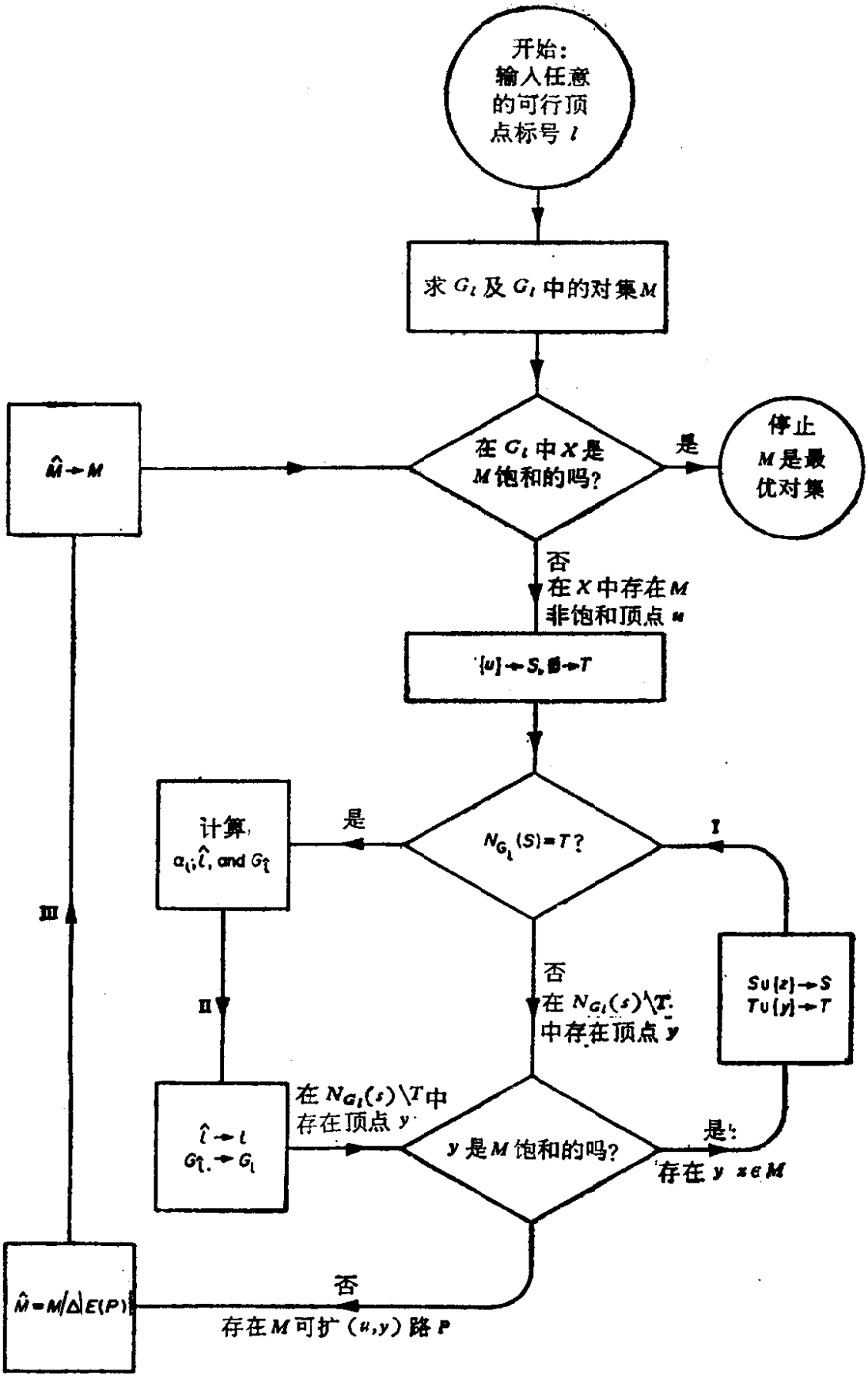


图 5.17　Kuhn-Munkres 算法

以 G_l 代替 G_l.

3. 在 $N_{G_l}(S)\backslash T$ 中选择一个顶点 y. 和 5.4 节中树的生长程序一样,考察 y 是否 M 饱和. 若 y 是 M 饱和的,并且 $yz\in M$,则用 $S\cup\{z\}$ 代替 S,用 $T\cup\{y\}$ 代替 T,再转到第 **2** 步. 否则,设 P 是 G_l 中的 M 可扩 (u, y) 路,用 $\hat{M}=M\triangle E(P)$ 代替 M,并转到第 **1** 步.

为了阐明 Kuhn-Munkres 算法,用矩阵 $\boldsymbol{W}=[w_{ij}]$ 表示赋权完全偶图是方便的,这里 w_{ij} 是 G 中边 x_iy_j 的权. 我们从图 5.16(a) 的矩阵开始. 图 5.16(b) 指出了符合(5.12)式的可行顶点标号(把 x_i 的标号置于矩阵 i 行的右边,把 y_j 的标号置于矩阵 j 列的下面),并且对应于伴随相等子图的边的矩阵元素也用黑体数字指出来了;相等子图本身描绘在图 5.16(c) 中(权未标出). 在前节中曾经指出过该图没有完美对集(集 $S=\{x_1, x_3, x_4\}$ 有邻集 $\{y_2, y_3\}$),所以把初始的可行顶点标号修改成如图 5.16(d) 所给出的那样. 现在应用匈牙利方法即可证明伴随相等子图有完美对集 $\{x_1y_4, x_2y_1, x_3y_3, x_4y_2, x_5y_5\}$,它就是 G 的最优对集.

图 5.17 给出 Kuhn-Munkres 算法的框图,在循环 II 中,计算 G_l 所需要的计算次数显然是 v^2 级的. 由于在找出 M 可扩路之前,这个算法通过循环 I 和 II 最多可能有 $|X|$ 次,并且在找出最优对集之前初始对集最多可能扩张 $|X|$ 次,所以 Kuhn-Munkres 算法是一个好算法.

习　　题

5.5.1　所谓 $n\times n$ 矩阵的一条对角线是指两两不同行不同列的 n 个矩阵元素组成的集. 对角线的权是指它的 n 个元素的和. 找出下列矩阵具有最小权的对角线:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & 5 & 7 & 4 \\ 8 & 5 & 12 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 13 & 10 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

参 考 文 献

Anderson, I. (1971). Perfect matchings of a graph. *J. Combinatorial Theory B*, **10**, 183—86

Berge, C. (1957). Two theorems in graph theory. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* **43**, 842—44

Edmonds, J. (1965). Paths. trees and flowers. *Canad. J. Math.*, **17**, 449—67

Edmonds, J. (1967). 'An Introduction to Matchings', notes of lectures delivered at the University of Michigan (unpublished)

Hall, P. (1935). On reprcsentatives of subsets. *J. London Math. Soc.*, **10**, 26—30

König, D. (1931). Graphs and matrices (Hungarian). *Mat. Fiz. Lapok*, **38**, 116—19.

Kuhn, H. W. (1955). The Hungarian method for the assignment problem. *Naval Res. Logist. Quart.*, **2**, 83—97

Lovász, L. (1975). Three short proofs in graph theory. *J. Combinatorial Theory, B*, **19**, 111—13.

Munkres, J. (1957). Algorithms for the assignment and transportation problems. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **5**, 32—38

Petersen, J. (1891). Die Theorie der reguláren graphs. *Acta Math.*, **15**, 193—220

Tutte, W. T. (1947). The factorization of linear graphs. *J. London Math. Soc.*, **22**, 107—11

第六章　边　着　色

6.1　边色数

无环图G的一个k边着色$\mathscr{C}$是指k种颜色1，2…，k对于G的各边的一个分配．若没有相邻的两条边有着相同的颜色，则称着色是正常的．

换句话说，一个k边着色可以看作是E的一个分类$(E_1, E_2, \cdots, E_k)$，这里E_i(可能是空的)表示染有颜色i的E的子集．一个正常的k边着色就是每个E_i均为对集的k边着色$(E_1, E_2, \cdots, E_k)$．图6.1中的图有正常的4边着色$(\{a, g\}, \{b, e\}, \{c, f\}, \{d\})$．

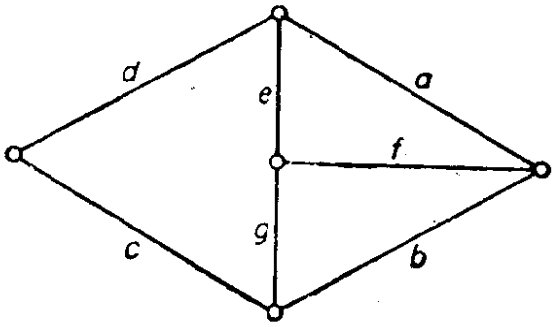


图　6.1

若G有正常的k边着色，则称G是k边可着色的．显然，每个无环图G是ε边可着色的；并且若G是k边可着色的，则对每个$l > k$，G亦是l边可着色的．无环图G的边色数$\chi'(G)$是指使G为k边可着色的那些k的最小值．若$\chi'(G) = k$，则称G是k边色的．可以验证，图6.1的图没有正常的3边着色，因此该图是4边色的．

很明显，在任何正常边着色中，和任一顶点关联的各边必须分配以不同的颜色．由此推知

$$\chi' \geqslant \Delta \tag{6.1}$$

参照图 6.1 的例子，可知在(6.1)式中允许出现严格的不等式. 但我们将证明，当 G 是偶图时有 $\chi' = \Delta$. 下面的简单引理是证明的基础. 若与顶点 v 关联的某边染有颜色 i，则称颜色 i 在顶点 v 上表现.

引理 6.1.1 设 G 为不是奇圈的连通图，则 G 有一个 2 边着色，它的两种颜色在度至少为 2 的每个顶点上都表现.

证 显然可以假定 G 是非平凡的. 首先，假设 G 是 Euler 图. 若 G 是偶圈，则 G 的正常 2 边着色具有所要求的性质. 否则，G 必有一个度至少为 4 的顶点 v_0. 设 $v_0e_1v_1\cdots e_\varepsilon v_0$ 是 G 的 Euler 环游，并且置

$$E_1 = \{e_i | i \text{ 是奇数}\} \text{ 以及 } E_2 = \{e_i | i \text{ 是偶数}\} \qquad (6.2)$$

则 G 的 2 边着色 (E_1, E_2) 具有所要求的性质，因为 G 的每个顶点都是 $v_0e_1v_1\cdots e_\varepsilon v_0$ 的内部顶点.

若 G 不是 Euler 图，则添加一个新的顶点 v_0，并把它和 G 的每个奇点连接起来，构成一个新图 G^*. 显然 G^* 是 Euler 图. 设 $v_0e_1v_1\cdots e_{\varepsilon^*}v_0$ 是 G^* 的 Euler 环游，并同 (6.2) 式一样地定义 E_1 和 E_2，易证 G 的 2 边着色 $(E_1 \cap E,\ E_2 \cap E)$ 具有所要求的性质.

给定 G 的 k 边着色 $\mathscr{C}$ 后，我们用 $c(v)$ 表示在 v 上表现的不同颜色的数目，显然恒有

$$c(v) \leqslant d(v) \qquad (6.3)$$

并且，$\mathscr{C}$ 是正常 k 边着色当且仅当 (6.3) 式中的等式对 G 的所有顶点 v 都成立. 假设另外存在一个 k 边着色 $\mathscr{C}'$，它在 v 上表现的不同颜色的数目记为 $c'(v)$. 若有

$$\sum_{v \in V} c'(v) > \sum_{v \in V} c(v)$$

则称 k 边着色 $\mathscr{C}'$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个改进，一个最优 k 边着色是指不能改进的 k 边着色.

引理 6.1.2 设 $\mathscr{C} = (E_1, E_2, \cdots, E_k)$ 是 G 的一个最优 k 边着色. 若存在 G 中的一个顶点 u 和颜色 i 及 j，使得 i 不在 u

上表现，而 i 在 u 上至少表现两次，则 $G[E_i \cup E_j]$ 中包含 u 的那个分支是奇圈.

证 设 u 是满足引理假设的顶点，$G[E_i \cup E_j]$ 中包含 u 的分支记为 H. 假设 H 不是奇圈，那么，由引理 6.1.1，H 有一个 2 边着色，它的两种颜色在 H 中度至少为 2 的各个顶点上同时表现. 以这种方式用颜色 i 和 j 重新给 H 的边着色，得到 G 的一个新的 k 边着色 $\mathscr{C}' = (E_1', E_2', \cdots, E_k')$. 用 $c'(v)$ 表示着色 $\mathscr{C}'$ 在 v 上表现的不同颜色的数目，则有

$$c'(u) = c(u) + 1$$

由于两种颜色 i 和 j 都在 u 上表现，并且还有

$$c'(v) \geqslant c(v) \quad \text{对 } v \neq u \text{ 成立}$$

于是 $\sum_{v \in V} c'(v) > \sum_{v \in V} c(v)$，这与 $\mathscr{C}$ 的选择矛盾. 由此推得 H 是奇圈.

定理 6.1 若 G 是偶图，则 $\chi' = \Delta$

证 设 G 是具有 $\chi' > \Delta$ 的图，且 $\mathscr{C} = (E_1, E_2 \cdots, E_\Delta)$ 是一个最优 Δ 边着色，并设 u 是适合 $c(u) < d(u)$ 的一个顶点. 显然 u 满足引理 6.1.2 的假设. 所以 G 包含一个奇圈，因而不是偶图. 由此及(6.1)式推得，若 G 是偶图，则 $\chi' = \Delta$

利用习题 5.2.3(a) 可给出定理 6.1 的另一个证明，它扼要地叙述在习题 6.1.3 中.

习　　题

6.1.1 找出一个适当的边着色以证明 $\chi'(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n})$.

6.1.2 证明 Petersen 图是 4 边色的.

6.1.3 (a) 证明：若 G 是偶图，则 G 有 Δ 正则偶母图.

(b) 利用 (a) 和习题 5.2.3(a)，给出定理 6.1 的另一个证明.

6.1.4 叙述一个求偶图 G 的正常 Δ 边着色的好算法.

6.1.5 利用习题 1.5.8 和定理 6.1，证明：若 G 是无环图且 $\Delta = 3$，则 $\chi' \leqslant 4$.

6.1.6 证明：若 G 是偶图，且 $\delta > 0$，则 G 有一个 δ 边着色，使得所有 δ 种

颜色都在每一个顶点上表现. (R. P. Gupta)

6.2 Vizing 定理

我们已经指出，若G不是偶图，就不一定有 $\chi'=\Delta$. Vizing (1964)和 Gupta (1966) 各自独立地得出一个重要的定理，它断定：对于任何简单图 G，有 $\chi'=\Delta$ 或 $\chi'=\Delta+1$. 下面的证明是 Fournier (1973) 给出的.

定理 6.2 若G是简单图，则 $\chi'=\Delta$ 或 $\chi'=\Delta+1$.

证 设G是简单图. 由于 (6.1) 式，只须证明 $\chi'\leqslant\Delta+1$. 假设 $\chi'>\Delta+1$. 设 $\mathscr{C}=(E_1, E_2, \cdots, E_{\Delta+1})$ 是G的一个最优 $(\Delta+1)$ 边着色，并设 u 是适合 $c(u)<d(u)$ 的顶点. 则存在颜色 i_0 和 i_1，i_0 不在 u 上表现，而 i_1 至少在 u 上表现两次. 设 uv_1

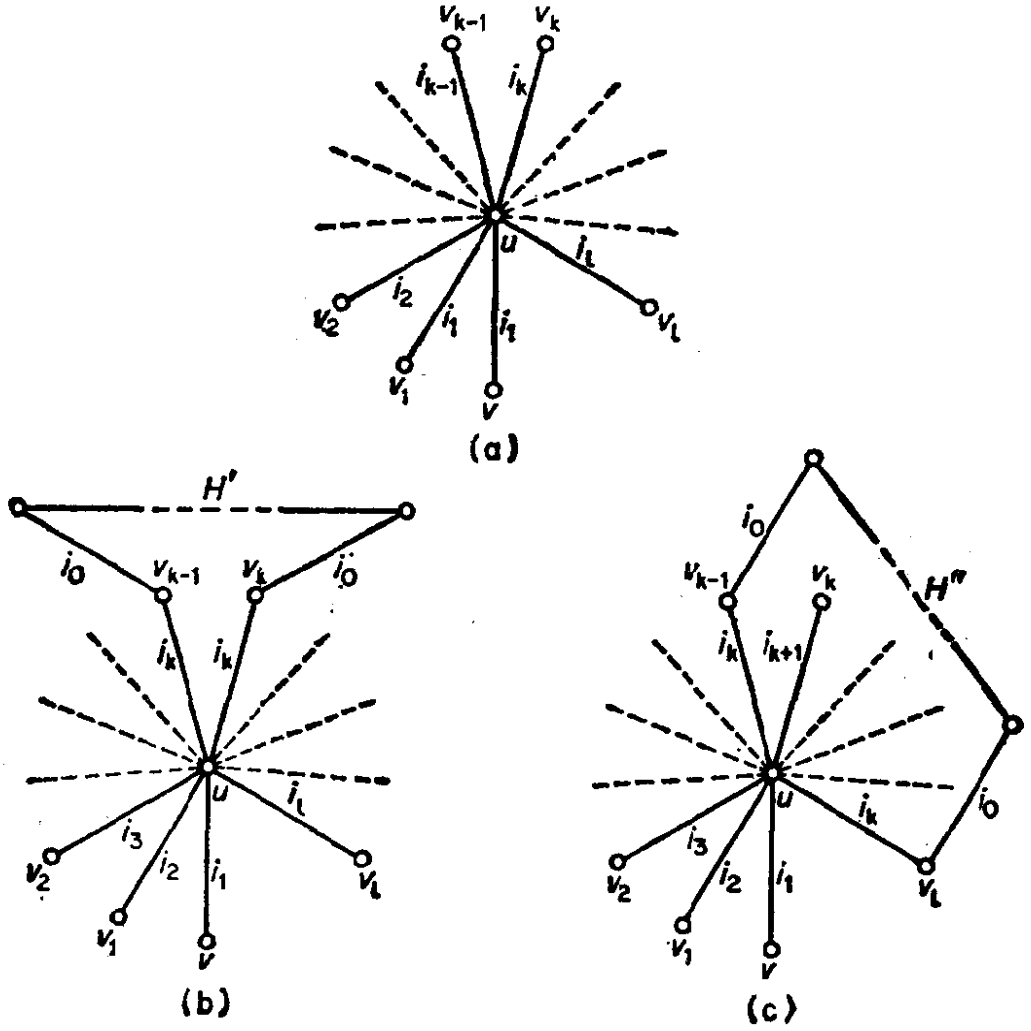


图 6.2

具有颜色 i_1，如图 6.2(a) 所示.

由于 $d(v_1) < \Delta + 1$，因此某一颜色 i_2 不在 v_1 上表现. 这样 i_2 必然在 u 上表现，因为如若不然，用 i_2 来给 uv_1 重新着色，可得 $\mathscr{C}$ 的一个改进. 因此存在一条边 uv_2 有颜色 i_2. 再一次地，由于 $d(v_2) < \Delta + 1$，某一颜色 i_3 不在 v_2 上表现，i_3 必然在 u 上表现，因为如若不然，用 i_2 给 uv_1、用 i_3 给 uv_2 重新着色，又可以得到一个改进的 $(\Delta + 1)$ 边着色. 所以存在一条边 uv_3 有颜色 i_3. 继续这个过程，就构作出一个顶点序列 $v_1, v_2, \cdots$ 和一个颜色序列 $i_1, i_2, \cdots$，使得:

(i) uv_j 有颜色 i_j，且

(ii) i_{j+1} 不在 v_j 上表现.

由于 u 的度是有限数，故存在一个最小整数 l，使得对某个 $k < l$，有

(iii) $i_{l+1} = i_k$.

这种状况在图 6.2(a) 中描绘.

现在以如下方式给 G 重新着色. 对于 $1 \leqslant j \leqslant k-1$，用颜色 i_{j+1} 给 uv_j 重新着色，产生一个新的 $(\Delta + 1)$ 边着色 $\mathscr{C}' = (E'_1, E'_2, \cdots, E'_{\Delta+1})$ (图 6.2(b)). 显然

$$c'(v) \geqslant c(v) \quad \text{对所有 } v \in V \text{ 成立}$$

于是，$\mathscr{C}'$ 也是 G 的最优$(\Delta+1)$边着色，由引理 6.1.2，$G[E'_{i_0} \cup E'_{i_k}]$ 中包含 u 的分支 H' 是奇圈.

现在对于 $k \leqslant j \leqslant l-1$ 用颜色 i_{j+1} 给 uv_j 重新着色，用颜色 i_k 给 uv_l 重新着色，得到一个 $(\Delta + 1)$ 边着色 $\mathscr{C}'' = (E''_1, E''_2, \cdots, E''_{\Delta+1})$ (图 6.2(c)). 如前所述，有

$$c''(v) \geqslant c(v) \quad \text{对所有 } v \in V \text{ 成立}$$

并且 $G[E''_{i_0} \cup E''_{i_k}]$ 中包含 u 的分支 H'' 是奇圈. 但是，由于 v_k 在 H' 中度为 2，显然 v_k 在 H'' 中度为 1，这与 H'' 是奇圈矛盾，由这个矛盾推知定理成立.

实际上 Vizing 证明了比上述定理更一般的定理，它对所有无环图都正确. 在 G 中连接两个顶点的最大边数称为 G 的重数，并

且记为 $\mu(G)$. Vizing 定理的最一般形式为：若 G 是无环图，则 $\Delta \leqslant \chi' \leqslant \Delta + \mu$.

就下述意义来说，这个定理是最佳可能的，即：对任意的 μ，都存在图 G，使得 $\chi' \doteq \Delta + \mu$. 例如在图 6.3 的图 G 中，$\Delta = 2\mu$，并且由于任意两条边都是相邻的，所以 $\chi' = \varepsilon = 3\mu$.

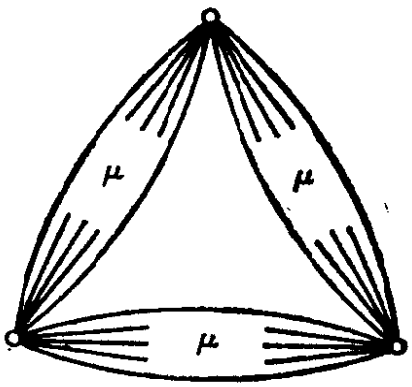


图 6.3 具有 $\chi' = \Delta + \mu$ 的图 G

尽管定理 6.2 很强，仍然留下一个尚未解决的有趣问题：什么样的简单图适合 $\chi' = \Delta$? 这个问题的重要性在第九章研究平面图的边着色时，就更明显了.

习　　题

6.2.1* 找出适当的边着色以证明 $\chi'(K_{2n-1}) = \chi'(K_{2n}) = 2n - 1$.

6.2.2 证明：若 G 是非空的正则简单图，且 ν 是奇数，则 $\chi' = \Delta + 1$.

6.2.3 (a) 设 G 是无环图. 证明：若 $\nu = 2n + 1$ 且 $\varepsilon > n\Delta$，则 $\chi' = \Delta + 1$; (V. G. Vizing)

(b) 利用 (a) 证明：

(i) 若 G 是在有偶数个顶点的无环正则图中剖分一条边而得到的图，则 $\chi' = \Delta + 1$;

(ii) 若 G 是在有奇数个顶点的无环 k 正则图中删去少于 $k/2$ 条边而得到的图，则 $\chi' = \Delta + 1$.

(L. W. Beineke 和 R. J. Wilson)

6.2.4 (a) 证明：若 G 是无环图，则 G 有 Δ 正则无环母图.

(b) 利用(a)及习题 5.2.3(b) 证明：若 G 是无环图并且 Δ 是偶数，则 $\chi' \leqslant 3\Delta/2$.

(Shannon, 1949 年已经证明：这个不等式当 Δ 是奇数时也成立)。

6.2.5 G 称为唯一 k 边可着色的，如果 G 的任意两个正常的 k 边着色都导致 E 有相同的分类。证明：每个唯一 3 边可着色的 3 正则图都是 Hamilton 图。 (D. L. Greenwell 和 H. V. Kronk)

6.2.6 简单图 G 和 H 的积图是指具有顶点集 $V(G)\times V(H)$ 的简单图 $G\times H$，其中 (u, v) 与 (u', v') 相邻当且仅当或者 $u = u'$ 且 $vv' \in E(H)$，或者 $v = v'$ 且 $uu' \in E(G)$。

(a) 利用 Vizing 定理(6.2)证明：$\chi'(G\times K_2) = \Delta(G\times K_2)$

(b) 试证：若 H 是非平凡的，并且 $\chi'(H) = \Delta(H)$，则 $\chi'(G\times H) = \Delta(G\times H)$。

6.2.7 叙述一个求简单图 G 的正常 $(\Delta + 1)$ 边着色的好算法。

6.2.8* 证明：若 G 是简单图，并且 $\delta > 1$，则 G 有一个 $(\delta - 1)$ 边着色，使得所有 $\delta - 1$ 种颜色都在每个顶点上表现。 (R. P. Gupta)

应　　用

6.3 排课表问题

在一所学校里，有 m 位教师 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 和 n 个班级 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$，在明确教师 X_i 需要给班级 Y_j 上 p_{ij} 节课之后，要求制订一张课时尽可能少的完善的课表。

上述问题名为排课表问题，利用本章所论述的边着色理论能够完满地解决它。我们用具有二分类 (X, Y)，$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，并且顶点 x_i 和 y_j 由 p_{ij} 条边连接着的偶图 G 来表示教学要求，由于我们至少可假设，在任何一节课时里，一位教师最多能教一个班级，并且每个班级也最多只能由一位教师讲课。所以，关于一个课时的教学时间表对应于图中的一个对集。反之，每一个对集对应于在一节课时里教师们到班级里去的一种可能的分派。因此，我们的问题就是把 G 的边划分成对集，而使得对集的个数尽可能地少，或等价地，把 G 的边用尽可能少的颜色正常着色。由于 G 是偶图，由定理 6.1 知道 $\chi' = \Delta$。因此，若没有教师教多于 p 节的课以及没有班级上多于 p 节的课，

则教学要求可用一张有 p 课时的课表安排出来.并且,如习题6.1.4所指出的那样,存在一个安排这种课表的好算法,于是,排课表问题就有了完善的解答.

然而,情况并不总是那么直截了当.假定只有有限个教室可供利用.在这个附加约束下,安排一张完善的课表需要多少课时呢?

假设总共有 l 节课,安排在一张 p 课时的课表里.由于这张课表对于每一课时而言,平均要求开出 l/p 节课.显然,在某一课时里至少需要 $\{l/p\}$ 个教室.还可指出:在一张 p 课时的课表里总能安排 l 节课,使得在一节课时内最多占用 $\{l/p\}$ 个教室.这个结论是由下面的定理 6.3 得出的.现在先建立一个引理.

引理 6.3 设 M 和 N 是 G 的两个不相交对集,并且 $|M|>|N|$,则存在 G 的不相交对集 M' 和 N',使得 $|M'|=|M|-1$,$|N'|=|N|+1$,且 $M'\cup N'=M\cup N$.

证 考察图 $H=G[M\cup N]$.和定理 5.1 的证明一样,H 的每个分支或者是一条其边在 M 和 N 中交错的偶圈,或者是一条其边在 M 和 N 中交错的路.由于 $|M|>|N|$,所以 H 中一定有一个分支 P,它是路,并且开始于也终止于 M 的边.设 $P=v_0e_1v_1\cdots e_{2n+1}v_{2n+1}$,且置

$$M'=(M\backslash\{e_1,e_3,\cdots,e_{2n+1}\})\cup\{e_2,e_4,\cdots,e_{2n}\}$$

$$N'=(N\backslash\{e_2,e_4,\cdots,e_{2n}\})\cup\{e_1,e_3,\cdots,e_{2n+1}\}$$

则 M' 和 N' 是 G 的对集,并且满足引理的条件.

定理 6.3 若 G 是偶图,且 $p\geqslant\Delta$,则存在 G 的 p 个不相交对集 $M_1,M_2,\cdots,M_p$,使得

$$E=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_p \tag{6.4}$$

并且对于 $1\leqslant i\leqslant p$,有

$$[\varepsilon/p]\leqslant|M_i|\leqslant\{\varepsilon/p\} \tag{6.5}$$

(注意:条件 (6.5) 说明任意两个对集 M_i 和 M_j 的边数最多相差 1.)

证 设 G 是偶图.由定理 6.1,G 的边可以划分成 Δ 个对集

$M_1', M_2', \cdots, M_\Delta'$. 所以对于任意 $p \geqslant \Delta$，存在 p 个不相交的对集 $M_1', M_2' \cdots, M_p'$（对 $i > \Delta$，有 $M_i' = \varnothing$），使得

$$E = M_1' \cup M_2' \cup \cdots \cup M_p'.$$

对于这些对集中边数相差超过 1 的任何两个对集反复应用引理 6.3，最后就得到 G 的 p 个满足 (6.4) 式和 (6.5) 式的不相交对集 $M_1, M_2, \cdots, M_p$，这正是所需要的.

举一个例子：假设有四位教师和五个班级，并且教学要求的矩阵 $\boldsymbol{P} = [p_{ij}]$ 如图 6.4(a) 所示，一个可能采用的 4 课时的课表见图 6.4(b) 所示.

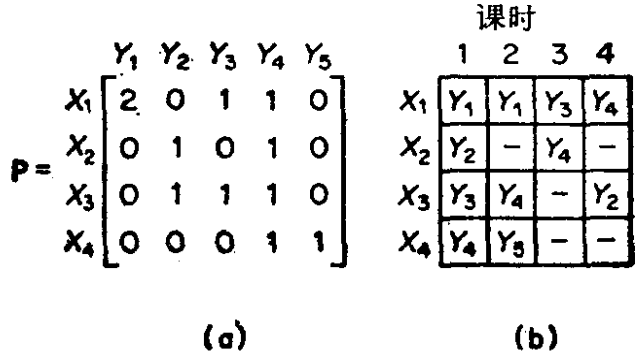


图 6.4

把对应于 $\boldsymbol{P}$ 的偶图的边集分解为一些对集，可以把上述课表图示出来，如图 6.5(a) 所示.（细边对应课时 1，断续边对应课时 2，波浪边对应课时 3，粗边对应课时 4.）

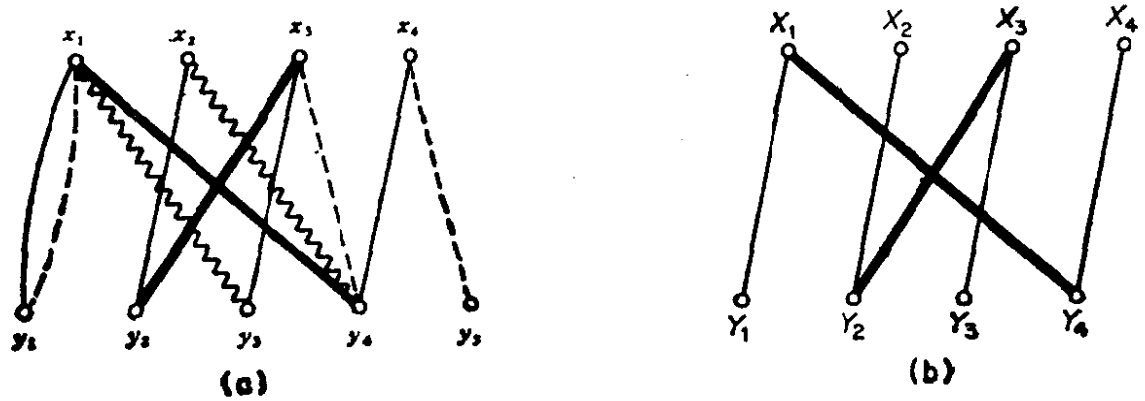
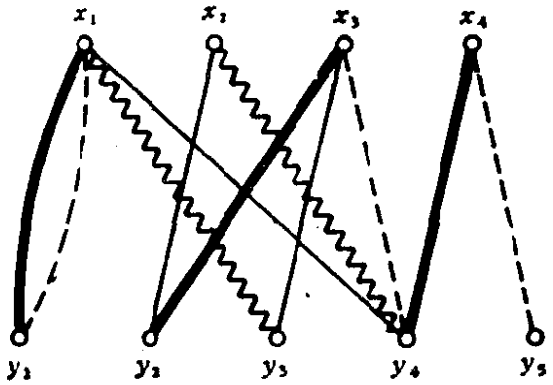


图 6.5

从课表中，我们看到有四个班级在课时 1 上课，因而需要四个教室. 然而由于 $\varepsilon = 11$，所以由定理 6.3，能够安排一张 4 课时

的课表，使得在每一课时中有 $2(=\lceil 11/4\rceil)$ 或 $3(=\{11/4\})$ 个班级在上课．事实上，设 M_1 表示细边的那个对集，而 M_4 表示粗边的那个对集；注意 $|M_1|=4$ 和 $|M_4|=2$．通过考察 $G[M_1\cup M_4]$，能够找到一张 4 课时 3 教室的课表（图 6.5(b)）．由于 $G[M_1\cup M_2]$ 有两个分支，每个分支均由长为 3 的路组成．而且这两条路都以细边开始，也都以细边终止．于是把其中一条路的粗细边互换，就能缩减细边的对集使它只含三条边，同时粗边的对集增加到三条边．若选择路 $y_1x_1y_4x_4$，将边 y_1x_1 和 y_4x_4 改为粗边，而将边 x_1y_4 改为细边，则得到图 6.6(a) 所示的 E 的一个分解．由它再给出改订的课表示于图 6.6(b) 中；这里，任一课时内只需要 3 个教室．



(a)

	课时 1	2	3	4
X_1	Y_4	Y_1	Y_3	Y_1
X_2	Y_2	–	Y_4	–
X_3	Y_3	Y_4	–	Y_2
X_4	–	Y_5	–	Y_4

(b)

图 6.6

可是，假设只有两个教室可供利用．定理 6.3 告诉我们：必须有一张 6 课时的课表才能满足我们的要求（由于 $\{11/6\}=2$），这样的一张课表在图 6.7 中给出．

	课时 1	2	3	4	5	6
X_1	Y_4	Y_3	Y_1	–	Y_1	–
X_2	Y_2	Y_4	–	–	–	–
X_3	–	–	Y_4	Y_3	Y_2	–
X_4	–	–	–	Y_4	–	Y_5

图 6.7

在实际生活中，有关排课表的大多数问题，由于预先给定某些关于分派的限制（例如，在某些课时里指定某些教师必须在某些班级上课）而变得很复杂。排课表问题的这种推广形式由 Dempster (1971) 和 de-Werra (1970) 研究过.

习　　题

6.3.1　在一所学校里，有七位教师和十二个班级. 五天一周的教学要求由下面的矩阵给出

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	Y_{11}	Y_{12}
X_1	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
X_2	1	3	6	0	4	2	5	1	3	3	0	4
X_3	5	0	5	5	0	0	5	0	5	0	5	5
X_4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	3
X_5	3	5	2	2	0	3	1	4	4	3	2	5
X_6	5	5	0	0	5	5	0	5	0	5	5	0
X_7	0	3	4	3	4	3	4	3	4	3	3	0

这里，p_{ij} 是教师 X_i 必须教班级 Y_j 的课时数.

(a) 一天必须分成多少课时才能满足要求?

(b) 若一张每天八个课时的课表已经排出，则需要多少教室?

参 考 文 献

Dempster, M. A. H. (1971). Two algorithms for the time-table problem, in *Combinatorial Mathematics and its Applications* (ed. D. J. A. Welsh), Academic Press, New York, pp. 63—85

Fournier, J.-C. (1973). Colorations des arêtes d'un graphe. *Cahiers du CERO*, **15**, 311—14.

Gupta, R. P. (1966). The chromatic index and the degree of a graph. *Notices Amer. Math. Soc.* **13**, abstract 66T—429

Shannon, C. E. (1949). A theorem on coloring the lines of a network. *J. Math. Phys.*, **28**, 148—51

Vizing, V. G. (1964). On an estimate of the chromatic class of a p-graph (Russian). *Diskret. Analiz.*, **3**, 25—30

de Werra, D. (1970). On some combinatorial problems arising in scheduling. *INFOR*, **8**, 165—75

第七章　独立集和团

7.1　独立集

设 S 是 V 的一个子集，若 S 中任意两个顶点在 G 中均不相邻，则称 S 为 G 的一个独立集. G 的一个独立集 S 称为 G 的最大独立集，如果 G 不包含适合 $|S'|>|S|$ 的独立集 S'. 独立集的例子在图 7.1 中给出.

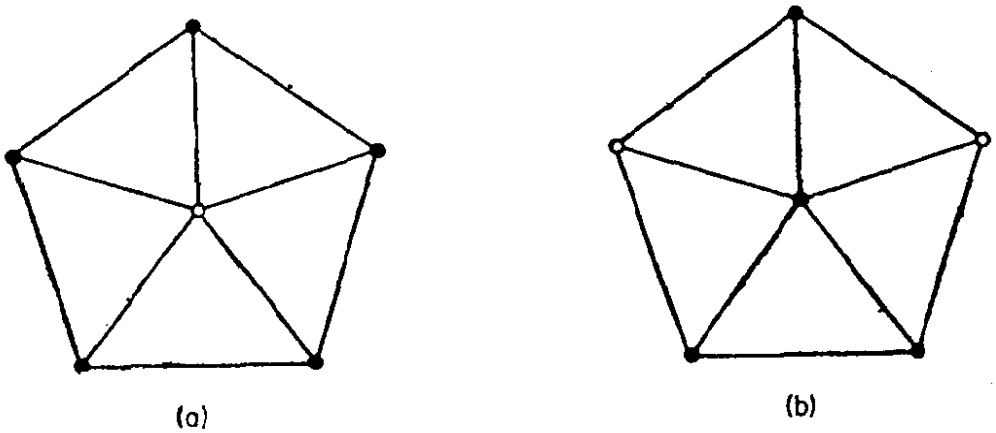


图 7.1　(a) 一个独立集；(b)一个最大独立集

回想一下，G 的一个覆盖是指 V 的子集 K，使得 G 的每条边都至少有一个端点属于 K. 图 7.1 给出的两个独立集都是覆盖的补集. 不难看出这是个普遍的规律.

定理 7.1　设 $S\subseteq V$，则 S 是 G 的独立集当且仅当 $V\backslash S$ 是 G 的覆盖.

证　按定义，S 是 G 的独立集当且仅当 G 中每条边的两个端点都不同时属于 S，即当且仅当 G 的每条边至少有一个端点属于 $V\backslash S$，亦即当且仅当 $V\backslash S$ 是 G 的覆盖.

G 的最大独立集的顶点数称为 G 的独立数，记为 $\alpha(G)$；类似地，G 的最小覆盖的顶点数称为 G 的覆盖数，记为 $\beta(G)$.

推论 7.1　$\alpha+\beta=\nu$.

证 设 S 是 G 的一个最大独立集，K 是 G 的一个最小覆盖. 由定理 7.1，$V\backslash K$ 是独立集，而 $V\backslash S$ 是覆盖. 因此

$$\nu - \beta = |V\backslash K| \leqslant \alpha \tag{7.1}$$

$$\nu - \alpha = |V\backslash S| \geqslant \beta. \tag{7.2}$$

结合 (7.1) 式和 (7.2) 式，即得 $\alpha + \beta = \nu$.

独立集关于边的类似概念是任意两条边均不相邻的连杆的集，这就是对集. 覆盖关于边的类似概念称为边覆盖. G 的一个边覆盖是指 E 的一个子集 L，使得 G 的每个顶点都是 L 中某条边的端点. 注意边覆盖并不总是存在的；G 有边覆盖当且仅当 $\delta > 0$. 我们记 G 的最大对集的边数为 $\alpha'(G)$，而记 G 的最小边覆盖的边数为 $\beta'(G)$；数 $\alpha'(G)$ 和 $\beta'(G)$ 分别称为 G 的边独立数和边覆盖数.

对集和边覆盖之间的关系并不象独立集和覆盖之间的关系那样简单；对集的补集不一定是边覆盖，边覆盖的补集也不一定是对集. 可是 α' 与 β' 这两个参数之间的关系却和 α 与 β 之间的关系相同.

定理 7.2 (Gallai, 1959) 若 $\delta > 0$，则 $\alpha' + \beta' = \nu$.

证 设 M 是 G 的一个最大对集，U 是 M 非饱和顶点集. 由于 $\delta > 0$ 且 M 是最大对集，所以存在 $|U|$ 条边的一个集 E'，它的每条边都和 U 的每个顶点相关联. 显然，$M \cup E'$ 是 G 的边覆盖，因而

$$\beta' \leqslant |M \cup E'| = \alpha' + (\nu - 2\alpha') = \nu - \alpha'$$

即

$$\alpha' + \beta' \leqslant \nu \tag{7.3}$$

再设 L 是 G 的一个最小边覆盖，置 $H = G[L]$，并且设 M 是 H 的一个最大对集. 用 U 记 H 中的 M 非饱和顶点集. 由于 M 是最大对集，所以 $H[U]$ 没有连杆，从而

$$|L| - |M| = |L\backslash M| \geqslant |U| = \nu - 2|M|$$

又因为 H 是 G 的子图，所以 M 也是 G 的对集，从而

$$\alpha' + \beta' \geqslant |M| + |L| \geqslant \nu \tag{7.4}$$

综合 (7.3) 式和 (7.4) 式,即得 $\alpha' + \beta' = \nu$.

现在可以证明一个在形式上与 König 定理 (5.3) 极相象的定理.

定理 7.3 在 $\delta > 0$ 的偶图 G 中,最大独立集的顶点数等于最小边覆盖的边数.

证 设 G 是 $\delta > 0$ 的偶图. 由推论 7.1 和定理 7.2, 有

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$$

由于 G 是偶图,从定理 5.3 推知 $\alpha' = \beta$, 于是 $\alpha = \beta'$.

虽然独立集的概念类似于对集的概念, 但却不存在和第五章中对集理论相仿的独立集理论; 例如, 目前尚不知道求图的最大独立集的好算法. 虽然如此, 图的最大独立集的顶点数和该图的各种其他参数之间的关系却存在两个有趣的定理. 这些定理将在 7.2 节和 7.3 节中讨论.

习 题

7.1.1 (a) 证明: G 是偶图当且仅当对 G 的每个子图 H 均有 $\alpha(H) \geqslant \frac{1}{2}\nu(H)$.

(b) 证明: G 是偶图当且仅当对 G 的每个适合 $\delta(H) > 0$ 的子图 H 均有 $\alpha(H) = \beta'(H)$.

7.1.2 称图 G 是 α 临界的,如果对所有 $e \in E$, 有 $\alpha(G - e) > \alpha(G)$. 证明: 连通 α 临界图没有割点.

7.1.3 称图 G 是 β 临界的,如果对所有 $e \in E$, 有 $\beta(G - e) < \beta(G)$. 证明:

(a) 连通 β 临界图没有割点;

(b)* 若 G 是连通的,则 $\beta \leqslant \frac{1}{2}(\varepsilon + 1)$.

7.2 Ramsey 定理

本节仅讨论简单图. 简单图 G 的一个团是指 V 中的一个子集 S, 使得 $G[S]$ 是完全图. 显然, S 是 G 的团,当且仅当 S 是 G^c 的独立集. 因此这两个概念是互补的.

若 G 没有大的团, 则可以料想 G 有大的独立集. 这种情况的

真实性是由 Ramsey (1930) 首次证明的. 他指出: 给定任意正整数 k 和 l 后,总存在一个最小整数 $r(k, l)$,使得每个有 $r(k, l)$ 个顶点的图,或者包含一个有 k 个顶点的团,或者包含一个有 l 个顶点的独立集. 例如,容易看出:

$$r(1, l) = r(k, 1) = 1 \tag{7.5}$$

以及

$$r(2, l) = l, \quad r(k, 2) = k \tag{7.6}$$

数 $r(k, l)$ 称为 Ramsey 数. 关于 Ramsey 数的下述定理是由 Erdös 和 Szekeres (1935) 以及 Greenwood 和 Gleason (1955) 提出的.

定理 7.4 对于任意两个整数 $k \geqslant 2$ 和 $l \geqslant 2$, 有

$$r(k, l) \leqslant r(k, l-1) + r(k-1, l) \tag{7.7}$$

并且,若 $r(k, l-1)$ 和 $r(k-1, l)$ 都是偶数,则 (7.7) 式中的不等式严格成立.

证 设 G 是有 $r(k, l-1) + r(k-1, l)$ 个顶点的图,并设 $v \in V$. 以下分两种情形讨论:

(i) v 和至少有 $r(k, l-1)$ 个顶点的集 S 不相邻,或

(ii) v 和至少有 $r(k-1, l)$ 个顶点的集 T 相邻.

注意: 情形 (i) 或 (ii) 中必有一个成立, 因为与 v 不相邻的顶点数加上与 v 相邻的顶点数等于 $r(k, l-1) + r(k-1, l) - 1$.

在情形(i)中, $G[S]$ 包含 k 个顶点的团或是包含 $(l-1)$ 个顶点的独立集,所以 $G[S \cup \{v\}]$ 包含 k 个顶点的团或是包含 l 个顶点的独立集. 类似地,在情形 (ii) 中, $G[T \cup \{v\}]$ 包含 k 个顶点的团或是包含 l 个顶点的独立集. 由于情形 (i) 和情形 (ii) 必有一个成立, 因此推出 G 包含 k 个顶点的团或是包含 l 个顶点的独立集. 这就证明了(7.7)式.

现在假设 $r(k, l-1)$ 和 $r(k-1, l)$ 都是偶数, 并且设 G 是有 $r(k, l-1) + r(k-1, l) - 1$ 个顶点的图. 由于 G 有奇数个顶点,由推论 1.1 可以推知, 存在一个偶点 v ;特别地, v 不能恰好与 $r(k-1, l) - 1$ 个顶点相邻. 所以不管情形 (i) 或情形 (ii) 哪个成立, G 都包含 k 个顶点的团或是包含 l 个顶点的独立

集．于是

$$r(k, l) \leqslant r(k, l-1) + r(k-1, l) - 1$$

成立．

一般说来，确定 Ramsey 数是一个非常困难的尚未解决的问题．通过构作适当的图可以得到它的下界．例如，考察图 7.2 中给出的四个图．

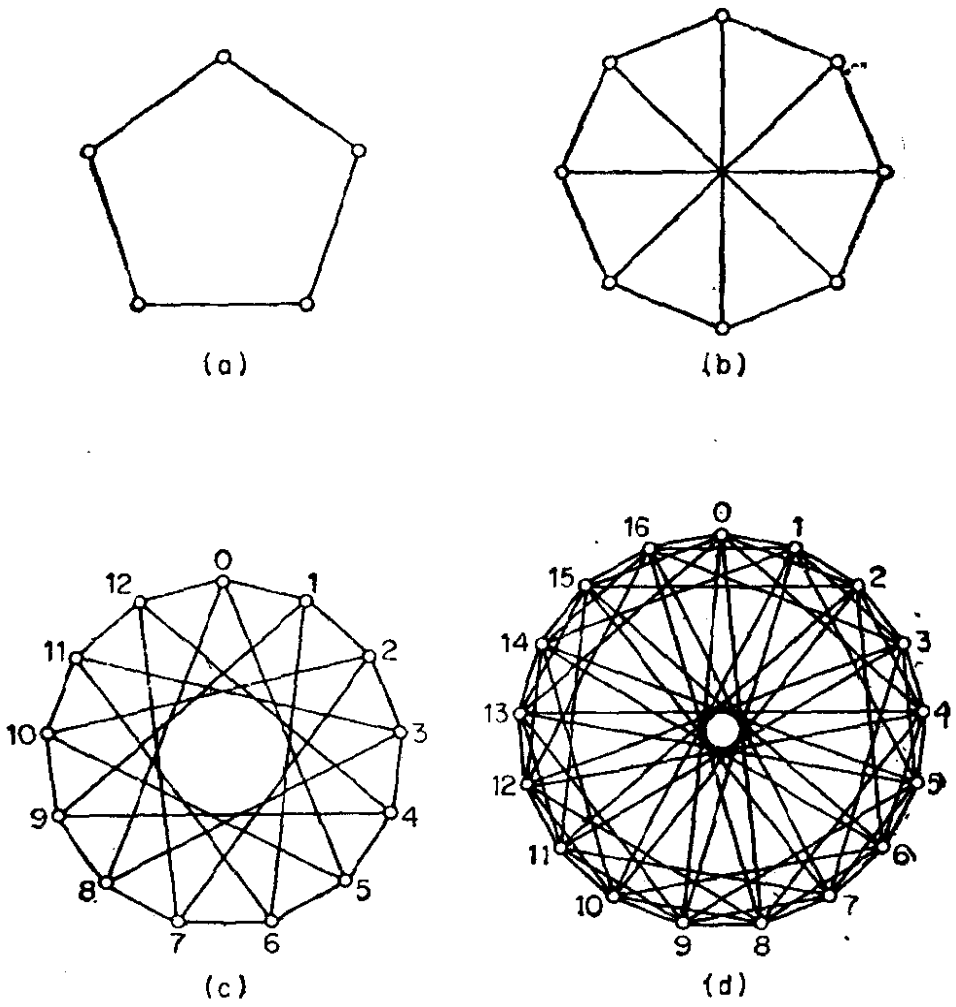


图 7.2 (a) (3, 3) Ramsey 图； (b) (3, 4) Ramsey 图；
(c) (3, 5) Ramsey 图； (d) (4, 4) Ramsey 图

5 圈（图 7.2(a)）不包含 3 个顶点的团，也不包含 3 个顶点的独立集．因而推知：

$$r(3, 3) \geqslant 6 \tag{7.8}$$

图 7.2(b) 中的图不包含 3 个顶点的团，也不包含 4 个顶点的独立集．所以

$$r(3,4) \geqslant 9 \tag{7.9}$$

类似地，图 7.2(c) 中的图说明

$$r(3,5) \geqslant 14 \tag{7.10}$$

以及图 7.2(d) 中的图产生

$$r(4,4) \geqslant 18 \tag{7.11}$$

借助于定理 7.4 和方程 (7.6)，可以证明 (7.8) 式、(7.9) 式、(7.10) 式和 (7.11) 式中的等式事实上是成立的. 首先，根据(7.7) 式和 (7.6) 式，有

$$r(3,3) \leqslant r(3,2) + r(2,3) = 6$$

利用 (7.8) 式，即得 $r(3,3) = 6$. 注意 $r(3,3)$ 和 $r(2,4)$ 都是偶数，应用定理 7.4 以及 (7.6) 式，可得

$$r(3,4) \leqslant r(3,3) + r(2,4) - 1 = 9$$

连同 (7.9) 式，可知 $r(3,4) = 9$. 再应用 (7.7) 式和 (7.6) 式得

$$r(3,5) \leqslant r(3,4) + r(2,5) = 14$$

以及

$$r(4,4) \leqslant r(4,3) + r(3,4) = 18$$

它们分别连同 (7.10) 式和 (7.11) 式，可得 $r(3,5) = 14$ 和 $r(4,4) = 18$.

下表指出到目前为止已知的所有 Ramsey 数 $r(k,l)$.

k \ l	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	9	14	18	23
4	1	4	9	18			

一个 (k,l) Ramsey 图是指有 $r(k,l)-1$ 个顶点的既不包含 k 个顶点的团，也不包含 l 个顶点的独立集的图. 根据 $r(k,l)$ 的定义，对于所有 $k \geqslant 2$ 和 $l \geqslant 2$，这样的图是存在的. 看来，Ramsey 图常常具有有趣的结构. 图 7.2 中所有的图都是 Ramsey

图；其中后面两个可以用以下方式从有限域中得到．把十三个顶点作为整数模 13 的域的元素，并且当它们之中的任意两个的差是 13 的立方剩余时(即为 1，5，8 或 12 时)，用一条边把这两个顶点连接起来，就得到 (3,5) Ramsey 图；把十七个顶点作为整数模 17 的域的元素，并且当它们之中的任意两个的差是 17 的平方剩余(即为 1，2，4，8，9，13，15 或 16)时，把这两个顶点连接起来，就得到 (4，4) Ramsey 图．人们猜测 (k, k) Ramsey 图总是自补的(即与它的补图同构)；当 $k = 2, 3, 4$ 时这个猜测是正确的．

一般说来，定理 7.4 产生 $r(k, l)$ 的下述上界．

定理 7.5 $r(k, l) \leqslant \binom{k+l-2}{k-1}$

证 对 $k+l$ 用归纳法．利用 (7.5) 式和 (7.6) 式，我们看到，当 $k+l \leqslant 5$ 时定理成立．设 m 和 n 是正整数，并且假定定理对于所有适合 $5 \leqslant k+l < m+n$ 的正整数 k 和 l 都成立．则由定理 7.4 和归纳法假设，有

$$r(m, n) \leqslant r(m, n-1) + r(m-1, n)$$
$$\leqslant \binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

于是，定理对所有的正整数 k 和 l 都成立．

$r(k, k)$ 的一个下界在下面的定理中给出．它是借助于名为概率方法(见 Erdös 和 Spencer，1974) 这一强有力的技术而得到的．这种概率方法在本质上是一种粗糙的计数论证方法．虽然它是非构造性的，但却时常被用来断定具有某种特性的图的存在性．

定理 7.6 (Erdös，1947) $r(k, k) \geqslant 2^{k/2}$

证 由于 $r(1, 1) = 1$ 及 $r(2, 2) = 2$，所以可以假定 $k \geqslant 3$．用 $\mathscr{G}_n$ 表示以 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 为顶点集的简单图的集，并且用 $\mathscr{G}_n^k$ 表示 $\mathscr{G}_n$ 中具有 k 个顶点的团的那些图的集．显然

$$|\mathscr{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}} \tag{7.12}$$

因为 $\binom{n}{2}$ 条可能的边 v_iv_j 的每个子集决定 $\mathscr{G}_n$ 中的一个图．类

似地，在 $\mathscr{G}_n$ 中以某个特定的 k 个顶点的集作为团的图的个数是 $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$。由于 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 的相异 k 元子集共有 $\binom{n}{k}$ 个，所以

$$|\mathscr{G}_n^k| \leqslant \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} \tag{7.13}$$

由 (7.12) 式和 (7.13) 式，有

$$\frac{|\mathscr{G}_n^k|}{|\mathscr{G}_n|} \leqslant \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{n^k 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} \tag{7.14}$$

现在假设 $n < 2^{k/2}$，从 (7.14) 式推知

$$\frac{|\mathscr{G}_n^k|}{|\mathscr{G}_n|} < \frac{2^{k^2/2} 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}$$

因此 $\mathscr{G}_n$ 中只有少于半数的图包含 k 个顶点的团. 同时，因为 $\mathscr{G}_n = \{G \mid G^c \in \mathscr{G}_n\}$，所以 $\mathscr{G}_n$ 中同样也只有少于半数的图包含 k 个顶点的独立集. 因此，必然有 $\mathscr{G}_n$ 中的某一图既不包含 k 个顶点的团，也不包含 k 个顶点的独立集. 因为这个结论对任意 $n < 2^{k/2}$ 都成立，所以有 $r(k, k) \geqslant 2^{k/2}$。

从定理 7.6 可以立即导出 $r(k, l)$ 的一个下界.

推论 7.6 若 $m = \min\{k, l\}$，则 $r(k, l) \geqslant 2^{m/2}$。

所有已知的用构造性论证方法得到的 $r(k, l)$ 的下界都比推论 7.6 给出的下界来得弱；其中最好的一个结果由 Abbott (1972) 给出，他证明了：$r(2^n + 1, 2^n + 1) \geqslant 5^n + 1$ (习题 7.2.4)。

关于 Ramsey 数 $r(k, l)$，有时还可以用另一种方式加以定义，它与本节开始时给出的定义稍有不同. 人们容易看出，$r(k, l)$ 可以看作是最小的整数 n，使得 K_n 的每个 2 边着色 (E_1, E_2)，或者包含一个 k 个顶点的完全子图，它的所有边都有颜色 1；或者包含一个 l 个顶点的完全子图，它的所有边都有颜色 2. 用这种形式表达时，Ramsey 数有一个自然的推广. 我们定义 Ramsey 数 $r(k_1, k_2, \cdots, k_m)$ 是最小的整数 n，使得 K_n 的每个 m 边着色 $(E_1, E_2, \cdots, E_m)$，都包含一个对某个 i 而言的 k_i 个顶点的完全子图，它的所有边都有颜色 i.

下面的定理和推论推广了(7.7)式和定理7.5，证明也是类似的，留作习题(7.2.2)。

定理 7.7 $$r(k_1, k_2, \cdots, k_m) \leqslant r(k_1 - 1, k_2, \cdots, k_m) + r(k_1, k_2 - 1, \cdots, k_m) + \cdots + r(k_1, k_2, \cdots, k_m - 1) - m + 2$$

推论 7.7

$$r(k_1 + 1, k_2 + 1, \cdots, k_m + 1) \leqslant \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_m)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

习　　题

7.2.1 证明：对于所有的 k 和 l，有 $r(k, l) = r(l, k)$。

7.2.2 证明定理 7.7 和推论 7.7。

7.2.3 设 r_n 表示 Ramsey 数 $r(k_1, k_2, \cdots, k_n)$，这里对所有 i，$k_i = 3$。

(a) 证明：$r_n \leqslant n(r_{n-1} - 1) + 2$。

(b) 注意 $r_2 = 6$，并利用(a)证明：$r_n \leqslant [n!e] + 1$。

(c) 试证：$r_3 \leqslant 17$。

(Greenwood 和 Gleason 1955 年已证明：$r_3 = 17$。)

7.2.4 简单图 G 和 H 的合成图是指具有顶点集 $V(G) \times V(H)$ 的简单图 $G[H]$，它的顶点 (u, v) 和另一个顶点 (u', v') 相邻当且仅当或者 $uu' \in E(G)$，或者 $u = u'$ 且 $vv' \in E(H)$。

(a) 证明：$\alpha(G[H]) \leqslant \alpha(G) \cdot \alpha(H)$。

(b) 利用(a)证明：

$$r(kl + 1, kl + 1) - 1 \geqslant (r(k + 1, k + 1) - 1) \times (r(l + 1, l + 1) - 1)$$

(c) 试证：$r(2^n + 1, 2^n + 1) \geqslant 5^n + 1$ 对所有 $n \geqslant 0$ 成立。

(H. L. Abbott)

7.2.5 证明：3 圈和 5 圈的联图不包含 K_6，但它的每个 2 边着色都产生一个单色三角形。(R. L. Graham)

(Folkman 1970 年曾构作了一个不包含 K_4 的图，它的每一个 2 边着色都产生一个单色三角形——这个图具有非常大的顶点数。)

7.2.6 设 $G_1, G_2, \cdots, G_m$ 都是简单图。广义 Ramsey 数 $r(G_1, G_2, \cdots, G_m)$ 是指最小的整数 n，使得 K_n 的每个 m 边着色 $(E_1, E_2, \cdots, E_m)$，都包含一个对某个 i 而言的染有颜色 i 而同构于 G_i 的子图。证明：

(a) 若 G 是长为 3 的路，而 H 是 4 圈，则 $r(G,G)=5$，$r(G,H)=5$ 和 $r(H,H)=6$；

(b)* 若 T 是有 m 个顶点的任意一棵树，而且 $m-1$ 能整除 $n-1$，则 $r(T,K_{1,n})=m+n-1$；

(c)* 若 T 是有 m 个顶点的任意一棵树，则 $r(T,K_n)=(m-1)\times(n-1)+1$ (V. Chvátal)

7.3 Turan 定理

在这一节里，我们将证明由 Turán (1941) 提出的一个著名的定理. 它确定了有 ν 个顶点而不包含大小为 $m+1$ 的团的简单图所能具有的最大边数. Turán 定理已经成为所谓的极图理论 (见 Erdös, 1967) 这样一个有意义的图论分支的基础. 我们将从 Erdös (1970) 的下述结果来导出它.

定理 7.8 若简单图 G 不包含 K_{m+1}，则 G 度弱于某个完全 m 部图 H. 并且，若 G 具有与 H 相同的度序列，则 $G\cong H$.

证 对 m 用归纳法. 当 $m=1$ 时定理当然成立. 假定定理对所有 $m<n$ 成立，并且设 G 是不包含 K_{n+1} 的简单图. 选择 G 中度为 Δ 的一个顶点 u，并且置 $G_1=G[N(u)]$. 由于 G 不包含 K_{n+1}，所以 G_1 不包含 K_n，因而由归纳法假设，G_1 度弱于某个完全 $(n-1)$ 部图 H_1.

其次，置 $V_1=N(u)$ 以及 $V_2=V\backslash V_1$，并且用 G_2 表示其顶点集是 V_2 而边集是空集的图. 考察 G_1 和 G_2 的联图 $G_1\vee G_2$. 由于

$$N_G(v)\subseteq N_{G_1\vee G_2}(v),\quad \text{对于 } v\in V_1 \text{ 成立} \tag{7.15}$$

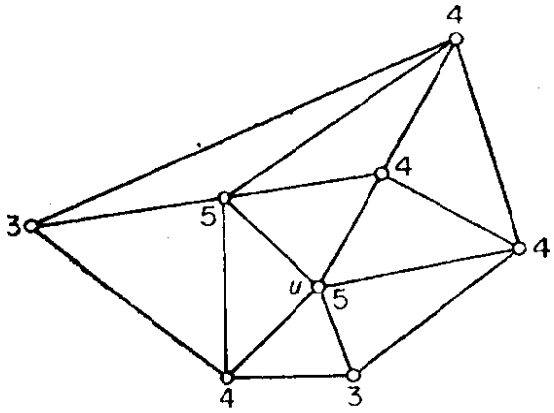
而且 V_2 的每个顶点在 $G_1\vee G_2$ 中有度 Δ，所以 G 度弱于 $G_1\vee G_2$. 因而 G 也就度弱于完全 n 部图 $H=H_1\vee G_2$. (见图 7.3 的直观表示.)

现在假设 G 和 H 有相同的度序列，则 G 与 $G_1\vee G_2$ 有相同的度序列，同时在(7.15)式中等式必然成立. 于是在 G 中，V_1 的每个顶点必然和 V_2 的每个顶点相连. 由此推知 $G=G_1\vee G_2$. 由于 $G=$

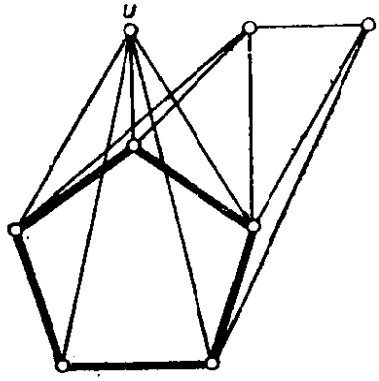
$G_1 \vee G_2$ 和 $H = H_1 \vee G_2$ 有相同的度序列，因而图 G_1 和 H_1 必然有相同的度序列，于是由归纳法假设，它们是同构的．我们得到 $G \cong H$.

有趣的是，上述定理和定理 4.6 有着显著的相似之处.

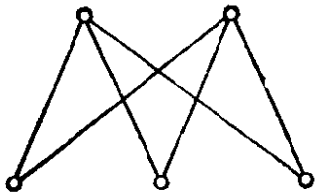
设 $T_{m,n}$ 表示有 n 个顶点的完全 m 部图，它的各个部分在大小上尽可能地相等；图 7.3 中的图是 $T_{3,8}$.



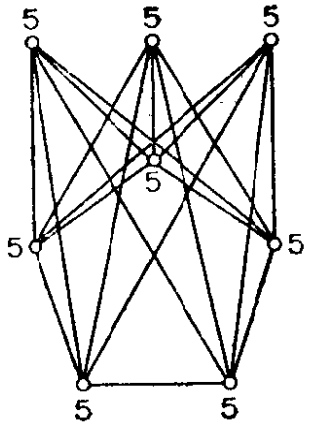
$G(3,3,4,4,4,4,5,5)$



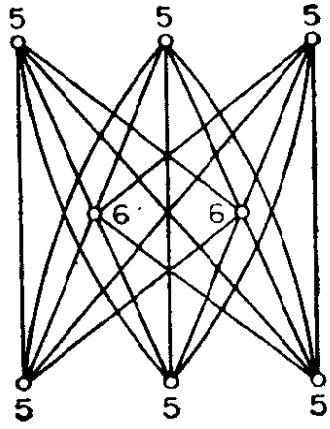
G的另一个图形其中的边缘用粗线指明



H_1



$G_1 \vee G_2$ (5,5,5,5,5,5,5,5)



$H = H_1 \vee G_2$(5,5,5,5,5,5,6,6)

图 7.3

定理 7.9 若 G 是简单图，并且不包含 K_{m+1}，则 $\varepsilon(G) \leqslant \varepsilon(T_{m,v})$. 此外，仅当 $G \cong T_{m,v}$ 时有 $\varepsilon(G) = \varepsilon(T_{m,v})$.

证 设 G 是不包含 K_{m+1} 的简单图．由定理 7.8，G 度弱于某个完全 m 部图 H. 从定理 1.1 即得

$$\varepsilon(G) \leqslant \varepsilon(H) \tag{7.16}$$

但是（习题 1.2.9）

$$\varepsilon(H) \leqslant \varepsilon(T_{m,v}) \tag{7.17}$$

因而从 (7.16) 式和 (7.17) 式即得

$$\varepsilon(G) \leqslant \varepsilon(T_{m,v}) \tag{7.18}$$

这就证明了定理的第一个结论.

现在假设在(7.18)式中等式成立. 则在 (7.16) 式和(7.17) 式中等式也必然成立. 由于 $\varepsilon(G) = \varepsilon(H)$ 以及 G 度弱于 H, 所以 G 和 H 必然有相同的度序列. 因而由定理 7.8, $G \cong H$. 又由于 $\varepsilon(H) = \varepsilon(T_{m,v})$, 所以可推知(习题 1.2.9) $H \cong T_{m,v}$. 我们得到 $G \cong T_{m,v}$.

习　　题

7.3.1 在九个人的人群中,有一个人认识另外两个人,有两个人每人认识另外四个人, 有四个人每人认识另外五个人, 余下的两个人每人认识另外六个人. 证明: 有三个人,他们全都互相认识.

7.3.2 某桥牌俱乐部订了一个特殊的规则, 它规定四个成员仅当他们当中任何两个人先前都没有搭挡过才能在一起打牌. 在一次聚会上,十四个成员轮流玩牌, 其中每位都曾在以前和其他五个人搭挡过. 玩了三局, 按照俱乐部规则,不能继续玩下去了. 正当各人准备离开的时候, 一个和大家都未玩过牌的新成员来到了. 试证明此时至少还可以再玩一局.

7.3.3 (a) 若 G 是简单图,并且 $\varepsilon > \nu^2/4$, 则 G 包含三角形.

(b) 找出一个简单图 G, 使得 $\varepsilon = [\nu^2/4]$, 但不包含三角形.

(c)* 证明: 若 G 是简单图但不是偶图, 并且 $\varepsilon > ((\nu-1)^2/4) + 1$, 则 G 包含三角形.

(d) 找出一个不是偶图的简单图 G, 使得 $\varepsilon = [(\nu-1)^2/4] + 1$, 但不包含三角形. (P. Erdös)

7.3.4 (a)* 证明: 若 G 是简单图,并且 $\sum_{v \in V} \binom{d(v)}{2} > (m-1)\binom{\nu}{2}$, 则 G 包含 $K_{2,m}$ $(m \geqslant 2)$.

(b) 试证: 若 G 是简单图, 并且 $\varepsilon > \frac{(m-1)^{1/2}\nu^{3/2}}{2} + \frac{\nu}{4}$, 则 G 包含 $K_{2,m}$ $(m \geqslant 2)$.

(c) 给定一个平面上 n 个点的点集，证明：距离恰好为 1 的点对的数目最多是 $n^{3/2}/\sqrt{2} + n/4$.

7.3.5 证明：若 G 是简单图，并且 $\varepsilon > \frac{(m-1)^{1/m}v^{2-1/m}}{2} + \frac{(m-1)v}{2}$，则 G 包含 $K_{m,m}$.

应　　用

7.4 Schur 定理

考察整数集 $\{1, 2, \cdots, 13\}$ 的分类 $(\{1, 4, 10, 13\}, \{2, 3, 11, 12\}, \{5, 6, 7, 8, 9\})$. 由观察可知：在该分类中，没有一个子集，它的三个整数 x, y, z (不必相异)能满足方程

$$x + y = z \tag{7.19}$$

然而，不论把 $\{1, 2, \cdots, 14\}$ 分成怎样的三个子集，总存在一个子集，使得它包含(7.19)式的解. 一般说来，Schur (1916) 证明了：任意给出一个正整数 n，必存在一个整数 f_n，使得：在把 $\{1, 2, \cdots, f_n\}$ 分成 n 个子集的任一分类中，总有一个子集，它包含 (7.19) 式的解. 我们将说明如何从 Ramsey 数 r_n (在习题 7.2.3 中定义)的存在来推出 Schur 定理.

定理 7.10 设 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 是整数集 $\{1, 2, \cdots, r_n\}$ 的任一分类. 则对于某个 i，S_i 包含三个整数 x，y 和 z，满足方程 $x + y = z$.

证 考察以 $\{1, 2, \cdots, r_n\}$ 为顶点集的完全图. 用颜色 $1, 2, \cdots, n$ 按下述规则给这个图的边着色：边 uv 分配颜色 j 当且仅当 $|u - v| \in S_j$. 由 Ramsey 定理(7.7)，存在着一个单色三角形；就是说，存在着三个顶点 a, b 和 c，使得 ab, bc 和 ca 有相同的颜色，譬如说，是 i. 不失一般性，假定 $a > b > c$，并且记 $x = a - b$，$y = b - c$ 和 $z = a - c$，则 $x, y, z \in S_i$，并且 $x + y = z$.

设 s_n 表示最小的整数使得：在把 $\{1, 2, \cdots, s_n\}$ 分成 n 个

子集的任一分类中，总存在一个子集包含方程 (7.19) 的解. 易知 $s_1 = 2$，$s_2 = 5$，和 $s_3 = 14$ (习题 7.4.1). 再从定理 7.10 和习题 7.2.3，我们有上界

$$s_n \leqslant r_n \leqslant [n!e] + 1$$

习题 7.4.2 (b) 提供了 s_n 的一个下界.

习　　题

7.4.1　证明：$s_1 = 2$，$s_2 = 5$ 以及 $s_3 = 14$.

7.4.2　(a) 证明：$s_n \geqslant 3s_{n-1} - 1$.

(b) 利用 (a) 及 $s_3 = 14$ 证明：$s_n \geqslant \frac{1}{2}(27(3)^{n-3} + 1)$. (一个更好的下界由 Abbott 和 Moser 在 1966 年得到.)

7.5　一个几何问题

平面点集 S 的直径是指 S 中两点之间的最大距离. 应该注意，这是一个纯几何的概念，与图论中关于直径和距离的含义毫不相关.

我们将讨论直径为 1 的点集. n 个点的点集确定了 $\binom{n}{2}$ 个点对的距离. 直观上很清楚，若 n "变大"，则某些点对的距离必然"变小". 所以，对于 0 和 1 之间任意的 d，我们可以问：在直径为

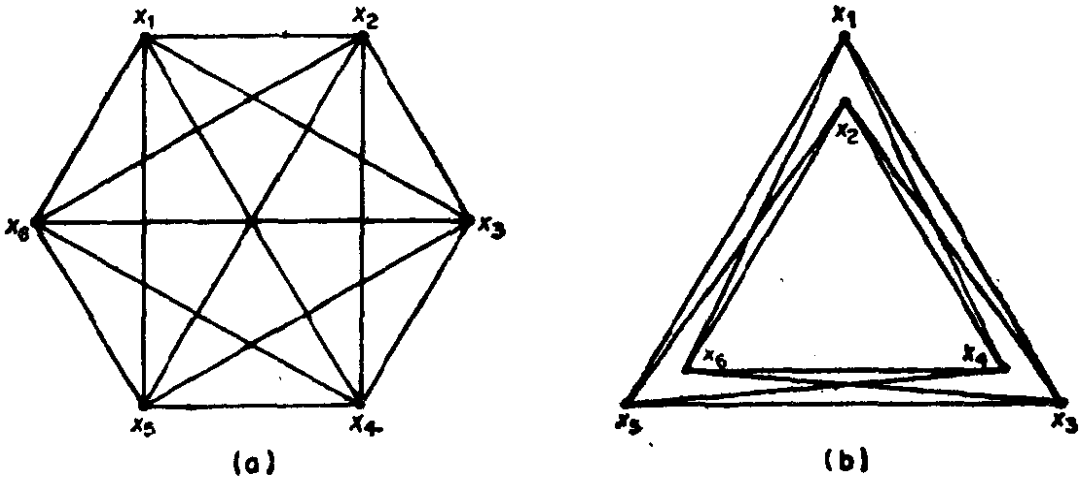


图 7.4

1 的点集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 中有多少点对，其距离大于 d。这里，我们将给出在 $d = 1/\sqrt{2}$ 这一特殊情形时该问题的解.

首先直观地看看 $n = 6$ 的情形. 这时，有六个点 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 和 x_6。若把它们放在一个正六边形的顶点上，使点对 (x_1, x_4), (x_2, x_5) 和 (x_3, x_6) 的距离为 1，正如图 7.4(a) 所表示的那样，则这六个点构成一个直径为 1 的点集.

容易算出点对 (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6) 和 (x_6, x_1) 的距离为 1/2，而点对 (x_1, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_1) 和 (x_6, x_2) 的距离为 $\sqrt{3}/2$. 由于 $\sqrt{3}/2 > \sqrt{2}/2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$，在这个直径为 1 的点集中存在九个点对，其距离大于 $1/\sqrt{2}$. 然而，九并非是在六个点上所能做到的最好答案. 若如图 7.4(b) 所示那样来放置六个点，则除 (x_1, x_2), (x_3, x_4) 和 (x_5, x_6) 之外，其余点对的距离均大于 $1/\sqrt{2}$. 因而我们有十二个点对，其距离大于 $1/\sqrt{2}$；事实上，这是所能做到的最好答案. 对一般情形，这个问题的解由下述定理给出.

定理 7.11 若 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是平面上直径为 1 的点集，则距离大于 $1/\sqrt{2}$ 的点对的最大可能的数目是 $[n^2/3]$. 并且对每个 n，存在直径为 1 的一个点集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，它恰好有 $[n^2/3]$ 个点对，其距离大于 $1/\sqrt{2}$.

证 设 G 是由

$$V(G) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

和

$$E(G) = \{x_i x_j \mid d(x_i, x_j) > 1/\sqrt{2}\}$$

所定义的图，此处 $d(x_i, x_j)$ 表示 x_i 和 x_j 之间的欧氏距离. 我们将证明 G 不能包含 K_4.

首先，注意平面上任意四个点必然确定一个不小于 90° 的角. 因为这些点的凸包，或是(a)一条直线，或是(b)一个三角形，或是(c)一个四边形（见图 7.5），显然在每种情形中都存在一个不小于 90° 的角 $x_i x_j x_k$.

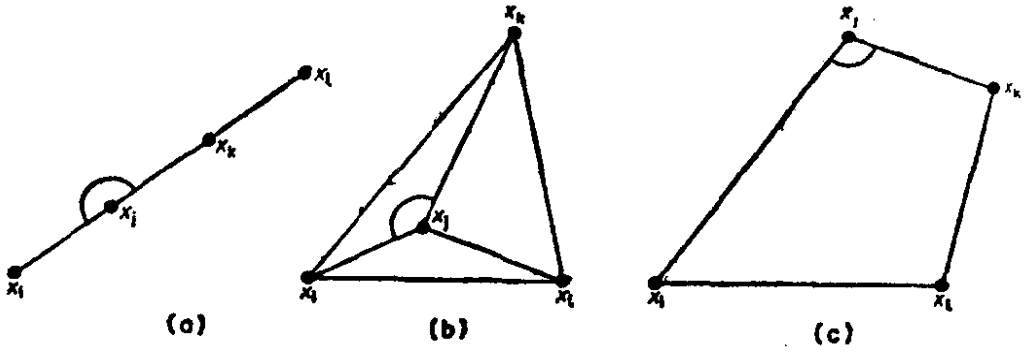


图 7.5

现在观察确定这个角的三个点 x_i, x_j, x_k。不是所有的距离 $d(x_i, x_j)$, $d(x_i, x_k)$ 和 $d(x_k, x_j)$ 都能够大于 $1/\sqrt{2}$ 且小于或等于 1 的. 因为,若 $d(x_i, x_j) > 1/\sqrt{2}$ 以及 $d(x_j, x_k) > 1/\sqrt{2}$, 则有 $d(x_i, x_k) > 1$. 由于假定点集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的直径为1, 故可推知, G的任意四个点, 至少有一对点不能用一条边连接起来,因此G不包含 K_4. 由 Turán 定理 (7.9)

$$\varepsilon(G) \leqslant \varepsilon(T_{3,n}) = [n^2/3]$$

我们可以构作一个直径为 1 的点集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 其中恰有$[n^2/3]$个点对,其距离大于 $1/\sqrt{2}$. 作法如下: 选择 r, 使 $0 < r < (1 - 1/\sqrt{2})/4$, 并且画出三个半径为 r 的圆, 它们的中心

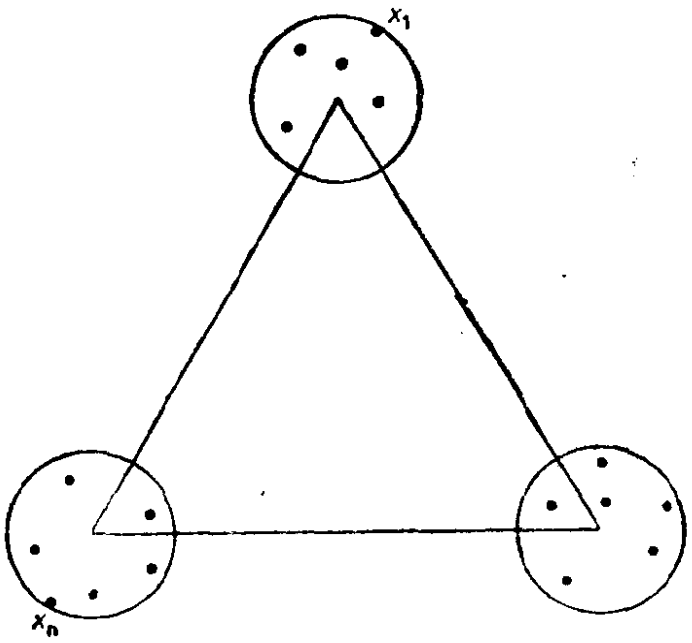


图 7.6

彼此相距 $1-2r$（图 7.6）. 置 $x_1, \cdots, x_{[n/3]}$ 于一圆，$x_{[n/3]+1}, \cdots, x_{[2n/3]}$ 于另一圆，$x_{[2n/3]+1}, \cdots, x_n$ 于第三圆，并且使得 $d(x_1, x_n)=1$. 该集显然有直径 1. 还有，$d(x_i, x_j)>1/\sqrt{2}$ 当且仅当 x_i 和 x_j 分属不同的圆. 所以恰好存在 $[n^2/3]$ 个点对 (x_i, x_j)，使得 $d(x_i, x_j)>1/\sqrt{2}$.

习　　题

7.5.1* 设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是平面上直径为 1 的点集.

(a) 证明：距离为 1 的点对的最大可能的数目是 n.

(b) 构作平面上直径为 1 的一个点集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，使它恰有 n 个距离为 1 的点对. (E. Pannwitz)

7.5.2 一个平坦的圆形城市，半径为六英里，由十八辆警车巡逻，警车之间用无线电通话联络. 如果无线电的使用范围是九英里，证明：在任何时刻，至少总有两辆警车，每辆至少可以和五辆其他的警车通话联系.

参 考 文 献

Abbott, H. L. (1972). Lower bounds for some Ramsey numbers. *Discrete Math.*, **2**. 289—93

Abbott, H. L. and Moser, L. (1966). Sum-free sets of integers. *Acta Arith.*, **11**, 392—96 ,

Erdös, P. (1947). Some remarks on the theory of graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, 292—94

Erdös, P. (1967). Extremal problems in graph theory, in *A Seminar on Graph Theory* (ed. F. Harary), Holt, Rinehart and Winston, New York, pp. 54—59

Erdös, P. (1970). On the graph-theorem of Turán (Hungarian). *Mat. Lapok*, **21**, 249—51

Erdös, P. and Spencer, J. (1974). *Probabilistic Methods in Combinatorics*, Akadémiai Kiadó, Budapest

Erdös, P. and Szekeres, G. (1935). A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, **2**, 463—70

Folkman, J. (1970). Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring. *SIAM J. Appl.Math.*, **18**, 19—24

Gallai, T. (1959). Über extreme Punkt-und Kantenmengen. *Ann. Univ. Sci.*

Budapest. Eötvös Sect. Math., **2**, 133—38

Greenwood, R. E. and Gleason, A. M. (1955). Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canad. J. Math.*, **7**, 1—7

Ramsey, F. P. (1930). On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc.* **30**, 264—86

Schur, I. (1916). Über die Kongruenz $x^m + y^m = z^m$ (mod p). *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, **25**, 114—17

Turán, P. (1941). An extremal problem in graph theory (Hungarian). *Mat. Fiz. Lapok*, **48**, 436—52

第八章　顶点着色

8.1　色数

在第六章中我们研究了图的边着色，现在把注意力转到和它类似的顶点着色的概念.

G的一个k顶点着色是指k种颜色1，2，……，k对于G的各顶点的一个分配；称着色是正常的，如果任意两个相邻顶点都分配到不同的颜色. 于是无环图G的一个正常k顶点着色是把V分成k个(可能有空的)独立集的一个分类$(V_1, V_2, \cdots, V_k)$. 当G有一个正常k顶点着色时，就称G是k顶点可着色的. 为方便起见，我们把"正常的顶点着色"简称为着色，而把"正常的k顶点着色"简称为k着色；类似地把"k顶点可着色"简称为k可着色. 显然，一个图是k可着色的当且仅当它的基础简单图是k可着色的. 因此在讨论着色问题时，可以只限于讨论简单图；一个简单图是1可着色的当且仅当它是空图. 一个简单图是2可着色的当且仅当它是偶图. G的色数$\chi(G)$是指使G为k可着色的数k的最小值；若$\chi(G)=k$，则称G是k色的. 一个3色图在图8.1中给出，它

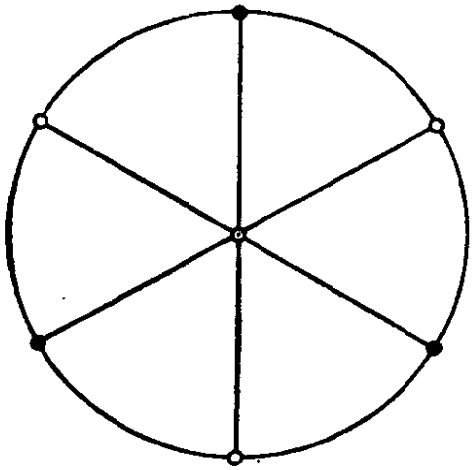


图 8.1　一个 3 色图

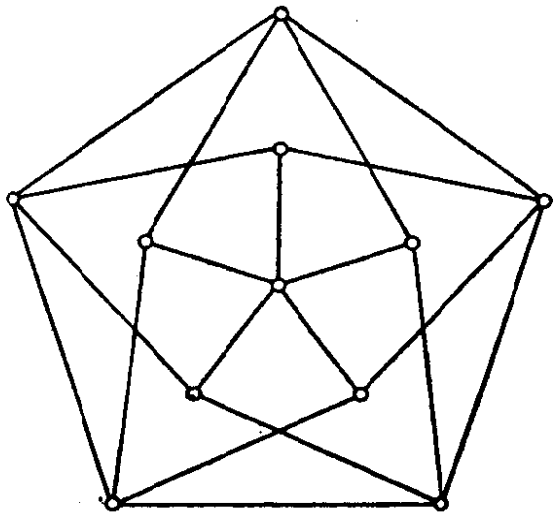


图 8.2　Grötzsch 图——一个 4 临界图

有一个如图所示的 3 着色，由于它不是偶图，因而它不是 2 可着色的.

讨论着色问题时，研究一类特殊的图——临界图的性质是有帮助的. 一个图 G 称为临界的，如果对 G 的每个真子图 H 有 $\chi(H) < \chi(G)$. 这种图是 Dirac (1952) 首先研究的. k 临界图是指 k 色的临界图；每个 k 色图都有 k 临界子图. Grötzsch (1958) 提出的一个 4 临界图在图 8.2 中给出.

从定义不难推知，每个临界图都是连通的. 下述定理建立了临界图的若干基本性质.

定理 8.1 若 G 是 k 临界图，则 $\delta \geqslant k-1$.

证 用反证法. 若有可能，设 G 是 $\delta < k-1$ 的 k 临界图，而 v 是 G 中度为 δ 的顶点. 由于 G 是 k 临界的，所以 $G-v$ 是 $(k-1)$ 可着色的. 设 $(V_1, V_2, \cdots, V_{k-1})$ 是 $G-v$ 的一个 $(k-1)$ 着色. 由定义，v 在 G 中与 δ 个顶点相邻 $(\delta < k-1)$，从而 v 必然在 G 中与某个 V_i 的所有顶点都不相邻. 因此，$(V_1, V_2, \cdots, V_i \cup \{v\}, \cdots, V_{k-1})$ 就是 G 的一个 $(k-1)$ 着色，导致矛盾. 于是 $\delta \geqslant k-1$.

推论 8.1.1 每个 k 色图至少有 k 个度不小于 $k-1$ 的顶点.

证 设 G 是 k 色图，H 是 G 的一个 k 临界子图. 由定理 8.1，H 的每个顶点在 H 中的度不小于 $k-1$，因而在 G 中的度也不小于 $k-1$. 由于 H 是 k 色的，显然它至少有 k 个顶点，推论得证.

推论 8.1.2 对任意图 G，有

$$\chi \leqslant \Delta + 1.$$

证 这是推论 8.1.1 的直接结果.

设 S 是连通图 G 的一个顶点割，并设 $G-S$ 的各个分支有顶点集 $V_1, V_2, \cdots, V_n$. 则子图 $G_i = G[V_i \cup S]$ 称为 G 的 S 分支 (见图 8.3). 现在分别对 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 着色. 若对于每个 $v \in S$，顶点 v 在每个 G_i 的着色中都分配同样的颜色，则称 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的这组着色在 S 上是一致的.

定理 8.2 临界图的顶点割不是团.

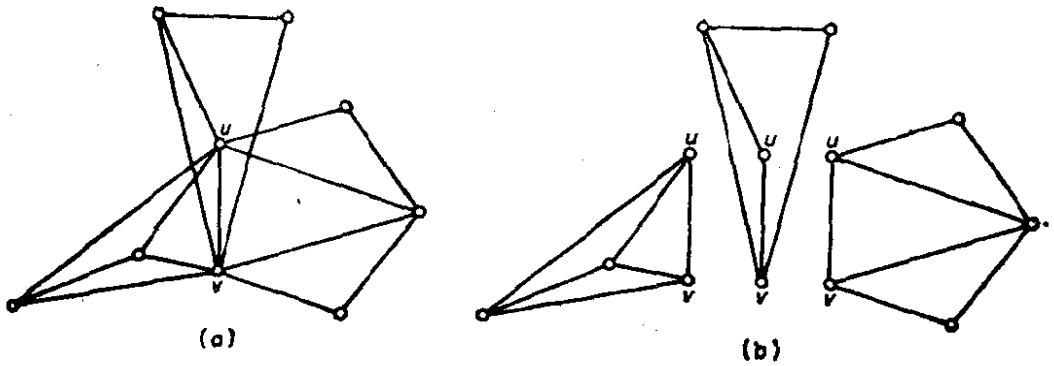


图 8.3 (a) G; (b) G的 $\{u, v\}$ 分支

证 用反证法. 设G是k临界图. 假设G有一个顶点割S是团. 记G的S分支为 $G_1, G_2, \cdots, G_n$. 由于G是k临界的, 所以每个 G_i 是 $(k-1)$ 可着色的. 并且因为S是团,所以S中的各个顶点在 G_i 的任何 $(k-1)$ 着色中必接受相异的颜色. 由此可知, 存在 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的一组 $(k-1)$ 着色,它们在S上一致. 这些着色合在一起形成G的一个 $(k-1)$ 着色,导致矛盾.

推论 8.2 每个临界图都是块.

证 若v是割点, 则$\{v\}$是一个顶点割, 它也是一个平凡的团. 因而从定理 8.2 推知, 临界图没有割点; 换言之, 每个临界图都是块.

定理 8.2 的另一推论是: 若k临界图G有 2 顶点割 $\{u, v\}$, 则u和v不能相邻. 对于G的 $\{u, v\}$ 分支 G_i, 若 G_i 的每个 $(k-1)$ 着色都分配给u和v以相同的颜色, 则称 G_i 为1型的, 若 G_i的每个$(k-1)$着色都分配给u和v以不同的颜色,则称 G_i 是2型的(见图 8.4).

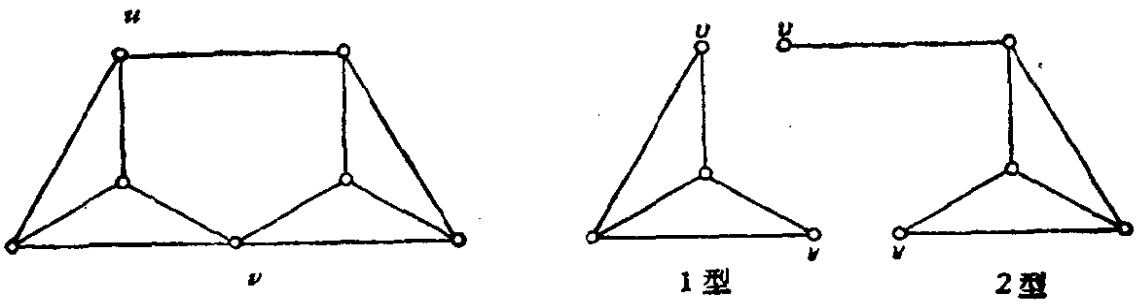


图 8.4

定理 8.3 （Dirac, 1953）设G是k临界图且有2顶点割$\{u, v\}$. 则

(i) $G = G_1 \cup G_2$, 这里G_i是i型$(i = 1, 2)$的$\{u, v\}$分支,并且

(ii) $G_1 + uv$ 和 $G_2 \cdot uv$ 都是k临界图(这里 $G_2 \cdot uv$ 表示把G_2的u和v重合而得到的图).

证 (i)由于G是临界图,所以G的每个$\{u, v\}$分支是$(k-1)$可着色的. 但是不可能存在这些$\{u, v\}$分支的$(k-1)$着色,使之在$\{u, v\}$上一致. 否则,这样的着色合起来将是G的一个$(k-1)$着色. 所以,存在两个$\{u, v\}$分支G_1和G_2,其中G_1的任何$(k-1)$着色都不与G_2的任何$(k-1)$着色一致. 显然其中一个分支,例如设G_1,必然是1型的,则另一个,即G_2必然是2型的. 由于G_1和G_2属于不同的类型,所以G的子图$G_1 \cup G_2$不是$(k-1)$可着色的. 又因为G是临界图,所以必然有 $G = G_1 \cup G_2$.

(ii) 置 $H_1 = G_1 + uv$. 由于G_1属于1型,所以H_1是k色的. 要证H_1是临界的只要证明: 对于H_1的每条边e, $H_1 - e$ 是$(k-1)$可着色的. 若 $e = uv$, 则由于 $H_1 - e = G_1$, 显然 $H_1 - e$ 是$(k-1)$可着色的. 设e是H_1的非uv的某条边. 由于G_2是$G - e$的子图,所以在$G - e$的任何$(k-1)$着色中,顶点u和v必然接受不同的颜色. 这样的一个着色限制在G_1的各个顶点上,就是 $H_1 - e$ 的一个$(k-1)$着色. 于是 $G_1 + uv$ 是k临界图. 类似可证 $G_2 \cdot uv$ 是k临界图.

推论 8.3 设G是具有2顶点割$\{u, v\}$的k临界图,则

$$d(u) + d(v) \geqslant 3k - 5 \tag{8.1}$$

证 设G_1是1型的$\{u, v\}$分支, G_2是2型的$\{u, v\}$分支. 置 $H_1 = G_1 + uv$ 和 $H_2 = G_2 \cdot uv$. 由定理8.3和定理8.1, 有

$$d_{H_1}(u) + d_{H_1}(v) \geqslant 2k - 2$$

以及

$$d_{H_2}(w) \geqslant k - 1$$

这里, w是将u和v重合起来得到的新顶点. 由此推得

$$d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v) \geqslant 2k - 4$$
$$d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geqslant k - 1$$

综合这两个不等式得到 (8.1) 式.

习　　题

8.1.1　证明：若 G 是简单图，则 $\chi \geqslant v^2/(v^2 - 2\varepsilon)$.

8.1.2　证明：若 G 的任意两个奇圈都有一个公共顶点，则 $\chi \leqslant 5$.

8.1.3　证明：若 G 有适合 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_v$ 的度序列 $(d_1, d_2, \cdots, d_v)$，则 $\chi \leqslant \max \min \{d_i + 1, i\}$.　　(D. J. A. Welsh 和 M. B. Powell)

8.1.4　利用习题 8.1.3，证明：

(a) $\chi \leqslant \{(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\}$;

(b) $\chi(G) + \chi(G^c) \leqslant v + 1$.　　(E. A. Nordhaus 和 J. W. Gaddum)

8.1.5　证明：$\chi(G) \leqslant 1 + \max \delta(H)$，这里最大值是对 G 的所有导出子图 H 而取的.　　(G. Szekeres 和 H. S. Wilf)

8.1.6*　设 k 色图 G 有一个着色，其中每种颜色都至少分配给两个顶点，证明：G 有一个这样的 k 着色.　　(T. Gallai)

8.1.7　证明：唯一的 1 临界图是 K_1，唯一的 2 临界图是 K_2，仅有的 3 临界图是 $k \geqslant 3$ 的奇 k 圈.

8.1.8　若 G 的任何两个 k 着色都导出 V 的相同分类，则称 G 是唯一 k 可着色的. 证明：k 临界图没有顶点割能导出唯一 $(k-1)$ 可着色子图.

8.1.9　(a) 证明：若 u 和 v 是临界图 G 的两个顶点，则 $N(u) \not\subseteq N(v)$.

(b) 试证：不存在恰有 $k+1$ 个顶点的 k 临界图.

8.1.10　证明：

(a) $\chi(G_1 \vee G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$;

(b) $G_1 \vee G_2$ 是临界图当且仅当 G_1 和 G_2 都是临界图.

8.1.11　设 G_1 和 G_2 是两个恰有一个公共顶点 v 的 k 临界图，并且 vv_1 和 vv_2 分别是 G_1 和 G_2 的边. 证明：$(G_1 - vv_1) \cup (G_2 - vv_2) + v_1v_2$ 是 k 临界图　　(G. Hajos)

8.1.12　对于 $n = 4$ 以及所有 $n \geqslant 6$，构作 n 个顶点的 4 临界图.

8.1.13　(a)* 设 (X, Y) 是 V 的一个分类，使得 $G[X]$ 和 $G[Y]$ 都是 n 可着色的. 证明：若边割 $[X, Y]$ 最多有 $(n-1)$ 条边，则 G 也是 n 可着色的.　　(P. C. Kainen)

(b) 试证：每个 k 临界图都是 $(k-1)$ 边连通的.

(G. A. Dirac)

8.2 Brooks 定理

推论 8.1.2 中给出的色数上界，有时比实际值大得多. 例如，偶图是 2 色的，但可以有任意大的最大度. 在这个意义上说，推论 8.1.2 比起 Vizing 定理(6.2)来，结果是相当弱的. 从另一意义上看，Vizing 的结果也是较强的，即：很多图 G 满足 $\chi' = \Delta + 1$ (见习题 6.2.2 和 6.2.3). 但是，正如 Brooks (1941) 的下述定理所指出的，适合 $\chi = \Delta + 1$ 的图却只有两种类型. 这里关于 Brooks 定理的证明是 Lovász (1973) 提出的.

定理 8.4 若 G 是连通的简单图，并且它既不是奇圈，又不是完全图，则 $\chi \leqslant \Delta$.

证 设 G 是满足定理假设的 k 色图. 不失一般性，可以假定 G 是 k 临界的. 根据推论 8.2，G 是一个块. 又由于 1 临界图和 2 临界图是完全图，而 3 临界图则是奇圈(习题 8.1.7)，所以 $k \geqslant 4$.

若 G 有 2 顶点割 $\{u, v\}$，则由推论 8.3，得出

$$2\Delta \geqslant d(u) + d(v) \geqslant 3k - 5 \geqslant 2k - 1$$

由于 2Δ 是偶数，这就推出 $\chi = k \leqslant \Delta$.

再假定 G 是 3 连通的. 由于 G 不是完全图，所以在 G 中存在三个顶点 u, v 和 w，使得 uv, $vw \in E$ 而 $uw \notin E$ (习题 1.6.14). 置 $u = v_1$ 及 $w = v_2$，并且设 $v_3, v_4, \cdots, v_\nu = v$ 是 $G - \{u, w\}$ 的顶点的任一排列，使得每个 v_i 都和某个适合 $j > i$ 的 v_j 相邻. (把 $G - \{u, w\}$ 的各顶点按其与 v 的距离的非增次序排列，就能做到这一点.)现在可以描述 G 的一个 Δ 着色：把颜色 1 分配给 $v_1 = u$ 和 $v_2 = w$；然后按颜色表 1, 2, ……, Δ 中最先可用的颜色依次给 $v_3, v_4, \cdots, v_\nu$ 着色. 根据序列 $v_1, v_2, \cdots, v_\nu$ 的构造，每个顶点 $v_i (1 \leqslant i \leqslant \nu - 1)$ 都和适合 $j > i$ 的某个顶点 v_j 相邻，因而和适合 $j < i$ 的最多 $\Delta - 1$ 个顶点相邻. 由此推知，当轮到 v_i 着色时，v_i 最多和 $\Delta - 1$ 种颜色的顶点相邻，于是颜色

1，2，……，Δ 中必有一种颜色可以分配给 v_i. 最后，由于 v_p 和颜色 1 的两个顶点（v_1 和 v_2）相邻，因而它最多再和另外的 Δ − 2 种颜色的顶点相邻，于是颜色 2，3，……，Δ 中必有一种颜色可以分配给 v_p.

习　　题

8.2.1　证明 Brooks 定理等价于下述命题：若 G 是 k 临界图（$k \geqslant 4$），且不是完全图，则 $2\varepsilon \geqslant \nu(k-1)+1$.

8.2.2　利用 Brooks 定理证明：若 G 是 $\Delta = 3$ 的无环图，则 $\chi' \leqslant 4$.

8.3 Hajós 猜想

图 G 的一个剖分图是指把 G 的边进行一系列剖分而得到的一个图. K_4 的一个剖分图在图 8.5 中给出. 虽然目前还不知道 $k \geqslant 3$ 时 k 色图的充分必要条件，但是 Hajós (1961) 提出了一个看来似乎是可信的必要条件：若 G 是 k 色图，则 G 包含 K_k 的一个剖分图. 这称为 Hajós 猜想. 应该注意，这个条件不是充分的；例如，4 圈是 K_3 的剖分图，但不是 3 色的.

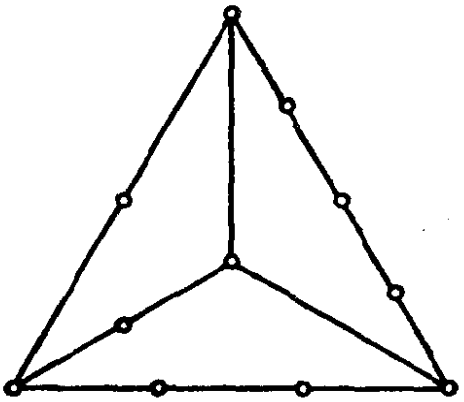


图 8.5　K_4 的一个剖分图

对于 $k = 1$ 和 $k = 2$，Hajós 猜想显然成立. 对于 $k = 3$，这个猜想也不难验证，因为 3 色图必然包含奇圈，而每个奇圈都是 K_3 的剖分图. Dirac (1952) 解决了 $k = 4$ 的情形.

定理 8.5　若 G 是 4 色图，则 G 包含 K_4 的一个剖分图.

证　设 G 是 4 色图. 注意，若 G 的某一子图包含 K_4 的一个剖

分图，则G就更是如此．所以不失一般性，可以假定G是临界图，因而G是$\delta \geqslant 3$的一个块．若$\nu = 4$，则G是K_4，定理显然成立．我们对ν用归纳法．假设定理对少于n个顶点的所有4色图都正确，且设$\nu(G) = n > 4$．

首先假设G有2顶点割$\{u, v\}$．根据定理8.3，G有两个$\{u, v\}$分支G_1和G_2，而且$G_1 + uv$是4临界图．由于$\nu(G_1 + uv) < \nu(G)$，由归纳法假设推得$G_1 + uv$包含K_4的一个剖分图．由此推知，若P是G_2的一条(u, v)路，则$G_1 \cup P$包含K_4的一个剖分图．由于$G_1 \cup P \subseteq G$，所以G更是如此．

现在假设G是3连通图．因为$\delta \geqslant 3$，所以G有一个长至少为4的圈C．设u和v是C上不相邻的两个顶点．由于$G - \{u, v\}$是连通的，所以在$G - \{u, v\}$中存在一条连接$C - \{u, v\}$的两个分支的路P；可以假定P的起点x和终点y是P在C上仅有的两个顶点．类似地，在$G - \{x, y\}$中存在一条路Q（见图8.6）．

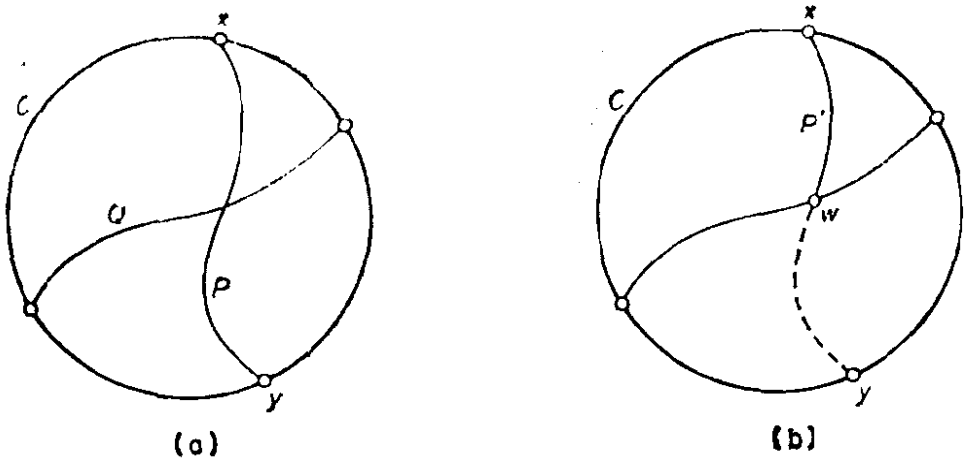


图 8.6

若P和Q没有公共顶点，则$C \cup P \cup Q$是K_4的一个剖分图(图8.6(a))．否则设w是P在Q上的第一个顶点，且设P'表示P的(x, w)节．这样，$C \cup P' \cup Q$是K_4的一个剖分图(图8.6(b))．因此，在所有这两种情形中，G都包含K_4的一个剖分图．

一般情形下的 Hajós 猜想尚未解决，它的解决是公认的一个

非常困难的问题. Hadwiger (1943) 提出一个有关的猜想: 若G是k色的,则G可"收缩"为一个包含K_k的图. Wagner (1964) 已经证明: $k=5$时的 Hadwiger 猜想等价于著名的四色猜想, 这将在第九章中加以讨论.

习　　题

8.3.1* 证明: 若G是简单图,并且最多有一个3度顶点,则G包含K_4的一个剖分图.

8.3.2 (a)* 证明: 若G是简单图,并且$\nu \geqslant 4$, $\varepsilon \geqslant 2\nu - 2$, 则$G$包含$K$的一个剖分图.

(b) 对于$\nu \geqslant 4$, 求一个$\varepsilon = 2\nu - 3$的简单图G, 使它不包含K_4的剖分图.

8.4 色多项式

在研究着色问题时,不仅考察着色的存在性,而且考察着色的数目,能得到某些见识; 这一方法被 Birkhoff (1912) 作为攻克四色猜想的一个可能的手段而提出.

我们用$\pi_k(G)$表示G的不同的k着色的数目;因此$\pi_k(G)>0$当且仅当G是k可着色的. 如果在两个着色中某一顶点被分配以不同的颜色,则认为这两个着色是不同的;换言之,若$(V_1, V_2, \cdots, V_k)$和$(V_1', V_2', \cdots, V_k')$是两个着色,则$(V_1, V_2, \cdots, V_k) = (V_1', V_2', \cdots, V_k')$当且仅当$V_i = V_i'$对$1 \leqslant i \leqslant k$均成立. 例如一个三角形有如图8.7所示的六种不同的3着色. 注意: 尽管在每个着色中每种颜色都恰好分配给一个顶点, 我们还是认为这六个着色是不同的.

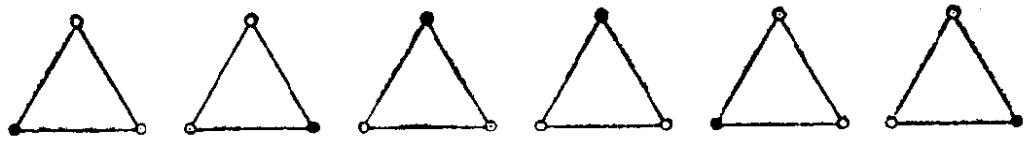


图　8.7

若G是空图, 则每个顶点可以独立地分配以k种可用颜色中

的任何一种. 所以 $\pi_k(G)=k^v$. 另一方面,若G是完全图，则第一个顶点可以有k种颜色的选择，第二个顶点可以有$k-1$种颜色的选择,第三个顶点可以有$k-2$种颜色的选择,如此等等. 于是,在这种情形中，$\pi_k(G)=k(k-1)\cdots(k-v+1)$. 一般说来,关于 $\pi_k(G)$ 存在一个简单的递推公式,它极其类似于定理 2.8 给出的关于 $\tau(G)$ (G 的生成树的棵数)的递推公式.

定理 8.6 若G是简单图,则对G的任何边 e，都有

$$\pi_k(G)=\pi_k(G-e)-\pi_k(G\cdot e)$$

证 设u和v是e的端点. 对于在u和v上分配以相同颜色的$G-e$的每个k着色,都对应着 $G\cdot e$ 的一个k着色,其中把u和v重合后所形成的 $G\cdot e$ 的相应顶点被分配以与u和v相同的颜色,这个对应显然是一一对应(见图 8.8). 所以，$\pi_k(G\cdot e)$ 恰好是$G-e$的给u和v分配以相同颜色的k着色的数目.

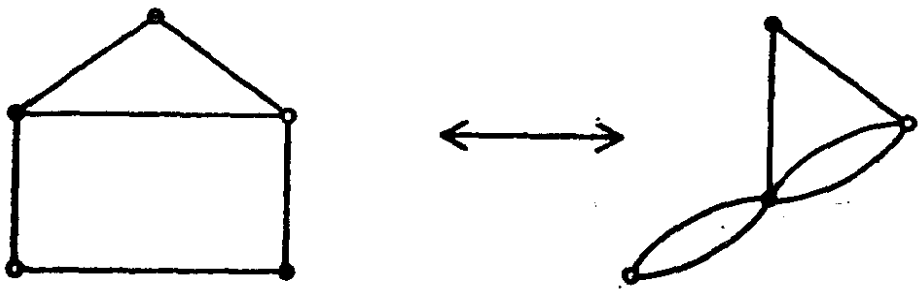


图 8.8

又由于$G-e$的给u和v分配以不同颜色的每个k着色都是G的k着色,所以,反过来，$\pi_k(G)$ 是$G-e$的给u和v分配以不同颜色的k着色的数目. 由此推知

$$\pi_k(G-e)=\pi_k(G)+\pi_k(G\cdot e).$$

推论 8.6 对于任何图 G，$\pi_k(G)$ 都是k的整系数v次多项式,首项为k^v，常数项为零. 并且 $\pi_k(G)$ 各项系数的符号正负交替.

证 对ε用归纳法. 不失一般性，可以假定G是简单图. 若$\varepsilon=0$，则正如已经指出的那样，$\pi_k(G)=k^v$，它当然满足推论的条件. 现在假设推论对边数少于m的所有图都成立，并且设G是

具有m条边的图，这里 $m \geqslant 1$. 设e是G的任一边. 则$G-e$和$G\cdot e$都各有 $m-1$ 条边. 由归纳法假设可知，存在非负整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{v-1}$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_{v-1}$，使得

$$\pi_k(G-e)=\sum_{i=1}^{v-1}(-1)^{v-i}a_ik^i+k^v$$

以及

$$\pi_k(G\cdot e)=\sum_{i=1}^{v-2}(-1)^{v-i-1}b_ik^i+k^{v-1}$$

根据定理 8.6，有

$$\begin{aligned}\pi_k(G)&=\pi_k(G-e)-\pi_k(G\cdot e)\\&=\sum_{i=1}^{v-2}(-1)^{v-i}(a_i+b_i)k^i-(a_{v-1}+1)k^{v-1}+k^v\end{aligned}$$

于是G也满足推论的条件. 由归纳法原理，结论成立.

根据推论 8.6，可以把函数 $\pi_k(G)$ 称为G的色多项式. 定理 8.6 提供了一个计算图的色多项式的递推方法. 下面两种方式都可使用：

(i) 反复应用递推公式 $\pi_k(G)=\pi_k(G-e)-\pi_k(G\cdot e)$，因而把 $\pi_k(G)$ 表示为空图的色多项式的线性组合，或者

(ii) 反复应用递推公式 $\pi_k(G-e)=\pi_k(G)+\pi_k(G\cdot e)$，因而把 $\pi_k(G)$ 表示为完全图的色多项式的线性组合.

方式 (i) 比较适合于边数少的图，而方式 (ii) 能更有效地应用于边数很多的图. 这两种方式图解于图 8.9 中（其中，图的色多项式用图本身作为代表符号表示着）.

有时可以利用G的色多项式和G的各种子图的色多项式相联系的一些公式来简化色多项式的计算（见习题 8.4.5(a)，8.4.6 和 8.4.7）. 然而，求一个图的色多项式，在目前还没有好算法.（这样的算法显然将提供一个确定色数的有效方法.）

尽管已经获得了色多项式的许多性质，但是尚未发现什么样的多项式是色多项式. Read (1968) 曾猜测：任何色多项式的系

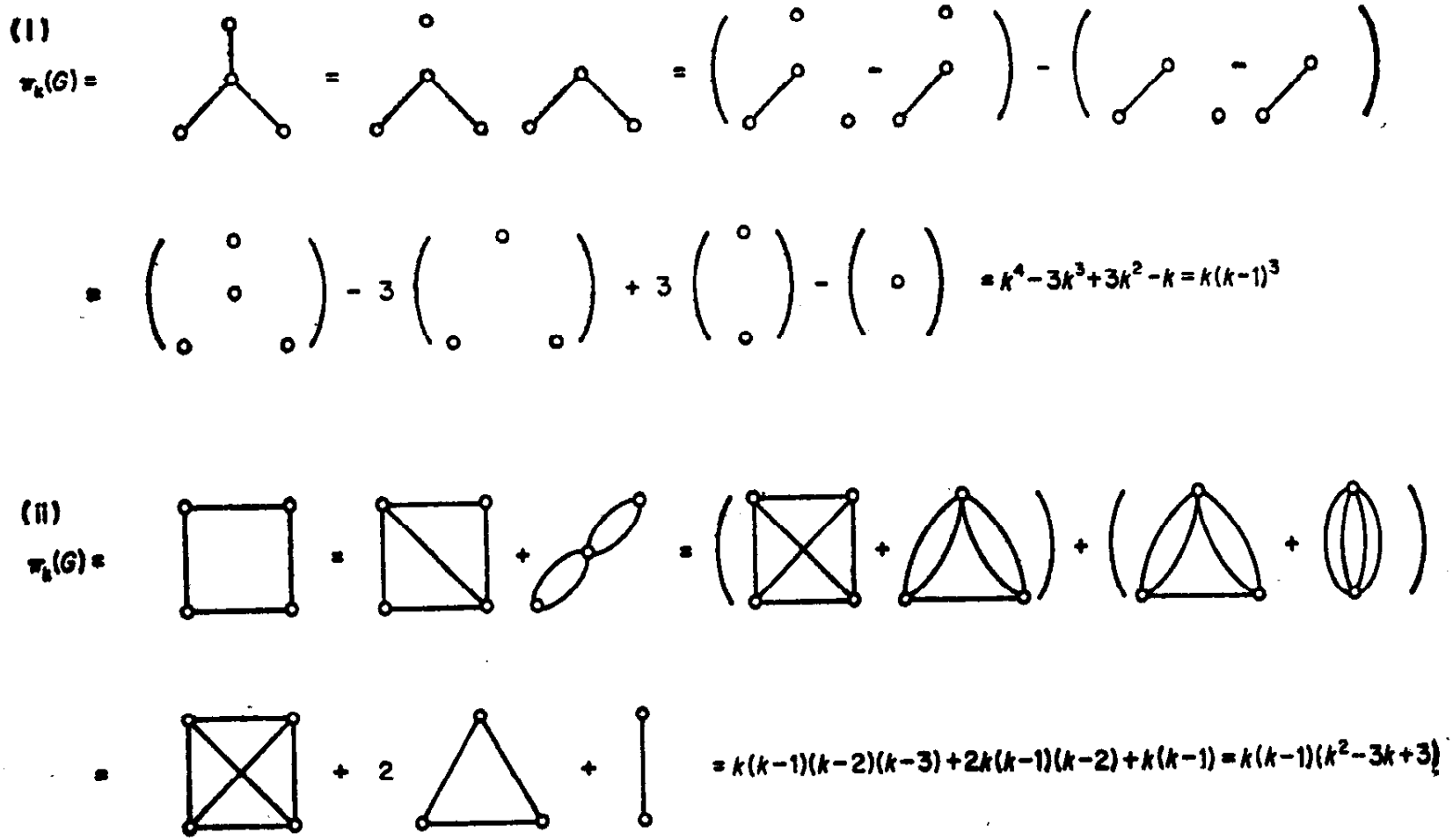


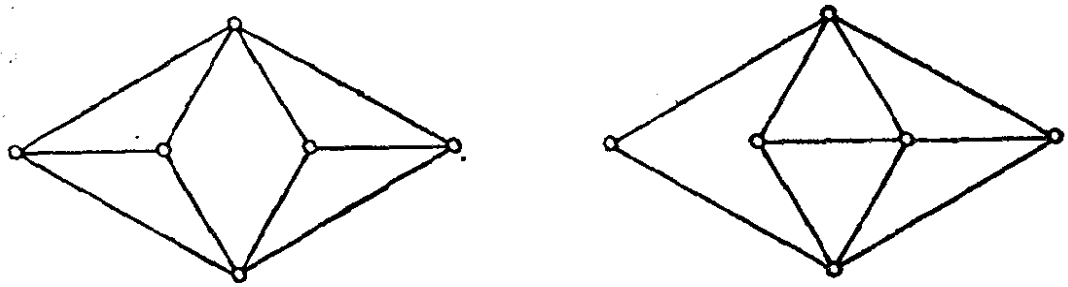
图 8.9 $\pi_k(G)$ 的递推计算

数序列都必然是按绝对值首先增加，然后再减小——换言之，没有一个系数的两旁是绝对值较大的两个系数．然而，即使这是正确的，这个条件加上推论 8.6 的条件也还是不够的．例如多项式 $k^4 - 3k^3 + 3k^2$ 满足所有这些条件，但是仍然不是任何图的色多项式(习题 8.4.2(b))。

在平面图的研究中应用色多项式已经取得了某些成果，在那里它们的根显示出一种意外的规律性（见 Tutte, 1970)．关于色多项式的进一步结果可以在 Read (1968) 的十分清楚的综合性文章中找到。

习　　题

8.4.1　计算下面两个图的色多项式：



8.4.2　(a) 借助于定理 8.6 证明：若 G 是简单图，则在 $\pi_k(G)$ 中 k^{p-1} 的系数是 $-\varepsilon$。

(b) 试证：不存在以 $k^4 - 3k^3 + 3k^2$ 为其色多项式的图。

8.4.3　(a) 证明：若 G 是树，则 $\pi_k(G) = k(k-1)^{p-1}$。

(b) 试证：若 G 是连通图，则 $\pi_k(G) \leqslant k(k-1)^{p-1}$，

并且证明：仅当 G 是树时等式才成立。

8.4.4　证明：若 G 是长为 n 的圈，则 $\pi_k(G) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$。

8.4.5　(a) 证明：$\pi_k(G \vee K_1) = k\pi_{k-1}(G)$。

(b) 利用 (a) 和习题 8.4.4 证明：若 G 是有 n 根辐的轮，则

$$\pi_k(G) = k(k-2)^n + (-1)^n k(k-2)。$$

8.4.6　证明：若 $G_1, G_2, \cdots, G_\omega$ 是 G 的各个分支，则

$$\pi_k(G) = \pi_k(G_1) \cdot \pi_k(G_2) \cdots \pi_k(G_\omega)。$$

8.4.7　证明：若 $G \cap H$ 是完全图，则

$$\pi_k(G \cup H) \cdot \pi_k(G \cap H) = \pi_k(G) \cdot \pi_k(H)。$$

8.4.8* 证明：$\pi_k(G)$ 没有大于 ν 的实数根 (L. Lovász)

8.5 围长和色数

在一个图的任一着色中，一个团的各顶点必须分配互不相同的颜色. 因此具有大团的图必然有大的色数. 存在着具有任意大的色数而不包含三角形的图，这也许令人惊讶. 这种图的递推作图法首先由 Blanches Descartes (1954) 给出. (事实上,她的方法能作出不含长小于 6 的圈的图.)这里我们介绍由 Mycielski (1955) 给出的一个更简易的作图法.

定理 8.7 对于任何正整数 k，存在不包含三角形的 k 色图.

证 对 k 用归纳法. 对于 $k=1$ 和 $k=2$，图 K_1 和 K_2 具有所要的性质. 假设已经作出具有色数 $k \geqslant 2$ 的不包含三角形的图 G_k. 设 G_k 的顶点是 $v_1, v_2, \cdots, v_n$. 从 G_k 出发如下构作一个新

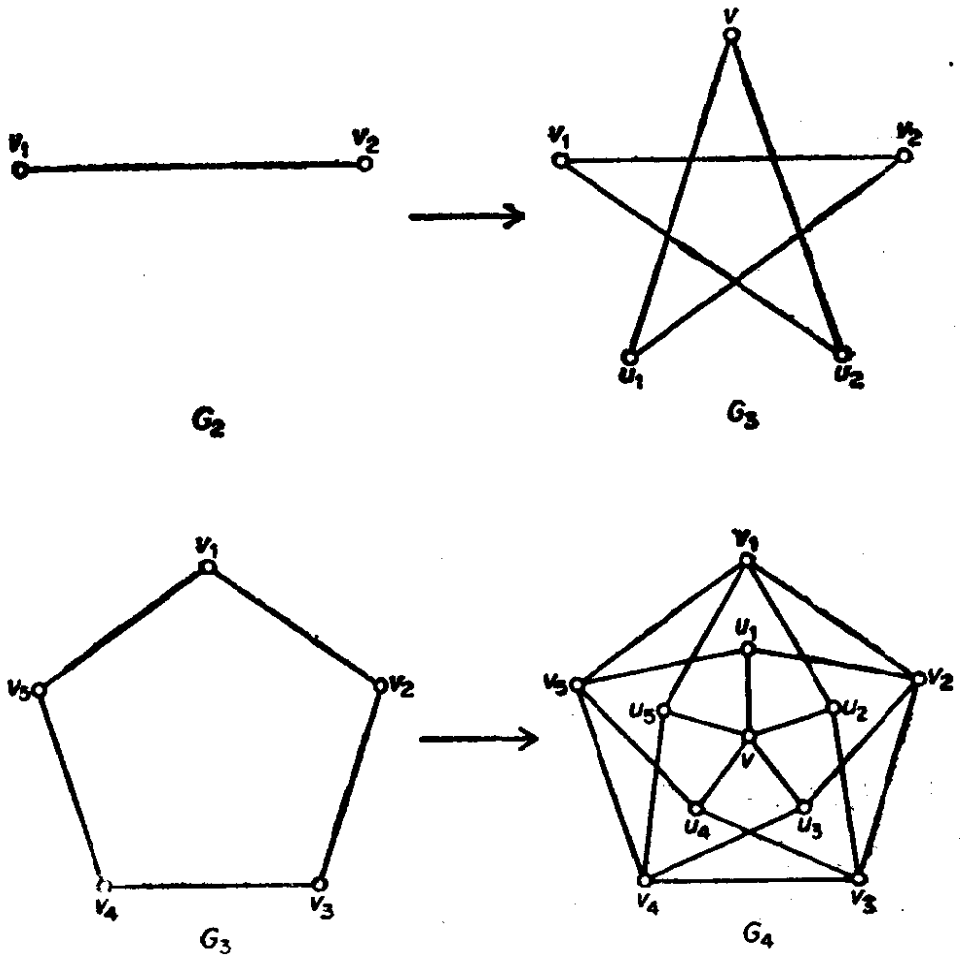


图 8.10 Mycielski 作图法

图 G_{k+1}：添加 $n+1$ 个新顶点 $u_1, u_2, \cdots, u_n, v$，然后对适合 $1 \leqslant i \leqslant n$ 的 i，把 u_i 同 v_i 的邻点以及 v 都连接起来. 例如，若 G_2 是 K_2，则 G_3 是 5 圈，并且 G_4 是 Grötzsch 图(见图 8.10).

图 G_{k+1} 显然不包含三角形. 这是因为 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 是 G_{k+1} 的一个独立集，没有一个三角形包含多于一个的顶点 u_i；并且，若 $u_i v_j v_k u_i$ 是 G_{k+1} 的三角形，则 $v_i v_j v_k v_i$ 将是 G_k 的三角形，这与假设矛盾.

现在证明 G_{k+1} 是 $(k+1)$ 色的. 首先注意，G_{k+1} 肯定是 $(k+1)$ 可着色的. 这是因为 G_k 的任一 k 着色都可扩充成为 G_{k+1} 的一个 $(k+1)$ 着色，方法是：对适合 $1 \leqslant i \leqslant n$ 的 i，把 u_i 染上与 v_i 相同的颜色，然后分配 v 一个新颜色. 这样，只要证明 G_{k+1} 不是 k 可着色的就行了. 假若 G_{k+1} 是 k 可着色的话，考察 G_{k+1} 的一个 k 着色，不失一般性，可设在这个 k 着色中，v 分配到颜色 k. 显然，没有一个 u_i 也分配到颜色 k. 现在用分配给 u_i 的颜色来给已着上颜色 k 的每个顶点 v_i 重新着色，这样就得到 k 色图 G_k 的一个 $(k-1)$ 着色. 所以 G_{k+1} 确实是 $(k+1)$ 色的. 根据归纳法原理即可推出定理.

从 2 色图 K_2 开始，对于所有的 $k \geqslant 2$，用上面的作图法可作出一个在 $3 \cdot 2^{k-2} - 1$ 个顶点上的不包含三角形的 k 色图.

我们已经提到，存在着具有围长 6 和任意色数的图. 事实上 Erdös (1961) 利用概率方法证明了：给定任意两个整数 $k \geqslant 2$ 和 $l \geqslant 2$，存在一个围长为 k 而色数为 l 的图. 不幸的是，概率方法的这个应用远不如 7.2 节中给出的应用那样简明，所以在此不作介绍. Erdös 结论的构造性证明已由 Lovász (1968) 给出.

习　　题

8.5.1　设 $G_3, G_4, \cdots$ 是从 $G_2 = K_2$ 开始，利用 Mycielski 作图法得到的图. 证明：每个 G_k 都是 k 临界图.

8.5.2　(a)* 设 G 是围长至少为 6 的 k 色图 $(k \geqslant 2)$. 用下述方式构成一个新图 H：取 G 的 $\binom{k\nu}{\nu}$ 个互不相交的拷贝以及有 $k\nu$ 个新顶点的集 S，并

且建立G的拷贝和S的ν元子集之间的一一对应. 对于G的每个拷贝，用一个对集把它的顶点和对应的S的ν元子集的元素连接起来. 证明：H的色数至少为$k+1$，而围长至少为6.

(b) 试证：对于任何$k \geqslant 2$，存在围长为6的k色围.

(B. Descartes)

应　　用

8.6 贮藏问题

一家公司制造n种化学制品$C_1, C_2, \cdots, C_n$，其中某些制品是互不相容的，如果它们互相接触，则会引起爆炸. 作为一种预防措施，该公司希望把它的仓库分成间隔，以便把不相容的化学制品贮藏在不同的间隔里. 试问：这个仓库至少应该分成几个间隔?

我们构作一个图G，其顶点集是$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，两个顶点$v_i$和$v_j$相连当且仅当化学制品$C_i$和$C_j$互不相容. 不难看出，仓库的最小间隔数等于$G$的色数.

许多实际问题的求解(贮藏问题就是一例)往往导致求一个图的色数. 遗憾的是，目前还没有好算法来确定色数. 这里介绍一个本质上是属于"枚举法"的系统程序，对于大的图它并不是很有效的.

由于一个图的色数是它的顶点集所能分成的独立集的最小数目，我们就从枚举一个图的所有独立集的方法开始. 因为每个独立集都是极大独立集[1]的子集，所以只要确定所有极大独立集就够了. 事实上，我们的程序首先确定的是极大独立集的补集，即极小覆盖.

注意V的子集K是G的极小覆盖当且仅当：对于每个顶点v，或者v属于K，或者v的所有邻点属于K(但两者不能同时成立).

---

1) 这里的"极大独立集"与第七章中定义的"最大独立集"概念有所不同：设K是G的一个独立集，并且对于$V \backslash K$中的任一顶点v，$K+v$都不是G的独立集，则称K是G的一个极大独立集. "极小覆盖"也可以类似地定义.

这就提供了一个求极小覆盖的程序：

对于每个顶点 v，选择 v 或者选择 v 的所有邻点．(8.2)

为了有效地执行这个程序，我们利用代数方法．首先把“选择顶点 v”这个指令简记为符号 v，随后对给定的指令 X 和 Y，指令“X 或 Y”和“X 与 Y”分别记为 $X+Y$（逻辑和）和 $X\cdot Y$（逻辑积）．例如，指令“选择 u 与 v，或者选择 v 与 w”记为 $uv+vw$．从形式上看，逻辑和与逻辑积类似于集的∪和∩，而且关于∪和∩成立的那些代数法则对于这两个运算也是成立的（习题8.6.1）．根据这些法则，常常可以简化逻辑表达式；于是

$$\begin{aligned}(uv+vw)(u+vx) &= uvu+uvvx+vwu+vwvx\\ &= uv+uvx+vwu+vwx\\ &= uv+vwx\end{aligned}$$

现在考察图 8.11 中的图 G．我们的指令 (8.2) 用于求 G 的极小覆盖时就是

$$\begin{aligned}&(a+bd)(b+aceg)(c+bdef)(d+aceg)\\ &\quad\times(e+bcdf)(f+ceg)(g+bdf)\end{aligned}\tag{8.3}$$

可以验证，(8.3) 式可以简化为

$$aceg+bcdeg+bdef+bcdf$$

换言之，“选择 a，c，e 与 g，或者 b，c，d，e 与 g，或者 b，d，

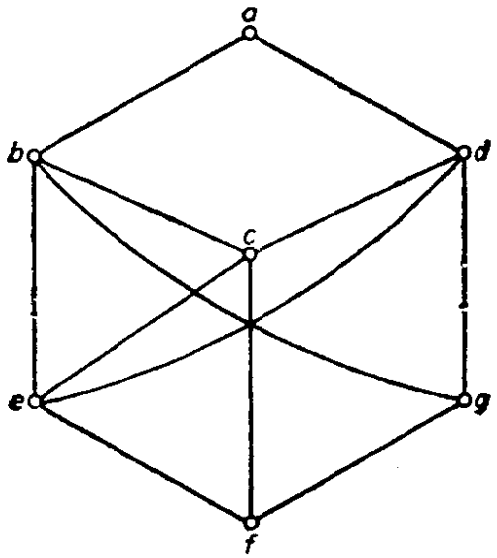


图 8.11

e 与 f，或者 b，c，d 与 f”。因此 $\{a, c, e, g\}$，$\{b, c, d, e, g\}$，$\{b, d, e, f\}$ 和 $\{b, c, d, f\}$ 是 G 的极小覆盖。取其补集，得到 G 的所有极大独立集：$\{b, d, f\}$，$\{a, f\}$，$\{a, c, g\}$ 和 $\{a, e, g\}$。

现在回到确定图的色数问题。若对于 G 的 k 着色 $(V_1, V_2, \cdots, V_k)$，V_1 是 G 的极大独立集，V_2 是 $G - V_1$ 的极大独立集，V_3 是 $G - (V_1 \cup V_2)$ 的极大独立集，依此类推，则称这个着色是典型的。容易看到（习题 8.6.3），若 G 是 k 可着色的，则存在 G 的典型 k 着色。反复利用上面介绍的求极大独立集的方法，就可以确定 G 的所有典型着色。用于这些着色中的颜色的最小数目就是 G 的色数。对于图 8.11 中的图 G，$x = 3$；对应的一个典型着色是 $(\{b, d, f\}, \{a, e, g\}, \{c\})$。

Christofides (1971) 给出关于这个程序的某些改进。

习　　题

8.6.1　验证逻辑和与逻辑积的结合律，交换律，分配律和吸收律。

8.6.2　把 (8.3) 式化简为 $aceg + bcdeg + bdef + bcdf$。

8.6.3　证明：若 G 是 k 顶点可着色的，则 G 有典型 k 顶点着色。

参 考 文 献

Birkhoff, G. D. (1912). A determinant formula for the number of ways of coloring a map. *Ann. of Math.*, **14**, 42—46

Brooks, R. L. (1941). On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **37**, 194—97

Christofides, N. (1971). An algorithm for the chromatic number of a graph. *The Computer Journal*. **14**, 38—39

Descartes, B. (1954). Solution to advanced problem no. 4526. *Amer. Math. Monthly* **61**, 352

Dirac, G. A. (1952). A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *J. London Math. Soc.* **27**, 85—92

Dirac, G. A. (1953). The structure of *k*-chromatic graphs. *Fund. Math.*, **40**, 42—55

Erdös, P. (1961). Graph theory and probability II. *Canad. J. Math.*, **13**,

346—52

Grötzsch, H. (1958). Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Nat. Reihe,* **8**, 109—19

Hadwiger. H. (1943). Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. *Vierteljschr. Naturforsch. Gesellsch. Zürich,* **88**, 133—42

Haiós, G. (1961). Über eine Konstruktion nicht n-färbbarer Graphen. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Nat. Reihe.,* **10**, 116—17

Lovász, L. (1968). On chromatic number of finite set systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **19**, 59—67

Lovász, L. (1975). Three short proofs in graph theory, *J. Combinatorial Theory B,* **19**, 111—13

Mycielski, J. (1955). Sur le coloriage des graphs. *Colloq. Math.,* **3**, 161—62

Read, R. C. (1968). An introduction to chromatic polynomials. *J. Combinatorial Theory,* **4**, 52—71

Tutte, W. T. (1970). On chromatic polynomials and the golden ratio.*J. Combinatorial Theory,* **9**, 289—96

Wagner, K. (1964). Beweis einer Abschwachung der Hadwiger-Vermutung. *Math. Ann.,* **153**, 139—41

第九章 平 面 图

9.1 平图和平面图

如果一个图能画在平面上使得它的边仅在端点相交，则称这个图为可嵌入平面的，或称为平面图．平面图G的这样一种画法称为G的一个平面嵌入．G的一个平面嵌入$\tilde{G}$本身可看作是同构于G的图；$\tilde{G}$的顶点集就是表示G的顶点的那些点的集，$\tilde{G}$的边集就是表示G的边的那些线的集，并且$\tilde{G}$的顶点与$\tilde{G}$中包含该顶点的所有边关联．所以有时把平面图的平面嵌入就称为平图．图9.1(b)表示图9.1(a)中的平面图的一个平面嵌入．

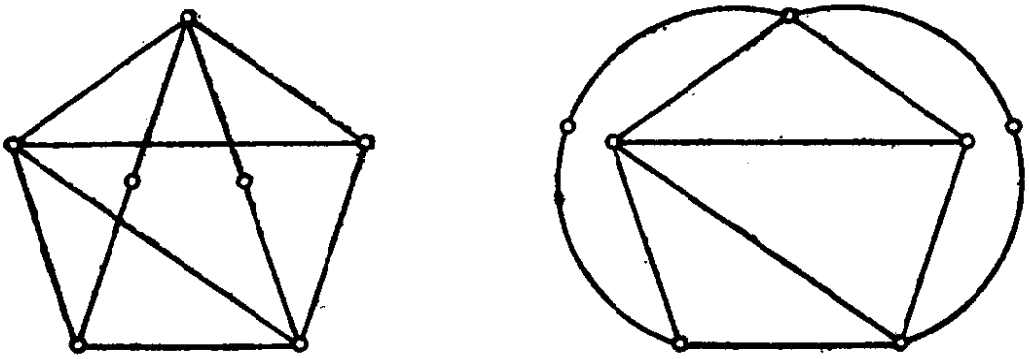


图9.1 (a) 平面图G； (b) G的一个平面嵌入

从上述定义可以清楚地看到，平面图的研究必须涉及平面拓扑学．然而，这里我们并不打算严格地采用拓扑方式论述，而仅满足于采用朴素的拓扑观点．这样，就不致模糊了我们主要关心的平面图理论的组合面貌．

与平面图的研究特别有关的拓扑学成果是 Jordan 曲线的一些内容(一条 Jordan 曲线是指一条连续的、自身不相交的、起点和终点相重合的曲线)． 平图的圈中各条边的并集构成一条 Jordan 曲线；这正是 Jordan 曲线的性质能在平面图理论中起作用的原

因．我们重温一个关于 Jordan 曲线的著名定理，并用它来揭示 K_5 的非平面性．

设 J 是平面上的一条 Jordan 曲线，平面的剩下部分被分成两个不相交的开集，称为 J 的内部和外部，分别记为 $\mathrm{int}J$ 和 $\mathrm{ext}J$，并且用 $\mathrm{Int}\,J$ 和 $\mathrm{Ext}\,J$ 表示它们的闭包．显然 $\mathrm{Int}\,J\cap\mathrm{Ext}\,J=J$．Jordan 曲线定理指出：连接 $\mathrm{int}\,J$ 的点和 $\mathrm{ext}\,J$ 的点的任何连线必在某点和 J 相交(见图 9.2)．这个定理尽管在直观上是明显的，但它的严格证明却十分困难．

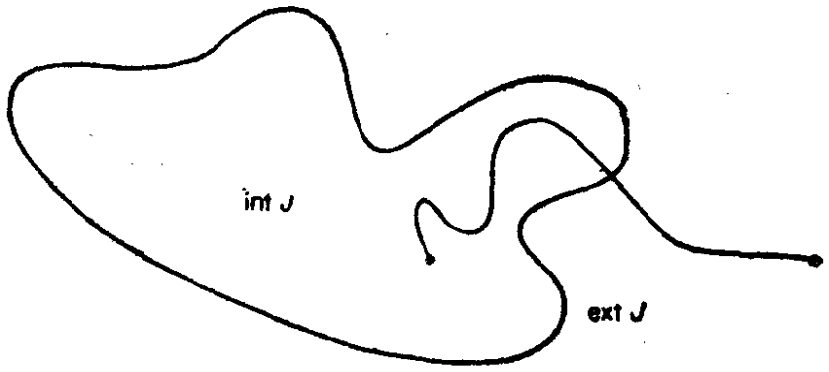


图 9.2

定理 9.1 K_5 是非平面图．

证 用反证法．若有可能，设 G 是对应于 K_5 的一个平图，用 v_1, v_2, v_3, v_4 和 v_5 表示 G 的顶点．由于 G 是完全图，它的任何两个顶点都有一条边相连．因此圈 $C=v_1v_2v_3v_1$ 是一条平面 Jordan 曲线，而点 v_4 必然在 $\mathrm{int}\,C$ 内或者在 $\mathrm{ext}\,C$ 内．假设 $v_4\in\mathrm{int}\,C$．

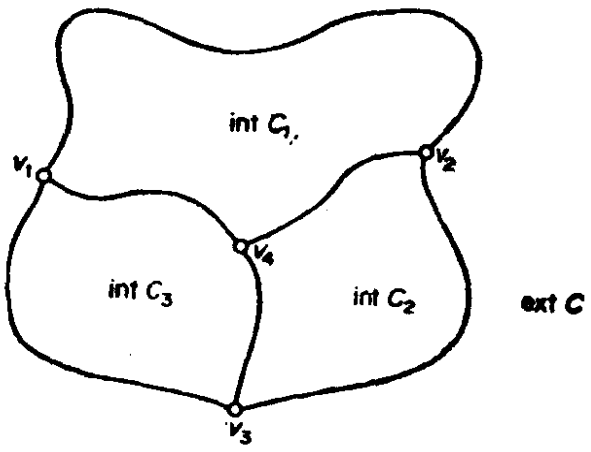


图 9.3

($v_4 \in \text{ext}\, C$ 的情形可用类似的方法处理.)这样，边 v_4v_1，v_4v_2 和 v_4v_3 把 $\text{int}\, C$ 分成三个区域 $\text{int}\, C_1$，$\text{int}\, C_2$ 和 $\text{int}\, C_3$，这里 $C_1 = v_1v_4v_2v_1$，$C_2 = v_2v_4v_3v_2$ 和 $C_3 = v_3v_4v_1v_3$（见图 9.3).

现在 v_5 必然在四个区域 $\text{ext}\, C$，$\text{int}\, C_1$，$\text{int}\, C_2$ 和 $\text{int}\, C_3$ 之一中. 若 $v_5 \in \text{ext}\, C$，由于 $v_4 \in \text{int}\, C$，从 Jordan 曲线定理推知边 v_4v_5 必然在某一点和 C 相交. 这和 G 是平图的假设矛盾. $v_5 \in \text{int}\, C_i$ ($i = 1, 2, 3$) 的情形，可用类似的方法加以排除.

类似的论证，可以推得 $K_{3,3}$ 也是非平面图(习题 9.1.1). 另一方面，我们将在 9.5 节中看到，每个非平面图都包含 K_5 或者 $K_{3,3}$ 的一个剖分图.

平面嵌入的概念可以推广到其它曲面上去[1]. 若图 G 能画在曲面 S 上使它的边仅在端点相交，则图 G 称为是可嵌入曲面 S 的；图 G 的这样一种画法（如果存在的话）称为 G 的一个 S 嵌入. 图 9.4(a) 表示 K_5 的一个环面嵌入，而图 9.4(b) 表示 $K_{3,3}$ 的一个

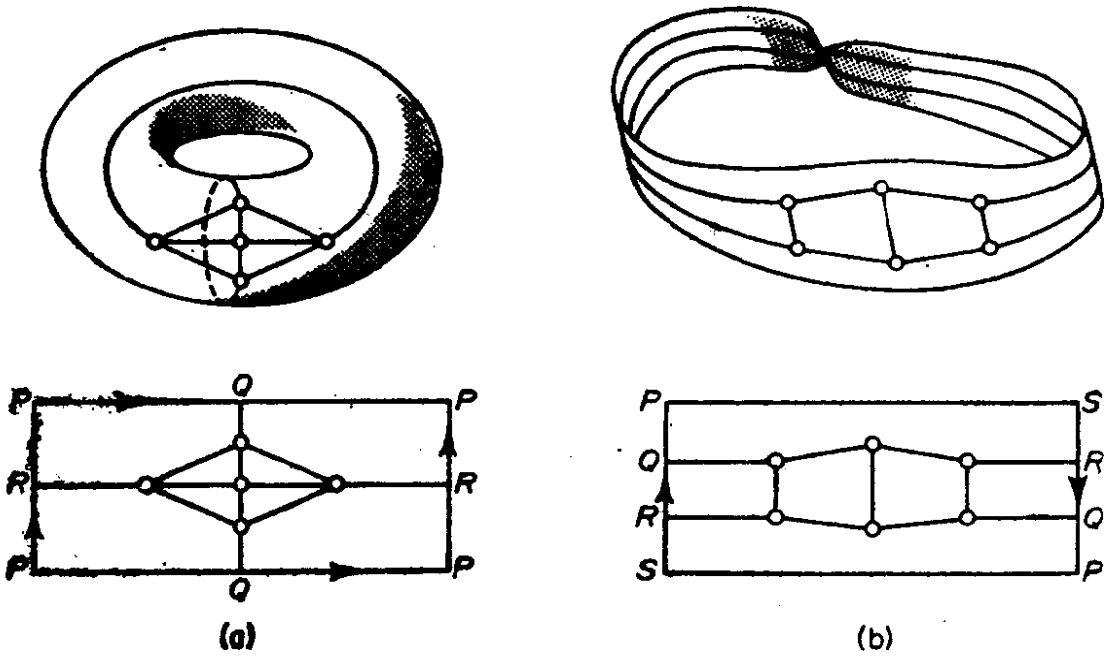


图 9.4 (a) K_5 的一个环面嵌入 (b) $K_{3,3}$ 的一个 Möbius 带嵌入

1) 曲面是 2 维流形. 闭曲面分为可定向的和不可定向的两类. 球面和环面是可定向曲面的例子，射影平面和 Möbius 带是不可定向的. 图在曲面上嵌入的详细讨论可参见 Frechet 和 Fan (1967) 的著作.

Möbius 带嵌入;环面表示为两组对边重合的矩形,而 Möbius 带则表示为两个端点在半扭之后重合的矩形.

我们已经看到,并非所有图都可嵌入平面;对曲面也是一样.可以证明(例如见 Frechet 和 Fan 1967),对于每个曲面 S,总存在不可嵌入 S 的图. 然而,每个图都可"嵌入"三维空间 $\mathscr{R}^3$(习题 9.1.3).

平面图和可嵌入球面的图是一样的. 为了证明这件事实,我们作一个称为球极平面射影的映射. 考察放在平面 P 上的一个球面 S,并用 z 表示 S 上与 S 和 P 的切点正相对的顶点. 给出映射 π: $S\backslash\{z\}\to P$,定义为 $\pi(s)=p$ 当且仅当点 z, s, p 共线,称 π 为从 z 出发的球极平面射影;在图 9.5 中作了直观说明.

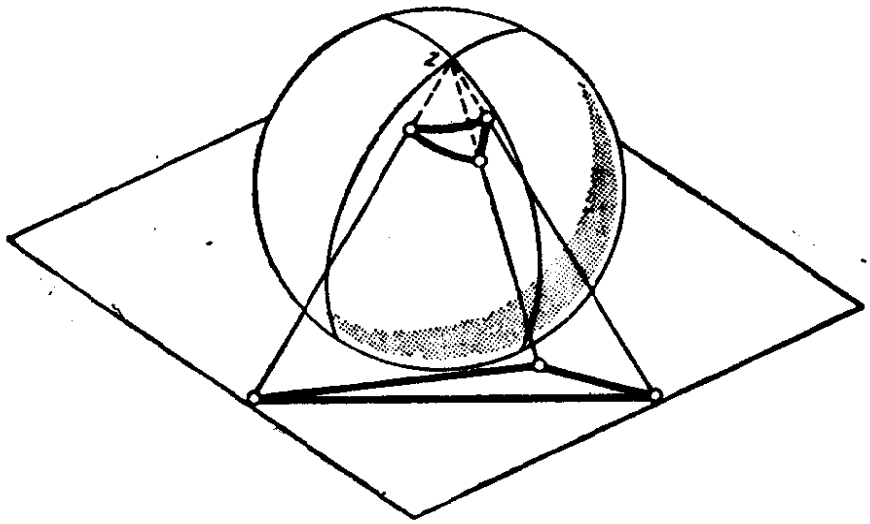


图 9.5 球极平面射影

定理 9.2 图 G 可嵌入平面当且仅当它可嵌入球面.

证 假设 G 有一个球面嵌入 $\tilde{G}$. 在球面上选择一个不在 $\tilde{G}$ 中的点 z. 则在从 z 出发的球极平面射影下,$\tilde{G}$ 的象就是 G 一个平面嵌入. 其逆可类似证明.

在很多场合下,考察平面图的球面嵌入是有益的,下一节中定理 9.3 的证明就是一例.

习 题

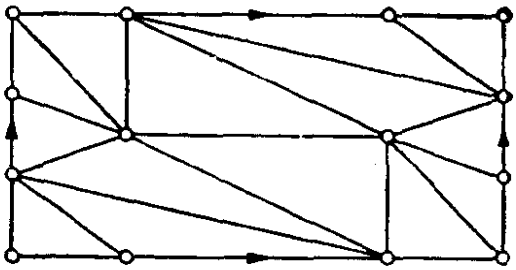
9.1.1 证明: $K_{3,3}$ 是非平面图.

9.1.2 (a) 证明：对于 K_5 的任意边 e，$K_5 - e$ 是平面图.

(b) 证明：对于 $K_{3,3}$ 的任意边 e，$K_{3,3} - e$ 是平面图.

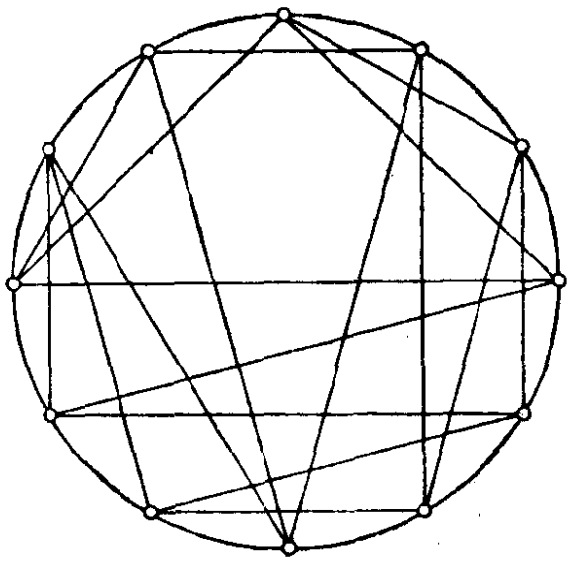
9.1.3 证明：所有图都是可"嵌入" $\mathscr{R}^3$ 的.

9.1.4 验证下面的图是 K_7 的一个环面嵌入：



9.1.5 找出下面的图的一个平面嵌入，使其所有边都是直线.

(Fáry 在 1948 年已证明：每个简单平面图都存在这样的一个平面嵌入).



9.2 对偶图

一个平图 G 把平面划分成若干个连通区域；这些区域的闭包称为 G 的面. 图 9.6 给出了具有六个面 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 和 f_6 的一个平图. 面的概念，同样也适用于图的曲面嵌入. 我们分别用 $F(G)$ 和 $\phi(G)$ 表示平图 G 中面的集和面的个数.

每个平图恰有一个无界的面，称为外部面；在图 9.6 的平图中，f_1 是外部面.

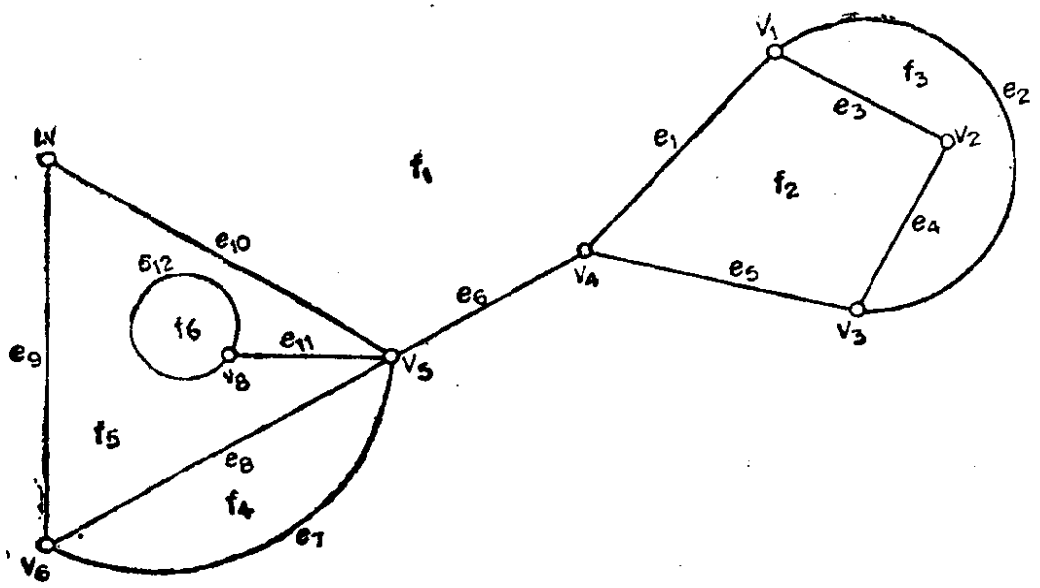


图 9.6 具有六个面的平图

定理 9.3 设 v 是平面图 G 的顶点，则存在 G 的一个平面嵌入，使得 v 在这个嵌入的外部面上.

证 考察 G 的一个球面嵌入 $\tilde{G}$；由定理 9.2 知这样的嵌入是存在的. 设 z 是包含 v 的某个面内部的点，并设 $\pi(\tilde{G})$ 是 $\tilde{G}$ 在从 z 出发的球极平面射影下的象. 显然 $\pi(\tilde{G})$ 就是所要的 G 的平面嵌入.

用 $b(f)$ 表示平图 G 中面 f 的周界. 若 G 是连通的，则 $b(f)$ 可以认为是一条闭途径，G 在 $b(f)$ 中的每条割边都被这条途径通过两次；当 $b(f)$ 不包含割边时，这条途径是 G 的一个圈. 例如在图 9.6 的平图中，

$$b(f_2) = v_1e_3v_2e_4v_3e_5v_4e_1v_1$$

而

$$b(f_5) = v_7e_{10}v_5e_{11}v_8e_{11}v_5e_8v_6e_9v_7$$

称面 f 与它的周界上的顶点和边是关联的. 若 e 是平图的割边，则只有一个面和 e 关联；否则有两个面和 e 关联. 称一条边分隔和它关联的面. 面 f 的度 $d_G(f)$ 是指和它关联的边的条数（即 $b(f)$ 中边的条数），其中割边被计算两次. 在图 9.6 中，f_1 和顶点 $v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ 以及边 $e_1, e_2, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}$ 关联，e_1 分隔 f_1 和 f_2，而 e_{11} 分隔 f_5 自身；$d(f_2) = 4$ 而 $d(f_5) = 6$.

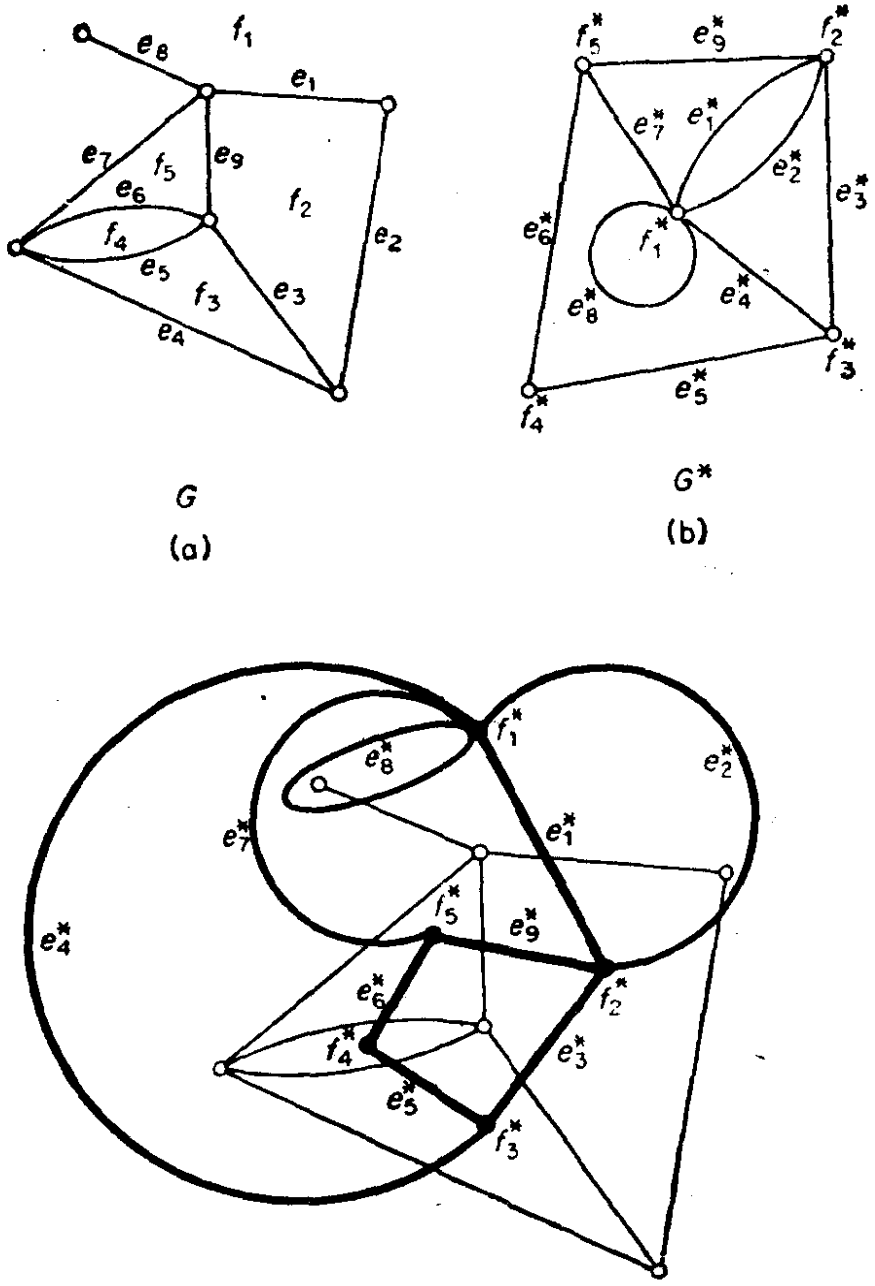


图 9.7　一个平图和它的对偶图

给出平图 G，可以定义另一个图 G^* 如下：对于 G 的每个面 f，都有 G^* 的顶点 f^* 与之对应，对于 G 的每条边 e，都有 G^* 的边 e^* 与之对应；G^* 中顶点 f^* 和 g^* 由边 e^* 连接，当且仅当 G 中与顶点 f^* 和 g^* 对应的面 f 和 g 被边 e 分隔．图 G^* 称为 G 的对偶图．图 9.7(a) 和 9.7(b) 给出了一个平图和它的对偶图．

容易看出，平图G的对偶图G^*是平面图. 事实上存在着把G^*嵌入平面的自然方式. 即在G的每个面f中放置顶点f^*，然后画出边e^*，使它穿过G的边e恰好一次（且不穿过G的其它边）. 这一过程在图 9.7(c) 中表示，其中对偶图用粗的点和线表示. 直观上很清楚，用这种方式总可以作出平图的对偶图，但是我们不作证明了. 注意，若e是G的环，则e^*是G^*的割边，反之亦然.

尽管定义是抽象的，但把平图G的对偶图G^*看作是一个平图（如上面叙述的那样嵌入法），有时是方便的. 例如考察G^*的对偶图G^{**}，根据这一观点不难证明，当G连通时，$G^{**} \cong G$（习题 9.2.4）；看一下图 9.7(c) 就一目了然了.

值得注意的是，同构的平图可以有不同的对偶图. 例如图 9.8 中两个平图是同构的，但它们的对偶图却不同构——图 9.8(a) 的平图有一个度为 5 的面，而图9.8(b)的平图没有这样的面. 因此，对偶图的概念仅对平图是有意义的，一般不能扩展到平面图中去.

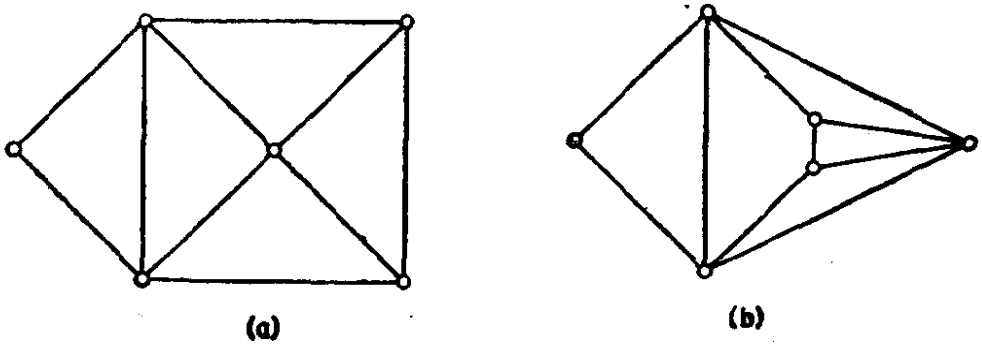


图 9.8　对偶图不同构的两个同构平图

下列关系式可直接从G^*的定义得到：

$$\nu(G^*) = \phi(G)$$

$$\varepsilon(G^*) = \varepsilon(G)$$

$$d_{G^*}(f^*) = d_G(f) \quad \text{对所有 } f \in F(G) \text{ 成立} \tag{9.1}$$

定理 9.4　若G是平图，则

$$\sum_{f \in F} d(f) = 2\varepsilon$$

证　设G^*是G的对偶图，则

$$\sum_{f\in F(G)} d(f) = \sum_{f^*\in V(G^*)} d(f^*) \quad \text{(根据(9.1)式)}$$

$$= 2\varepsilon(G^*) \quad \text{(根据定理 1.1)}$$

$$= 2\varepsilon(G) \quad \text{(根据(9.1)式)}$$

习　　题

9.2.1 (a) 证明：一个图是平面图当且仅当它的每个块都是平面图

(b) 试证：极小非平面图是简单块.

9.2.2 若一个平图和它的对偶图同构，这个平图称为自对偶的.

(a) 证明：若 G 是自对偶的，则 $\varepsilon = 2\nu - 2$.

(b) 对于每个 $n \geqslant 4$，找出有 n 个顶点的自对偶平图.

9.2.3 (a) 证明：B 是平图 G 的键当且仅当 $\{e^* \in E(G^*) | e \in B\}$ 是 G^* 的圈.

(b) 试证：Euler 平图的对偶图是偶图.

9.2.4 设 G 是平图. 证明：

(a) $G^{**} \cong G$ 当且仅当 G 是连通图.

(b) $\chi(G^{**}) = \chi(G)$.

9.2.5 设 T 是连通平图 G 的生成树，$E^* = \{e^* \in E(G^*) | e \in E(T)\}$. 证明：$T^* = G^*[E^*]$ 是 G^* 的生成树.

9.2.6 每个面的度都是 3 的平图称为平面三角剖分图

证明：每个简单平图都是某个简单平面三角剖分图 ($\nu \geqslant 3$) 的生成子图.

9.2.7 设 G 是 $\nu \geqslant 4$ 的简单平面三角剖分图.

证明：G^* 是简单 2 边连通 3 正则平面图.

9.2.8* 证明：任何平面三角剖分图 G，都包含一个有 $2\varepsilon(G)/3$ 条边的偶子图. (F. Harary 和 D. Matula)

9.3 Euler 公式

在连通平图中有一个关于顶点、边和面的数目的简单公式，名为 Euler 公式，因为 Euler 首先对多面体的顶点和边所确定的平图建立了这个公式.

定理 9.5 若G是连通平图，则

$$v - \varepsilon + \phi = 2$$

证 对G的面数ϕ用归纳法. 当$\phi = 1$时，G的每条边都是割边，又由于G是连通的，所以G是树. 由定理 2.2 知$\varepsilon = v - 1$，定理显然成立. 假设对于面数小于n的所有连通平图，定理是正确的，且设G是有$n \geqslant 2$个面的连通平图. 任选G的一条不是割边的边e，则$G - e$是连通平图，且有$n - 1$个面，因为G被e分隔的两个面结合成$G - e$的一个面. 根据归纳法假设有

$$v(G - e) - \varepsilon(G - e) + \phi(G - e) = 2$$

再利用关系式

$$v(G - e) = v(G), \quad \varepsilon(G - e) = \varepsilon(G) - 1,$$
$$\phi(G - e) = \phi(G) - 1$$

即得

$$v(G) - \varepsilon(G) + \phi(G) = 2$$

根据归纳法原理，定理得证.

推论 9.5.1 给定的连通平面图的所有平面嵌入有相同的面数.

证 设G和H是给定的连通平面图的两个平面嵌入. 由于$G \cong H$，$v(G) = v(H)$及$\varepsilon(G) = \varepsilon(H)$，应用定理 9.5 就有

$$\phi(G) = \varepsilon(G) - v(G) + 2 = \varepsilon(H) - v(H) + 2 = \phi(H)$$

推论 9.5.2 若G是$v \geqslant 3$的简单平面图，则$\varepsilon \leqslant 3v - 6$.

证 显然只要对连通的图证明这一点就够了. 设G是$v \geqslant 3$的简单连通平面图，则对所有$f \in F$，$d(f) \geqslant 3$成立，并且

$$\sum_{f \in F} d(f) \geqslant 3\phi$$

根据定理 9.4 有

$$2\varepsilon \geqslant 3\phi$$

于是，从定理 9.5 得

$$v - \varepsilon + 2\varepsilon/3 \geqslant 2$$

即

$$\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$$

推论 9.5.3 若G是简单平面图，则 $\delta \leqslant 5$。

证 对于 $\nu = 1, 2$，结论是显然的. 若 $\nu \geqslant 3$，则由定理 1.1 和推论 9.5.2 有

$$\delta\nu \leqslant \sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon \leqslant 6\nu - 12$$

由此推出 $\delta \leqslant 5$。

我们已经看到 K_5 和 $K_{3,3}$ 是非平面图(定理 9.1 和习题 9.1.1)。下面，作为定理 9.5 的推论来推导这两个结果。

推论 9.5.4 K_5 是非平面图.

证 若 K_5 是平面图，由推论 9.5.2 有

$$10 = \varepsilon(K_5) \leqslant 3\nu(K_5) - 6 = 9$$

于是 K_5 必须是非平面图.

推论 9.5.5 $K_{3,3}$ 是非平面图.

证 假设 $K_{3,3}$ 是平面图，并设G是 $K_{3,3}$ 的一个平面嵌入. 由于 $K_{3,3}$ 不具有长小于 4 的圈， G的每个面的度必然至少为 4. 所以，根据定理 9.4 有

$$4\phi \leqslant \sum_{f \in F} d(f) = 2\varepsilon = 18$$

即

$$\phi \leqslant 4$$

于是从定理 9.5 得到

$$2 = \nu - \varepsilon + \phi \leqslant 6 - 9 + 4 = 1$$

导致谬误。

习 题

9.3.1 (a) 证明：若G是围长 $k \geqslant 3$ 的连通平面图，则

$$\varepsilon \leqslant k(\nu - 2)/(k - 2).$$

(b) 利用 (a) 证明：Petersen 图是非平面图.

9.3.2 证明：每个平面图都是 6 顶点可着色的.

9.3.3 (a) 证明：若G是 $\nu > 11$ 的简单平面图，则 G^c 是非平面图.

(b) 找出一个 $\nu = 8$ 的简单平面图，使得 G^c 也是平面图.

9.3.4 若 G 可表示为若干个平面图的并图，称这种平面图的最小个数为 G 的厚度，记为 $\theta(G)$. 于是，$\theta(G) = 1$ 当且仅当 G 是平面图.

(a) 证明：$\theta(G) \geqslant \{\varepsilon/(3\nu - 6)\}$

(b) 试证：$\theta(K_\nu) \geqslant \{\nu(\nu - 1)/6(\nu - 2)\}$，并利用习题 9.3.3(b) 证明：等式对所有 $\nu \leqslant 8$ 成立.

9.3.5 应用习题 9.2.5 的结果推导 Euler 公式.

9.3.6 证明：若 G 是平面三角剖分图，则 $\varepsilon = 3\nu - 6$.

9.3.7 设 $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是平面上 n 个点的点集，$(n \geqslant 3)$，其中任何两点之间的距离至少是 1. 证明：最多有 $3n - 6$ 个点对，其距离恰为 1.

9.4 桥

在研究平面图时，称为桥的子图起着重要作用. 本节将讨论这类子图的性质.

设 H 是图 G 的一个给定子图，在 $E(G)\backslash E(H)$ 上定义关系 $\sim$ 如下：$e_1 \sim e_2$ 当且仅当存在一条途径 W，使得

(i) W 的第一条边和最后一条边分别是 e_1 和 e_2，并且

(ii) W 与 H 是内部不相交的(即 W 的内部顶点，没有一个是 H 的顶点).

容易验证 $\sim$ 是 $E(G)\backslash E(H)$ 上的一个等价关系. 由关系 $\sim$ 的等价类导出的 $G - E(H)$ 的子图称为 G 中 H 的桥. 从定义直接推出：若 B 是 H 的桥，则 B 是连通图，并且 B 的任何两个顶点都由和 H 的内部不相交的路连接着. 另外容易看出，不计 H 的顶点，H 的两座桥没有公共顶点. 对 H 的桥 B，我们记 $V(B) \cap V(H) = V(B, H)$，并称这个集中的顶点为 B 对于 H 的接触顶点. 图 9.9 表示了图中一个圈的几种桥；不同桥的边用不同种类的线表示着.

本节专门研究圈 C 的桥，为了避免重复，在下面的讨论中把“C 的桥”缩写成“桥”，且所有的桥都是指给定圈 C 的桥.

在连通图中，每座桥至少有一个接触顶点；而在块中，每座桥至少有两个接触顶点. 具有 k 个接触顶点的桥称为 k 桥. 具有相

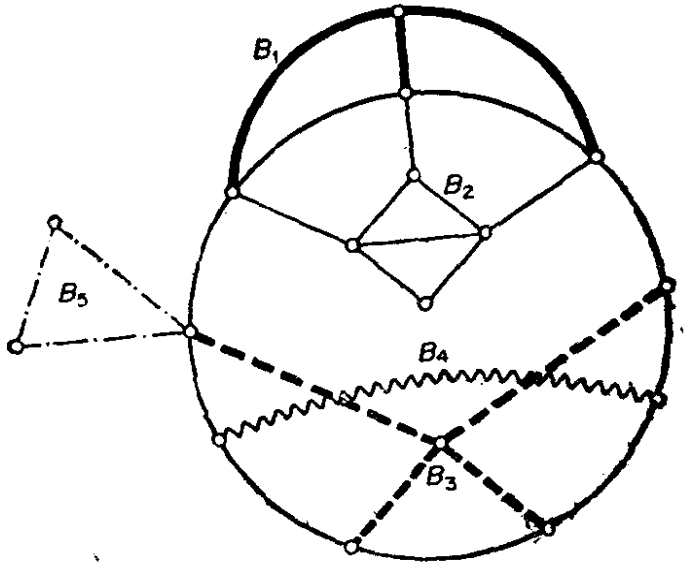


图 9.9　图中的桥

同接触顶点的两座 k 桥称为等价 k 桥；例如，在图 9.9 中，B_1 和 B_2 是等价 3 桥.

$k \geqslant 2$ 的 k 桥 B 的各个接触顶点，导致一个把 C 分成称之为 B 的段的边不重路的分类. 如果一座桥的所有接触顶点位于另一座桥的同一段中，则称此两座桥回避；否则称它们交叠. 在图 9.9 中，B_2 和 B_3 回避；而 B_1 和 B_2 交叠. 称两座桥 B 和 B' 是偏斜的，如果存在 C 的 4 个不同的顶点 u, v, u' 和 v'，其中 u 和 v 是 B 的接触顶点，u' 和 v' 是 B' 的接触顶点，且这 4 个顶点按循环顺序 u, u', v, v' 排列在 C 上. 在图 9.9 中，B_3 和 B_4 是偏斜的，而 B_1 和 B_2 则不是.

定理 9.6　若两座桥交叠，则它们或者偏斜，或者是等价 3 桥.

证　假设桥 B 和 B' 交叠. 显然，每座桥都必然至少有两个接触顶点. 若 B 或 B' 中有一个是 2 桥，则容易验证，它们必然是偏斜的. 所以可以假定 B 和 B' 两者都至少有 3 个接触顶点. 分两种情形讨论.

情形 1　B 和 B' 不是等价桥. 则 B' 有一个接触顶点 u' 在 B 的两个相继接触顶点 u 和 v 之间. 由于 B 和 B' 交叠，存在 B' 的某一接触顶点 v' 不在 B 的连接 u 和 v 的段上. 由此推出 B 和 B' 是偏斜的.

情形 2 B 和 B' 是等价 k 桥，$k \geqslant 3$. 若 $k \geqslant 4$，则 B 和 B' 显然是偏斜的；若 $k = 3$，则它们是等价 3 桥.

定理 9.7 若桥 B 有三个接触顶点 v_1, v_2 和 v_3，则在 $V(B) \setminus V(C)$ 中存在一个顶点 v_0，且在 B 中存在三条分别连接从 v_0 到 v_1, v_2 和 v_3 的路 P_1, P_2 和 P_3，使得当 $i \neq j$ 时，P_i 和 P_j 只有顶点 v_0 是公共的(见图 9.10).

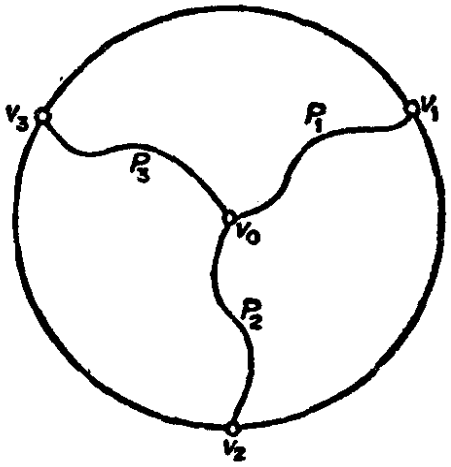


图 9.10

证 设 P 是 B 中和 C 内部不相交的一条 (v_1, v_2) 路 P 必有一个内部顶点 v，不然的话 B 将恰好是 P，从而不包含第三个顶点 v_3. 设 Q 是 B 中一条 (v_3, v) 路，和 C 内部不相交，再设 v_0 是 Q 在 P 上的第一个顶点. P^{-1} 的 (v_0, v_1) 节记为 P_1, P 的 (v_0, v_2) 节记为 P_2, Q^{-1} 的 (v_0, v_3) 节记为 P_3. 显然 P_1, P_2 和 P_3 满足所要求的条件.

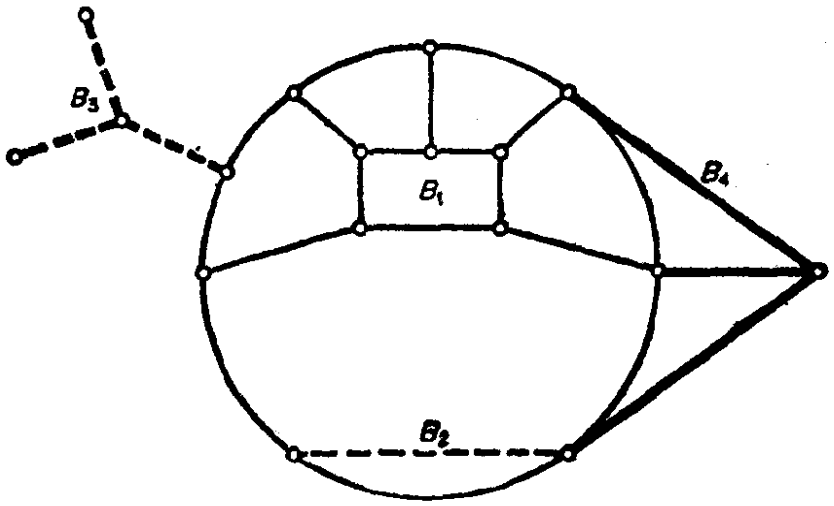


图 9.11 平图中的桥

现在考察平图中的桥. 假设G是平图,C是G中的圈,则C是平面上的 Jordan 曲线,而 $E(G)\backslash E(C)$ 的每条边包含在两个区域 Int$C$ 和 Ext$C$ 之一中. 由此推知,C的桥或者整个包含在 Int$C$ 中,或者整个包含在 Ext$C$ 中. 包含在 Int$C$ 中的桥称为内桥,包含在 Ext$C$ 中的桥称为外桥. 在图 9.11 中,B_1 和 B_2 是内桥,B_3 和 B_4 是外桥.

定理 9.8 内(外)桥是互相回避的.

证 用反证法. 设B和B'是交叠的两座内桥. 由定理 9.6,它们必然或是偏斜或是等价 3 桥.

情形 1 B和B'是偏斜的. 由定义,B中存在不同的顶点u和v,B'中存在不同的顶点u'和v',依循环顺序u, u', v, v'排列在C上. 设P是B中的(u, v)路,P'是B'中的(u', v')路,二者均和C内部不相交. 因为它们属于不同的桥,所以这两条路不能有公共的内部顶点. 又因B和B'是内桥,故P和P'必包含在 Int$C$ 中. 根据 Jordan 曲线定理,G不能是平图,与假设矛盾(见图 9.12).

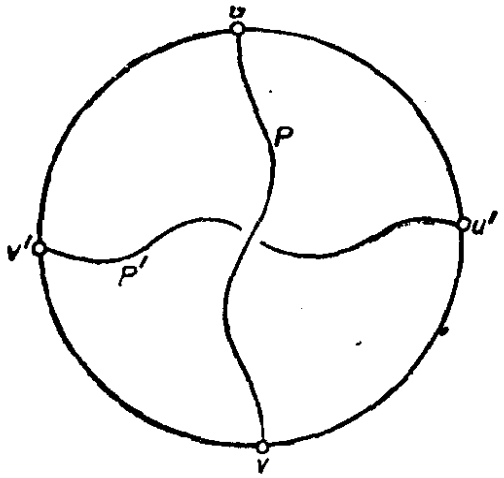


图 9.12

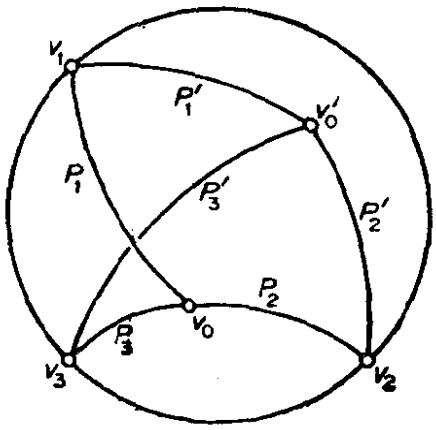


图 9.13

情形 2 B和B'是等价 3 桥. 设公共接触顶点集是$\{v_1, v_2, v_3\}$. 由定理 9.7,在B中存在一个顶点v_0,以及分别连接从v_0到v_1,v_2和v_3的三条路P_1,P_2和P_3,使得当$i \neq j$时,P_i和P_j仅有公共顶点v_0. 类似地,B'有一个顶点v_0'以及分别连接从v_0'到v_1,v_2

和 v_3 的三条路 P_1', P_2' 和 P_3', 使得当 $i \neq j$ 时, P_i' 和 P_j' 仅有公共顶点 v_0'(见图 9.13).

于是路 P_1, P_2 和 P_3 把 Int C 分为三个区域, v_0' 必在三个区域之一的内部. 由于顶点 v_1, v_2 和 v_3 中只有两个能够位于包含 v_0' 的区域的周界上, 所以根据对称性, 不妨假定 v_3 不在这个区域的周界上. 由 Jordan 曲线定理, 路 P_3' 必然穿过 P_1, P_2, C 之一. 但是 B 和 B' 是不同的内桥, 这显然是不可能的.

由此断言, 内桥互相回避. 同理, 外桥也互相回避.

设 G 是一个平图. G 中圈 C 的内桥 B 称为可移动的, 如果存在 G 的一个平面嵌入 $\tilde{G}$, 使得除去 B 在 $\tilde{G}$ 中是 C 的外桥之外, $\tilde{G}$ 和 G 恒等. 称 $\tilde{G}$ 为从 G 移动 B 而得的平图. 图 9.14 说明了一

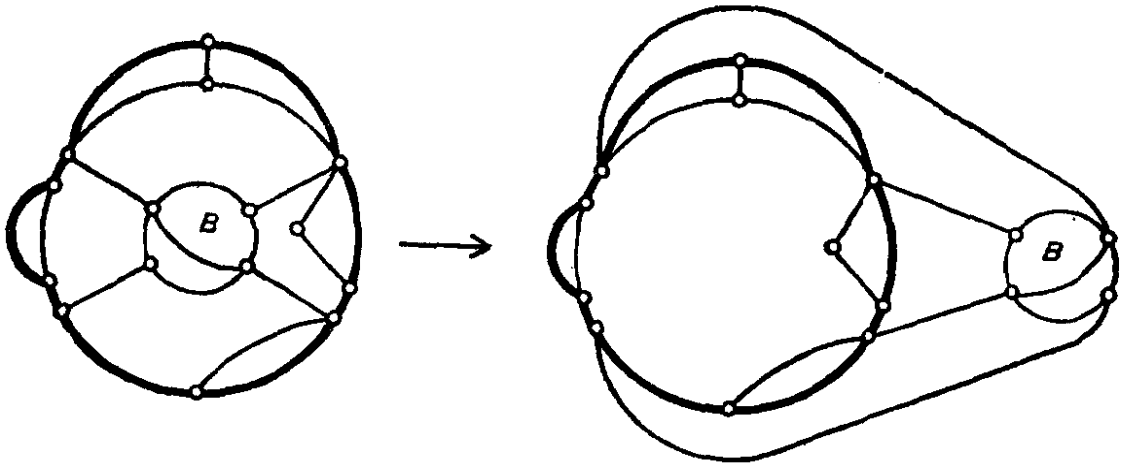


图 9.14 桥的移动

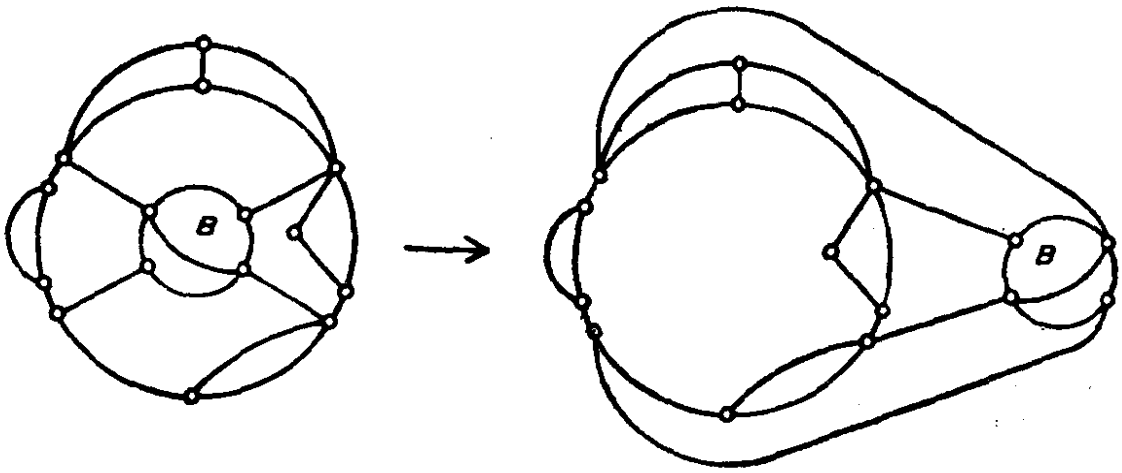


图 9.15

座桥的移动.

定理 9.9 与每座外桥都互相回避的内桥是可移动的.

证 设 B 是与每座外桥都互相回避的内桥. 则 B 在 C 上的接触顶点全部位于 G 的包含在 Ext C 中的某个面的周界上. 于是 B 能够画在这个面中, 正如图 9.15 所示的那样.

定理 9.9 对于 Kuratowski 定理的证明是极其重要的, 该定理将在下一节证明.

习 题

9.4.1 证明: 若 B 和 B' 是两座不同的桥, 则 $V(B) \cap V(B') \subseteq V(C)$

9.4.2 在某平图中, 设 u, x, v 和 y (按这个循环顺序)是桥 B 对于圈 C 的四个不同的接触顶点。证明: B 中存在一条 (u, v) 路 P 和一条 (x, y) 路 Q, 使得 (i) P 和 Q 都与 C 内部不相交, (ii) $|V(P) \cap V(Q)| \geq 1$.

9.4.3 (a) 设 $C = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ 是非 Hamilton 连通图 G 的最长圈. 证明: (i) 存在一座桥 B, 使得 $V(B) \backslash V(C) \neq \varnothing$; (ii) 若 v_i 和 v_j 是 B 的接触顶点, 则 $v_{i+1} v_{j+1} \notin E$.

(b) 试证: 若 $\alpha < \kappa$, 则 G 是 Hamilton 图. (V. Chvátal 和 P. Erdös)

9.5 Kuratowski 定理

由于平面性是图的一个基本性质, 所以判断哪些是平面图哪些不是, 显然是重要的. 特别地我们已经分别证明了 K_5 和 $K_{3,3}$ 是非平面图, 而它们的任何真子图却是平面图 (习题 9.1.2). Kuratowski (1930) 给出了平面图的一个异常简单的特征. 本节将专门来证明 Kuratowski 定理.

下述引理是简单的观察结果, 其证明留作习题(9.5.1).

引理 9.10.1 若 G 是非平面图, 则 G 的每个剖分图也是非平面图.

引理 9.10.2 若 G 是平面图, 则 G 的每个子图也是平面图.

由于 K_5 和 $K_{3,3}$ 是非平面图, 由这两个引理可看出: 若 G 是平面图, 则不能包含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图(图 9.16). Kuratowski 指出:

这个必要条件也是充分的.

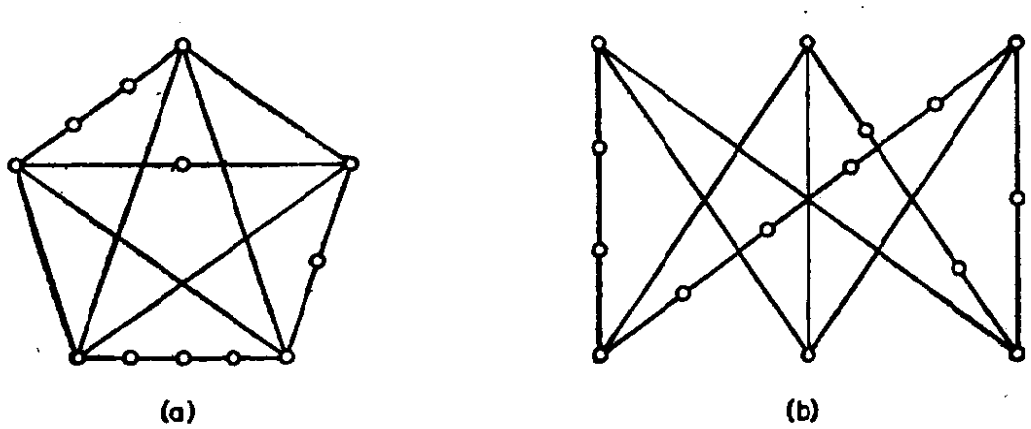


图 9.16 (a) K_5 的一个剖分图，(b) $K_{3,3}$ 的一个剖分图

在证明 Kuratowski 定理之前，还需要建立两个简单的引理.

设 G 是有 2 顶点割 $\{u, v\}$ 的图.则存在边不重子图 G_1 和 G_2，使得 $V(G_1)\cap V(G_2)=\{u, v\}$，以及 $G_1\cup G_2=G$. 把 G 分成这样的两个子图 G_1 和 G_2，在 G_1 和 G_2 中用一条新的边 e 连接 u 和 v，得到图 H_1 和 H_2，如图 9.17 所示. 显然 $G=(H_1\cup H_2)-e$. 还容易看出，对于 $i=1, 2$，$\varepsilon(H_i)<\varepsilon(G)$ 成立.

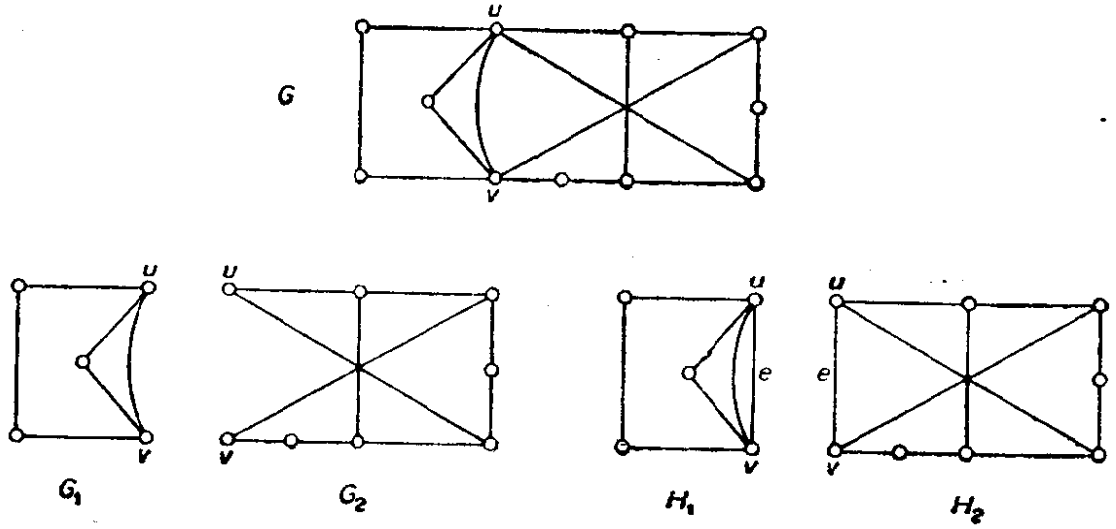


图 9.17

引理 9.10.3 若 G 是非平面图，则 H_1 和 H_2 之中至少有一个也是非平面图.

证 用反证法. 假设 H_1 和 H_2 都是平面图，$\tilde{H}_1$ 是 H_1 的一个平面嵌入，且设 f 是 $\tilde{H}_1$ 中和 e 关联的面. 若 $\tilde{H}_2$ 是 H_2 在 f 中的一

个嵌入，使得 $\tilde{H}_1$ 和 $\tilde{H}_2$ 只有顶点 u 和 v 以及边 e 是公共的，则 $(\tilde{H}_1 \cup \tilde{H}_2) - e$ 是 G 的一个平面嵌入. 这与 G 是非平面图假设相矛盾.

引理 9.10.4 设 G 是非平面的连通图，它不包含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图，且有尽可能少的边数. 则 G 是 3 连通简单图.

证 用反证法. 设 G 满足引理的假设. 则 G 显然是极小非平面图，因而（习题 9.2.1 (b)）必然是个简单块. 如若 G 不是 3 连通的，设 $\{u, v\}$ 是 G 的一个 2 顶点割，且 H_1 和 H_2 是如上所述的从这个 2 顶点割得到的两个图. 根据引理 9.10.3，H_1 和 H_2 之中至少有一个，譬如说 H_1，是非平面图. 由于 $\varepsilon(H_1) < \varepsilon(G)$，所以 H_1 必须包含一个子图 K，它是 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图；而且 $K \not\subseteq G$，因而边 e 必在 K 中. 设 P 是 $H_2 - e$ 中的一条 (u, v) 路. 则 G 包含子图 $(K \cup P) - e$，它是 K 的剖分图，从而也是 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图. 这个矛盾证实了引理的正确性.

在 Kuratowski 定理的证明中，采用下面的记号是方便的. 假设 C 是平图的一个圈，则 C 有两种可能的定向，即“顺时针”和“逆时针”方向. 对于 C 的任意两个顶点 u 和 v，用 $C[u, v]$ 表示沿着 C 的顺时针方向的一条 (u, v) 路；类似地，用 $C(u, v]$，$C[u, v)$ 和 $C(u, v)$ 分别表示路 $C[u, v] - u$，$C[u, v] - v$ 和 $C[u, v] - \{u, v\}$. 现在来证明 Kuratowski 定理. 我们的证明基于 Dirac 和 Schuster (1954) 的证明.

定理 9.10 一个图是平面图当且仅当它不包含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图.

证 我们已经指出，必要性可从引理 9.10.1 和 9.10.2 推出. 下面用反证法来证明充分性.

如若可能，选择一个非平面图 G，它不包含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的剖分图且有尽可能少的边. 从引理 9.10.4 推知 G 是 3 连通简单图. 显然 G 也必然是一个极小非平面图.

设 uv 是 G 的一条边，H 是平面图 $G - uv$ 的一个平面嵌入. 由于 G 是 3 连通的，所以 H 是 2 连通的，由推论 3.2.1 知 u 和 v 都

同在H的一个圈上．选择H的一个包含u和v的图C，使得H在$\mathrm{Int}\,C$中有尽可能多的边．

由于H是2连通简单图，所以H中C的每座桥必然至少有两个接触顶点．于是，C的所有外桥必然是交叠于u v的2桥．因为，如若某一外桥是$k\geqslant 3$的k桥，或是回避于u v的2桥，则将存在一个包含u和v而在它的内部具有比C的内部更多边的圈C'，这与C的选择矛盾．上述两种情形在图9.18中说明（用粗线表示C'）．

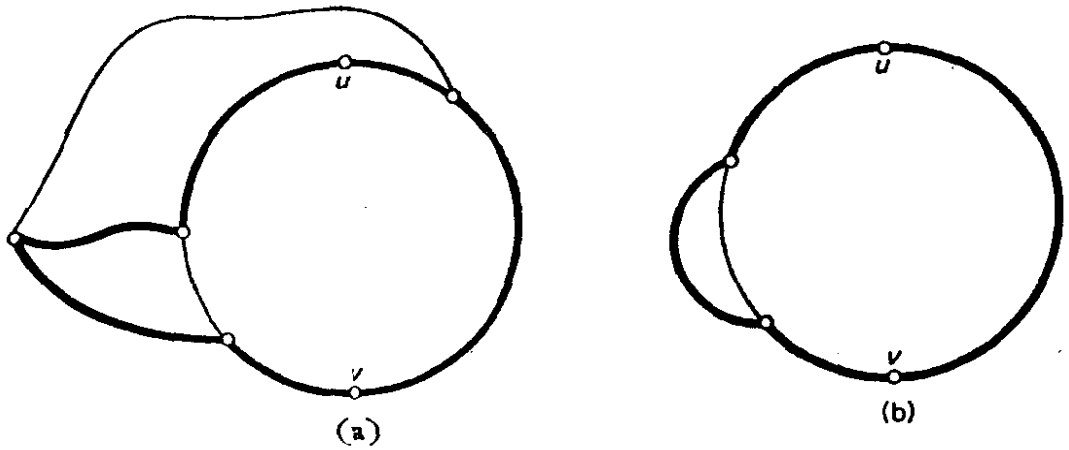


图 9.18

事实上，H中C的所有外桥必然都是单边的．因为如若具有接触顶点x和y的一座2桥有第三个顶点，则集$\{x, y\}$将是G的一个2顶点割，这与G是3连通的事实相矛盾．

根据定理9.8，没有两座内桥交叠，所以偏斜于uv的某一内桥必然交叠于某一外桥．因为否则，由定理9.9，所有这种内桥都是可移动的（逐个地），因而边uv可以画在$\mathrm{Int}\,C$中，从而得到G的一个平面嵌入．然而，G是非平面的，所以这是不可能的．因此，存在一座内桥B，它既偏斜于uv，又偏斜于某一外桥xy．

现在按照B是否具有不同于u，v，x和y的接触顶点，分两种情形讨论．

情形1 B有不同于u，v，x和y的接触顶点．记B在$C(x, u)$中的一个接触顶点为v_1（见图9.19）．我们再按照B在$C(y, v)$中是否有接触顶点，分两种情形来考察．

情形 1(a) B 在 $C(y, v)$ 中有接触顶点 v_2. 此时在 B 中存在一条 (v_1, v_2) 路 P, 它与 C 是内部不相交的. 因此 $(C \cup P) + \{uv, xy\}$ 是 G 中 $K_{3,3}$ 的一个剖分图, 导致矛盾(见图 9.19).

情形 1(b) B 在 $C(y, v)$ 中没有接触顶点. 由于 B 对于 uv 和 xy 都是偏斜的, B 必然在 $C(u, y]$ 中有接触顶点 v_2, 并在 $C[v, x)$ 中有接触顶点 v_3. 于是 B 有三个接触顶点 v_1, v_2 和 v_3. 由定理 9.7, 在 $V(B)\backslash V(C)$ 中存在一个顶点 v_0, 以及在 B 中存在分别连接从 v_0 到 v_1, v_2, v_3 的三条路 P_1, P_2 及 P_3, 使得当 $i \neq j$ 时 P_i 和 P_j 仅有一个公共顶点 v_0. 于是 $(C \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3) + \{uv, xy\}$ 包含 $K_{3,3}$ 的一个剖分图, 导致矛盾. 这种情形在图 9.20 中说明, 其中粗线表示 $K_{3,3}$ 的剖分图.

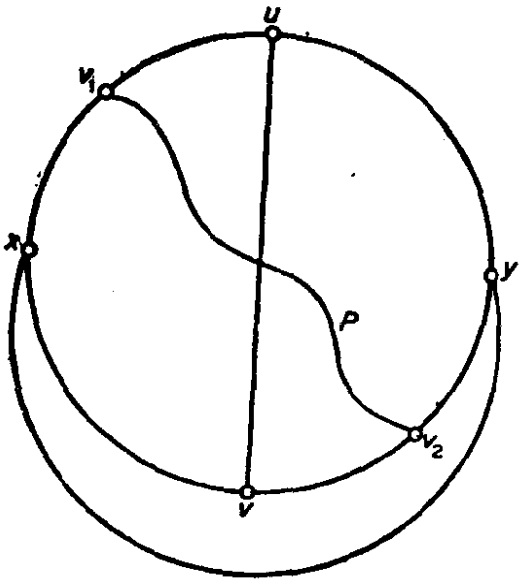


图 9.19

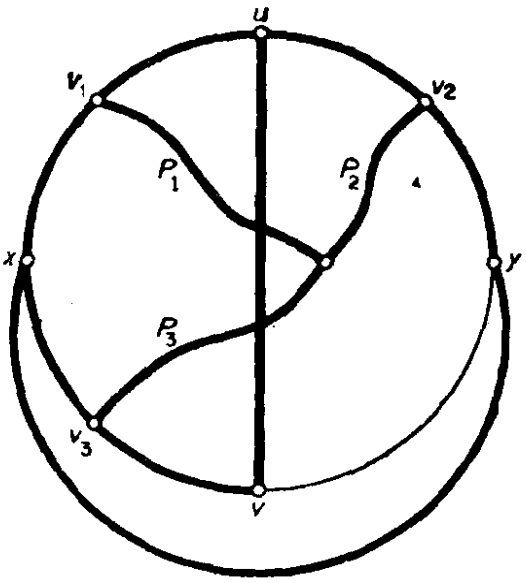


图 9.20

情形 2 除 u, v, x 和 y 之外, B 没有别的接触顶点. 由于 B 对于 uv 和 xy 来说都是偏斜的, 由此推知 u, v, x 和 y 必然全部都是 B 的接触顶点. 所以(习题 9.4.2)在 B 中存在一条 (u, v) 路 P 和一条 (x, y) 路 Q, 使得 (i) P 和 Q 都与 C 内部不相交, 并且 (ii) $|V(P) \cap V(Q)| \geq 1$. 我们再按照 P 和 Q 有一个或多个公共顶点, 分两种情形来考察.

情形 2(a) $|V(P) \cap V(Q)| = 1$. 此时 $(C \cup P \cup Q) + \{uv,$

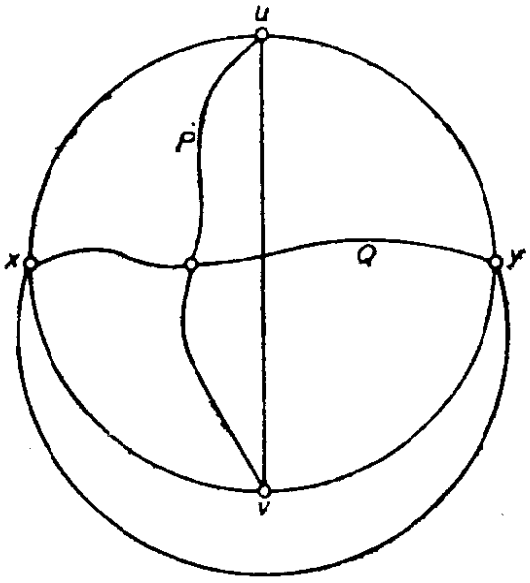


图 9.21

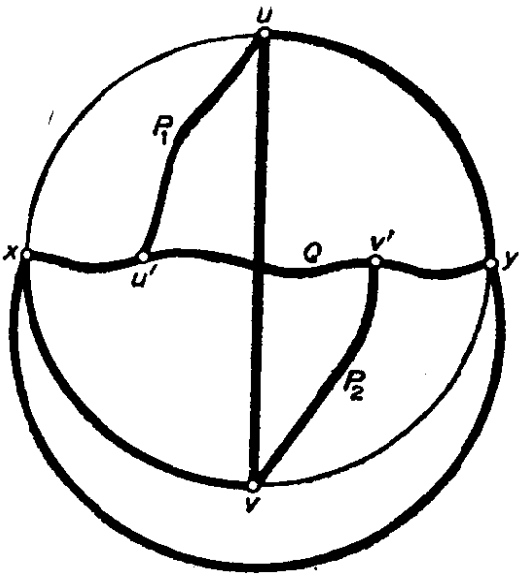


图 9.22

$xy\}$ 是 G 中 K_5 的一个剖分图，又出现矛盾(见图 9.21)。

情形 2(b) $|V(P)\cap V(Q)|\geqslant 2$。设 u' 和 v' 是 Q 上 P 的第一个和最后一个顶点，并设 P_1 和 P_2 表示 P 的 (u, u') 节和 (v', v) 节。则 $(C\cup P_1\cup P_2\cup Q)+\{uv, xy\}$ 在 G 中包含 $K_{3,3}$ 的一个剖分图。再次出现矛盾(见图 9.22)。

所有可能的情形都导致矛盾，证明完毕。

存在着平面图的若干另外的特征。例如：Wagner (1937) 证明了：一个图是平面图当且仅当它不包含可收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。

习　　题

9.5.1　证明引理 9.10.1 和 9.10.2。

9.5.2　利用 Kuratowski 定理证明：Petersen 图是非平面图。

9.6　五色定理和四色猜想

正如已经指出的那样(习题 9.3.2)，每个平面图是 6 顶点可着色的。Heawood (1890) 改进了这个结果，他证明了：最多用五种颜色便可以给平面图的顶点正常地着色。这个定理名为五色定理。

定理 9.11　每个平面图都是 5 顶点可着色的。

证 用反证法. 假设定理不成立. 则存在一个 6 临界平图 G. 由于临界图是简单图，由推论 9.5.3 推得 $\delta \leqslant 5$. 另一方面，由定理 8.1 有 $\delta \geqslant 5$. 所以 $\delta = 5$. 设 v 是 G 中一个 5 度顶点，并设 $(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5)$ 是 $G - v$ 的一个正常 5 顶点着色；因为 G 是 6 临界的，这样的着色一定存在. 由于 G 本身不是 5 顶点可着色的，v 必须和染有这五种颜色中的每一种颜色的顶点相邻. 所以我们可以假定 v 的邻点沿着 v 的顺时针方向是 v_1, v_2, v_3, v_4 和 v_5, 这里 $v_i \in V_i$, $1 \leqslant i \leqslant 5$.

用 G_{ij} 表示由 $V_i \cup V_j$ 导出的子图 $G[V_i \cup V_j]$, 于是 v_i 和 v_j 必属于 G_{ij} 的同一个分支. 因为不然的话，考察 G_{ij} 的一个包含 v_i 的分支. 在这个分支中交换颜色 i 和 j, 得到 $G - v$ 的一个新的正常 5 顶点着色，其中只有四种颜色(除 i 之外)分配给 v 的邻点，然而已经证明，这种情形不能发生. 所以 v_i 和 v_j 必属于 G_{ij} 的同一分支. 设 P_{ij} 是 G_{ij} 中的 (v_i, v_j)路，并将圈 $vv_1P_{13}v_3v$ 记为 C (见图 9.23)

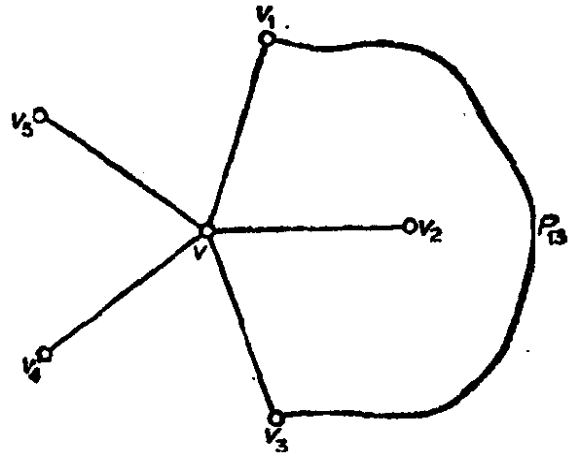


图 9.23

由于 C 分隔 v_2 和 v_4 (在图 9.23 中，$v_2 \in \text{int } C$ 而 $v_4 \in \text{ext } C$)，从 Jordan 曲线定理推得，路 P_{24} 必然和 C 相遇于某一点. 因为 G 是平图，这个点必然是顶点. 但这是不可能的，因为 P_{24} 的顶点有颜色 2 和 4，而 C 的顶点不具有这两种颜色.

问题在于五色定理是否是最佳可能的结果. 有一个猜想：每

个平面图都是 4 顶点可着色的；这个猜想名为四色猜想. 一个多世纪以来，尽管权威的数学家们作了很多尝试，但四色猜想一直没有解决[1]. 若它是正确的，则它当然是最佳可能的结果，因为确实存在着不是 3 顶点可着色的平面图（K_4 是最简单的这类图）. 关于四色猜想的历史典故，请参阅 Ore (1967) 的著作.

判断四色猜想是否正确的问题，称为四色问题[2]. 在图论中，存在若干与四色问题等价的问题；其中之一是 $n=5$ 时的 Hadwiger 猜想（见 8.3 节）. 下面来建立涉及边和面着色的某些问题与四色问题之间的等价性. 平图 G 的 k 面着色是指 k 种颜色 $1, 2, \cdots, k$ 给 G 的所有面的一个分配；若被一条边分隔的两个面分配以不同的颜色，则称这个面着色是正常的. 若 G 有一个正常的 k 面着色，则称 G 是 k 面可着色的. 使得 G 是 k 面可着色的最小 k 值，称为 G 的面色数，记为 $\chi^*(G)$. 由上述定义可以直接推出，对于任何具有对偶图 G^* 的平图 G，有

$$\chi^*(G) = \chi(G^*) \tag{9.2}$$

定理 9.12 下面三个语句是等价的：

(i) 每个平面图都是 4 顶点可着色的；

(ii) 每个平图都是 4 面可着色的；

(iii) 每个简单 2 边连通 3 正则平面图都是 3 边可着色的.

证 我们按照 (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (i) 的顺序来证明.

(a) (i) ⇒ (ii) 这是 (9.2) 式以及平图的对偶图是平面图这一事实的直接结果.

(b) (ii) ⇒ (iii) 假设 (ii) 成立，设 G 是简单 2 边连通 3 正则平面图，$\tilde{G}$ 是 G 的一个平面嵌入. 根据 (ii)，$\tilde{G}$ 有一个正常 4 面着色. 由于用怎样的符号来表达颜色是无关紧要的，所以这里我

---

1) 借助于电子计算机，四色猜想已被 K. Appel 和 W. Haken 证明是正确的. 见 Bull. Amer. Math. Soc. **82**(1976), 711—712.——译者注

2) 四色问题常常用下面的术语来表达：任何地图上的国家是否能用四种颜色来着色，使得任何具有共同边界的两个国家的颜色都不同？在把地图看作为平图而它的国家看作为面之后，从定理 9.12 可知这个问题与四色问题的等价性.

们可以在整数模 2 的域中用向量 $c_0=(0,0)$，$c_1=(1,0)$，$c_2=(0,1)$ 以及 $c_3=(1,1)$ 表示这四种颜色. 把某边所分隔的面的颜色之和作为颜色分配给该边，可以得到 $\tilde{G}$ 的一个 3 边着色(见图 9.24). 若 c_i，c_j 和 c_k 是分配给与顶点 v 关联的三个面的三种颜色，则 c_i+c_j，c_j+c_k 以及 c_k+c_i 是分配给与 v 关联的三条边的颜色. 由于 $\tilde{G}$ 是 2 边连通的，所以每条边分隔两个不同的面，并且在这个方案中没有边分配到颜色 c_0. 同样明显的是：与一个给定的顶点关联的三条边分配到不同的颜色. 于是，我们获得一个 $\tilde{G}$ 的，因而也是 G 的正常 3 边着色.

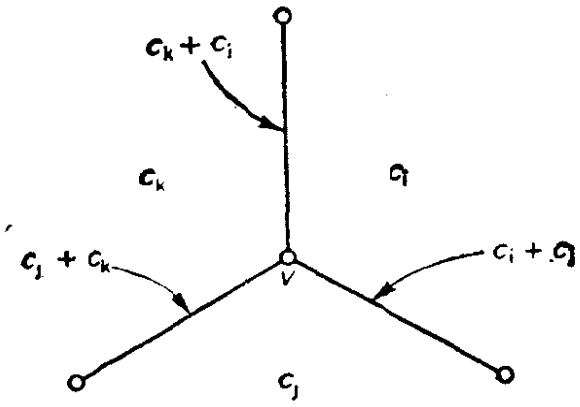


图 9.24

(c) (iii) ⇒ (i). 假设(iii)成立，而(i)不成立. 则存在一个 5 临界的平面图 G. 设 $\tilde{G}$ 是 G 的一个平面嵌入. 则(习题 9.2.6) $\tilde{G}$ 是一个简单平面三角剖分图 H 的生成子图. H 的对偶图 H^* 是一个 2 边连通 3 正则的简单平面图(习题 9.2.7). 根据 (iii)，H^* 有一个正常 3 边着色 (E_1, E_2, E_3). 对于 $i\neq j$，设 H_{ij}^* 表示由 $E_i\cup E_j$ 导出的 H^* 的子图. 由于 H^* 的每个顶点和 E_i 的一条边以及 E_j 的一条边关联，H_{ij}^* 是不相交的圈的并图，因而(习题 9.6.1) 是 2 面可着色的. 于是 H^* 的每个面是 H_{12}^* 的一个面与 H_{23}^* 的一个面的交集. 给定 H_{12}^* 和 H_{23}^* 的一个正常 2 面着色后，把分配给交集为 f 的那两个面的一对颜色，分配给面 f，得到 H^* 的一个 4 面着色. 由于 $H^*=H_{12}^*\cup H_{23}^*$，容易验证 H^* 的这个 4 面着色是正常的. 由于 H 是 G 的母图，所以有

$$5 = \chi(G) \leqslant \chi(H) = \chi^*(H^*) \leqslant 4$$

这个矛盾说明了 (i) 确实是成立的.

定理 9.12 的语句(iii)等价于四色问题,这首先由 Tait (1880) 发现. 3 正则图的正常 3 边着色通常称为 Tait 着色. 下一节,我们将讨论 Tait 关于四色猜想的有根本性缺陷的论述. Grötzsch (1958) 对于没有三角形的平面图,证明了四色猜想. 事实上,他证明了每个这样的图都是 3 顶点可着色的.

习　　题

9.6.1 证明: 平图 G 是 2 面可着色的当且仅当 G 是 Euler 图.

9.6.2 证明: 平面三角剖分图 G 是 3 顶点可着色的当且仅当 G 是 Euler 图.

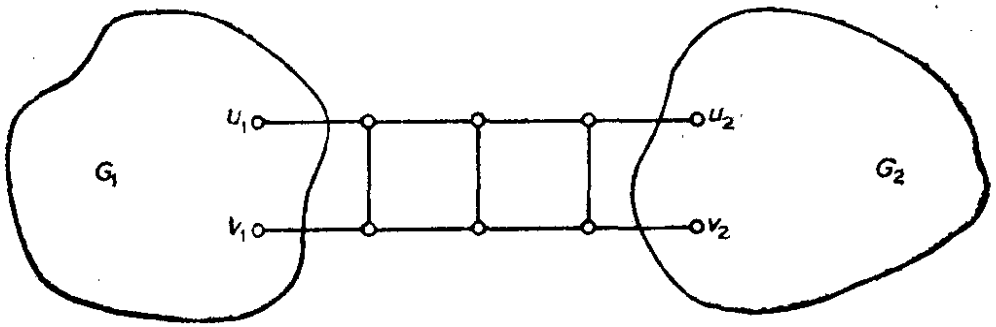
9.6.3 证明: 每个 Hamilton 平图都是 4 面可着色的.

9.6.4 证明: 每个 Hamilton 3 正则图都有 Tait 着色.

9.6.5 按 $(iii)\Rightarrow(ii)\Rightarrow(i)\Rightarrow(iii)$ 的顺序证明定理 9.12.

9.6.6 设 G 是 $\kappa' = 2$ 的 3 正则图.

(a) 证明: 存在 G 的子图 G_1 和 G_2 及不相邻的顶点对 $u_1, v_1 \in V(G_1)$ 和 $u_2, v_2 \in V(G_2)$, 使得 G 由图 G_1 和 G_2 以及在顶点 u_1, v_1, u_2 和 v_2 上由'梯子'连接的图所组成.



(b) 证明: 若 $G_1 + u_1v_1$ 和 $G_2 + u_2v_2$ 都有 Tait 着色,则 G 也有 Tait 着色.

(c) 根据定理 9.12 证明四色猜想等价于 Tait 猜想: 每个简单 3 正则 3 连通平面图都有 Tait 着色.

9.6.7 给出满足下述条件的例子各一个:

(a) 不具有 Tait 着色的 3 正则平面图;

(b) 不具有 Tait 着色的 3 正则 2 连通图.

9.7 非 Hamilton 平面图

在证明四色猜想的尝试中，Tait (1880) 发现，只要证明每个 3 正则 3 连通平面图都有 Tait 着色(习题 9.6.6)就够了. 根据"每个这样的图都是 Hamilton 图"的错误假设，他给出了四色猜想的一个"证明"(见习题 9.6.4). 半个世纪以后，Tutte (1946) 构作了一个非 Hamilton 3 正则 3 连通平面图，从而说明 Tait 的证明无效；Tutte 图在图 9.25 中给出.

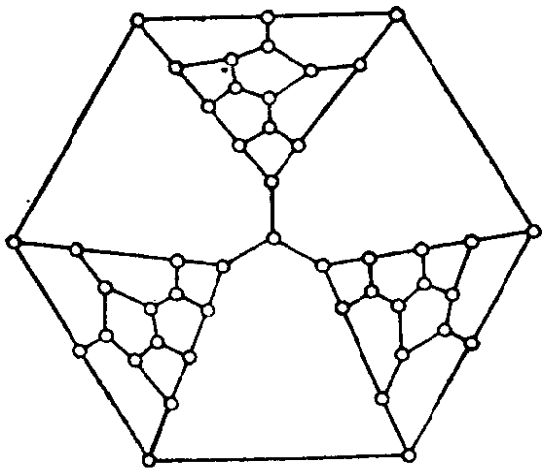


图 9.25 Tutte 图

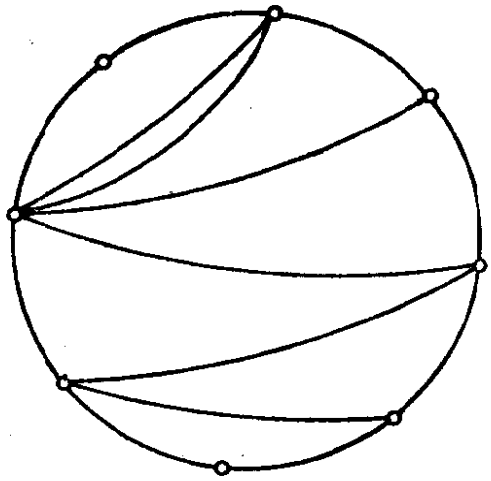


图 9.26

Tutte 用巧妙而独特的方法，证明他的图是非 Hamilton 图(习题 9.7.1). 并且在很多年之后，Tutte 图仍然是非 Hamilton 3 正则 3 连通平面图的仅有的一例. 后来，Grinberg (1968) 发现了平图是 Hamilton 图的一个必要条件. 他的发现导致许多非 Hamilton 平面图的出现.

定理 9.13 设 G 是具有 Hamilton 圈 C 的无环平图. 则

$$\sum_{i=1}^{\nu}(i-2)(\phi_i'-\phi_i'')=0 \tag{9.3}$$

这里，ϕ_i' 和 ϕ_i'' 分别是包含在 Int C 和 Ext C 中度为 i 的面的数目.

证 用 E' 表示包含在 Int C 中的 $E(G)\backslash E(C)$ 的子集，并设

$\varepsilon' = |E'|$. 则 Int C 恰好包含 $\varepsilon' + 1$ 个面(见图 9.26), 且

$$\sum_{i=1}^{\nu} \phi_i' = \varepsilon' + 1 \tag{9.4}$$

于是 E' 的每条边都在 Int C 的两个面的周界上, 而 C 的每条边都在 Int C 的一个面的周界上. 所以

$$\sum_{i=1}^{\nu} i\phi_i' = 2\varepsilon' + \nu \tag{9.5}$$

利用 (9.4) 式,消去 (9.5) 式中的 ε', 得到

$$\sum_{i=1}^{\nu} (i-2)\phi_i' = \nu - 2 \tag{9.6}$$

类似有

$$\sum_{i=1}^{\nu} (i-2)\phi_i'' = \nu - 2 \tag{9.7}$$

从等式 (9.6) 和 (9.7) 即推得 (9.3) 式.

借助于定理 9.13, 容易证明 Grinberg 图(图 9.27)是非 Hamilton 图.

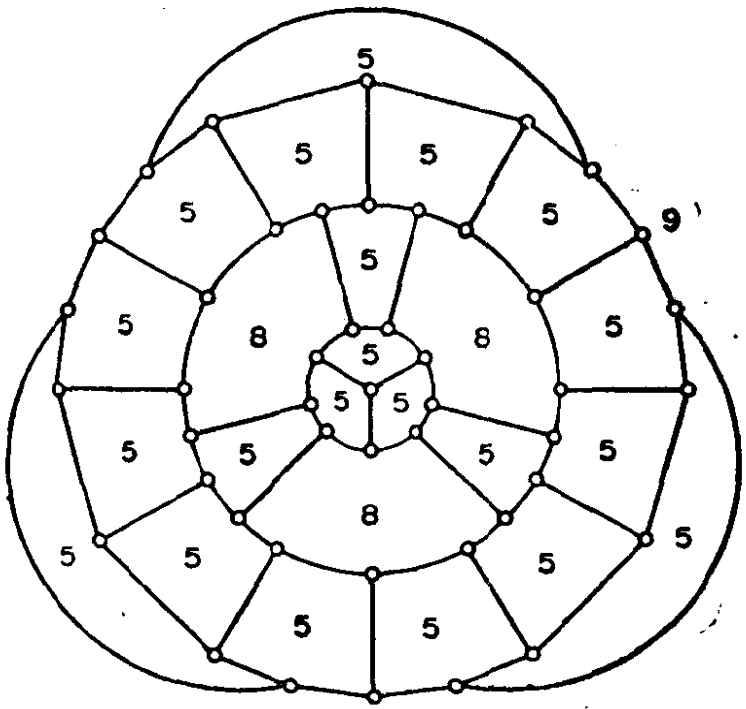


图 9.27 Grinberg 图

假设这个图是 Hamilton 图. 因它仅有度为 5，8 和 9 的面，由条件 (9.3)，得到

$$3(\phi_5' - \phi_5'') + 6(\phi_8' - \phi_8'') + 7(\phi_9' - \phi_9'') = 0$$

由此推出：

$$7(\phi_9' - \phi_9'') \equiv 0 \pmod 3$$

这显然是不可能的，因为左边的值是 7 或 −7，取决于度为 9 的面是在 Int C 中还是在 Ext C 中. 故该图不可能是 Hamilton 图.

尽管存在着非 Hamilton 3 连通平面图，Tutte (1956) 证明了每个 4 连通平面图是 Hamilton 图.

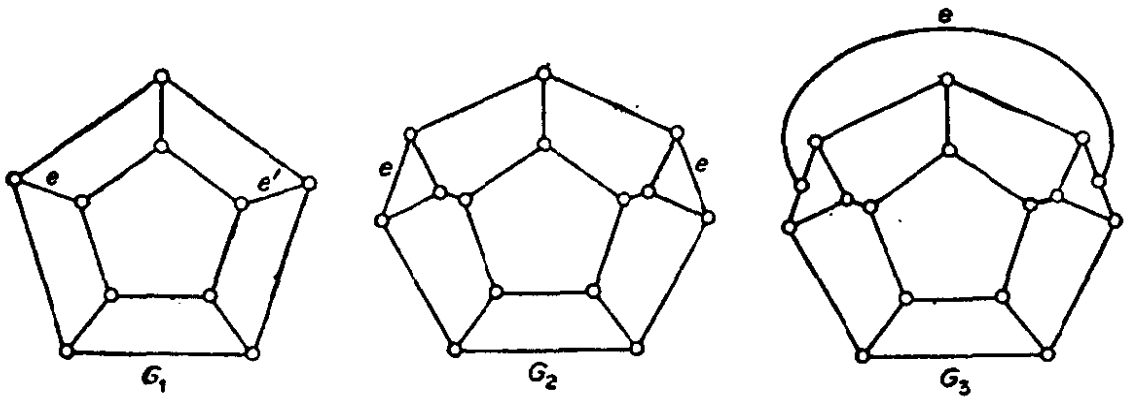
习　　题

9.7.1 (a) 证明：在下面的图 G_1 中，没有包含边 e 和 e' 的 Hamilton 圈.

(b) 利用 (a) 证明：在图 G_2 中，没有包含边 e 和 e' 的 Hamilton 圈.

(c) 利用 (b) 证明：在图 G_3 中，每个 Hamilton 圈都包含边 e.

(d) 试证：Tutte 图 (图 9.25) 是非 Hamilton 图.



9.7.2 应用定理 9.13 证明：Herschel 图(图 4.2(b))是非 Hamilton 图. (事实上，它是最小的非 Hamilton 3 连通平面图).

9.7.3 给出一个连通度为 2 的简单非 Hamilton 3 正则平面图的例子.

应　　用

9.8 平面性算法

在很多实际问题中，重要的是判断一个给定的图是否是平面

图，并且如果它是平面图，则要找出它的平面嵌入来. 例如，在印刷电路的布线中，人们感兴趣的是要求知道一个特定的电网络是否可嵌入平面. 本节介绍由 Demoucron, Malgrange 和 Pertuiset (1964) 给出的解决这个问题的一个算法.

设 H 是图 G 的一个平面子图，$\tilde{H}$ 是 H 在这个平面中的一个嵌入. 若 G 是平面图，且存在 G 的一个平面嵌入 $\tilde{G}$，使得 $\tilde{H}\subseteq\tilde{G}$，则称 $\tilde{H}$ 是 G 容许的. 例如图 9.28 表示 G 的一个平面子图的两个嵌入；一个是 G 容许的，而另一个则不是.

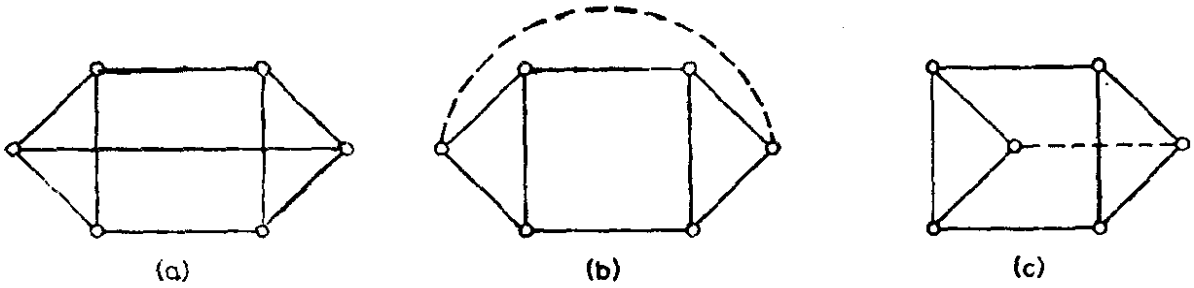


图 9.28 (a) G; (b) G 容许的嵌入 (c) G 不容许的嵌入

如果 B 是 H (在 G 中) 的任意一座桥；且 B 对于 H 的接触顶点都包含在 $\tilde{H}$ 的面 f 的周界上，则称 B 在 $\tilde{H}$ 的面 f 内是可画出的. 用 $F(B,\tilde{H})$ 表示在 $\tilde{H}$ 中桥 B 是可画出的那些面的集. 下述定理提供 G 是平面图的一个必要条件.

定理 9.14 若 $\tilde{H}$ 是 G 容许的，则对于 H 的每座桥 B，$F(B,\tilde{H})\neq\varnothing$.

证 若 $\tilde{H}$ 是 G 容许的，则根据定义，存在 G 的一个平面嵌入 $\tilde{G}$，使得 $\tilde{H}\subseteq\tilde{G}$. 显然，$H$ 的桥 B 所对应的 $\tilde{G}$ 的子图必然限制在 $\tilde{H}$ 的一个面中，因此 $F(B,\tilde{H})\neq\varnothing$.

由于一个图是平面图当且仅当它的基础简单图的每个块都是平面图，所以只要考察简单块就够了. 给定这样的一个图 G 后，算法就确定了 G 的一个平面子图的递增序列 $G_1, G_2, \cdots$，以及对应的平面嵌入 $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \cdots$. 当 G 是平面图时，每个 $\tilde{G}_i$ 是 G 容许的，并且序列 $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \cdots$ 终止于 G 的一个平面嵌入. 对每一步，都应用定理 9.14 的必要条件，来判断 G 的非平面性.

平面性算法

1. 设 G_1 是 G 的一个圈，找出 G_1 的一个平面嵌入 $\tilde{G}_1$. 置 $i=1$.

2. 若 $E(G)\backslash E(G_i)=\varnothing$，则停止. 否则，确定 G 中 G_i 的所有桥；对于每座这样的桥 B，找出集 $F(B,\tilde{G}_i)$.

3. 若存在一座桥 B，使得 $F(B,\tilde{G}_i)=\varnothing$，则停止；根据定理 9.14，$G$ 是非平面图. 若存在一座桥 B，使得 $|F(B,\tilde{G}_i)|=1$，则令 $\{f\}=F(B,\tilde{G}_i)$. 否则，令 B 是任一桥且 f 是任一使得 $f\in F(B,\tilde{G}_i)$ 的面.

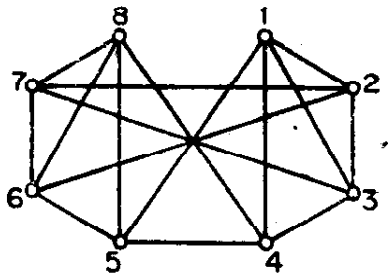
4. 选择一条连接 B 对于 G_i 的两个接触顶点的路 $P_i\subseteq B$. 置 $G_{i+1}=G_i\cup P_i$，并把 P_i 画在 $\tilde{G}_i$ 的面 f 内，得到 G_{i+1} 的一个平面嵌入 $\tilde{G}_{i+1}$. 用 $i+1$ 代替 i 并转到第 **2** 步.

为了说明这个算法，考察图 9.29 中的图 G. 从圈 $\tilde{G}_1=2345672$ 和 G 的一张桥的表开始(为了简洁起见，桥用其边集来表示)；在每一步中，对于 $|F(B,\tilde{G}_i)|=1$ 的桥 B 以粗体字标出. 这个例子，算法终止于 G 的一个平面嵌入 $\tilde{G}_9$. 所以 G 是平面图.

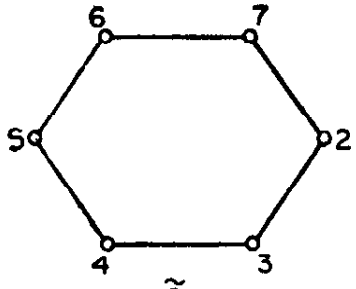
现在把这个算法应用于图 H，它是删去 G 中的边 45，添加边 36 而得的图(图 9.30). 从圈 23672 开始，以图 9.30 所示的顺序进行. 可以看出，作出图 H_3 之后，找到一座桥 $B=\{12,13,14,15,34,48,56,58,68,78\}$，使得 $F(B,\tilde{H}_3)=\varnothing$. 到此，算法停止(第 **3** 步)，并得出结论：H 是非平面图.

为了肯定上述算法的有效性，需要证明：若 G 是平面图，则序列 $\tilde{G}_1,\tilde{G}_2,\cdots,\tilde{G}_{\varepsilon-\nu+1}$ 的每一项都是 G 容许的. Demoucron, Malgrange 和 Pertuiset 用归纳法作了证明. 下面给出其证明要点.

假设 G 是平面图，显然 $\tilde{G}_1$ 是 G 容许的. 假定对于适合 $1\leqslant i\leqslant k<\varepsilon+\nu+1$ 的 i，$\tilde{G}_i$ 都是 G 容许的. 根据定义，存在 G 的一个平面嵌入 $\tilde{G}$，使得 $\tilde{G}_k\subset\tilde{G}$. 我们希望证明 $\tilde{G}_{k+1}$ 是 G 容许的. 设 B 和 f 为算法第三步所定义的桥和面. 若在 $\tilde{G}$ 中 B 只在 f 内画出，则 $\tilde{G}_{k+1}$ 显然是 G 容许的. 假定 G_k 没有桥可以只在 $\tilde{G}_k$ 的一个面内画出，并且假设在 $\tilde{G}$ 中 B 在某个另外的面 f' 内画出. 由于

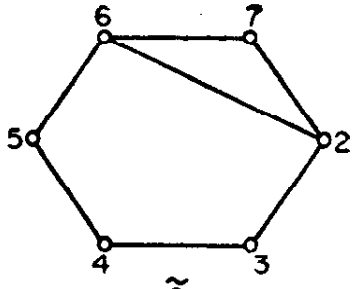


G



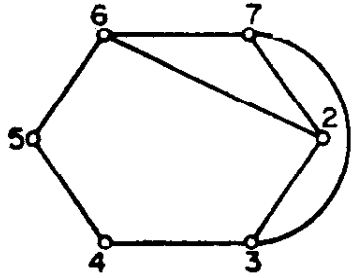
$\tilde{G}_1$

{12,13,14,15},{26}
{48,58,68,78},{37}



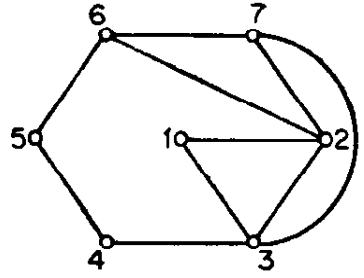
$\tilde{G}_2$

{12,13;14,15}
{48,58,68,78},{37}



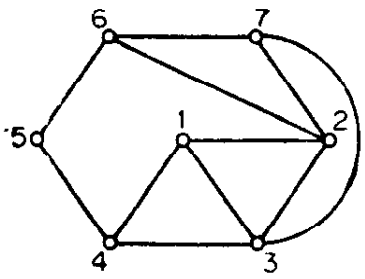
$\tilde{G}_3$

{12,13,14,15},
{48,58,68,78}



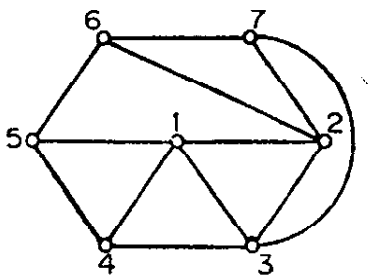
$\tilde{G}_4$

{14},{15},{48,58,68,78}



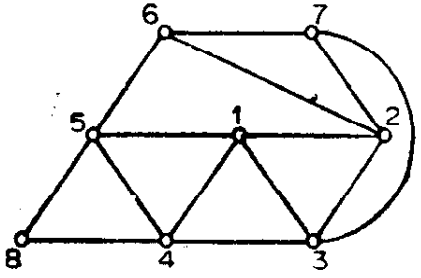
$\tilde{G}_5$

{15},{48,58,68,78}



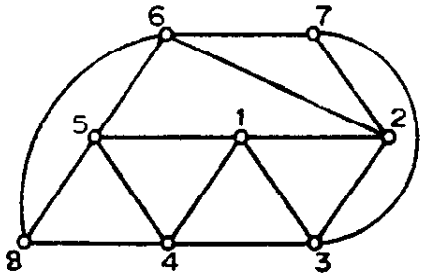
$\tilde{G}_6$

{48,58,68,78}



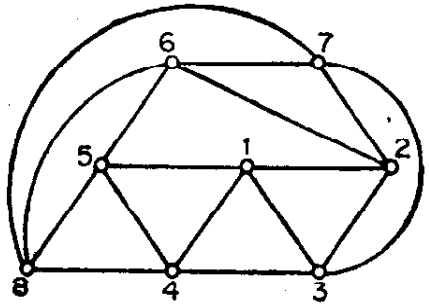
$\tilde{G}_7$

{68},{78}



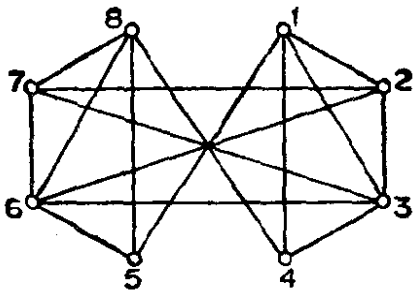
$\tilde{G}_8$

{78}

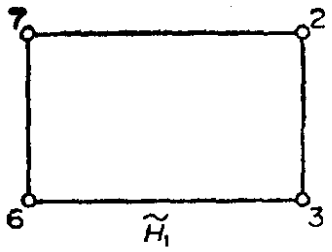


$\tilde{G}_9$

图 9.29



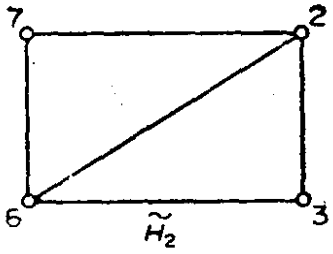
H



$\tilde{H}_1$

{26},{37}

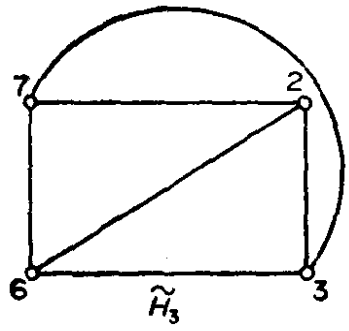
{12,13,14,15,34,48,56,58,68,78}



$\tilde{H}_2$

{37}

{12,13,14,15,34,48,56,58,68,78}



$\tilde{H}_3$

{12,13,14,15,34,48,56,58,68,78}

图 9.30

不存在恰好在一个面内可画出的桥，因此，若某一座桥的接触顶点限制在 f 和 f' 的公共边界上，而另一座桥没有这一性质，则前一座桥对后一座桥而言，决不会是偏斜的. 因而，可以越过 f 和 f' 的公共边界交换桥. 这样得到 G 的一个平面嵌入，其中 B 在 f 内画出. (见图9.31). 因此 $\tilde{G}_{k+1}$ 也是 G 容许的.

这个算法是一个好算法. 从框图 (图 9.32) 可看出，主要的运算包括:

(i) 找出块 G 中的一个圈 G_1;

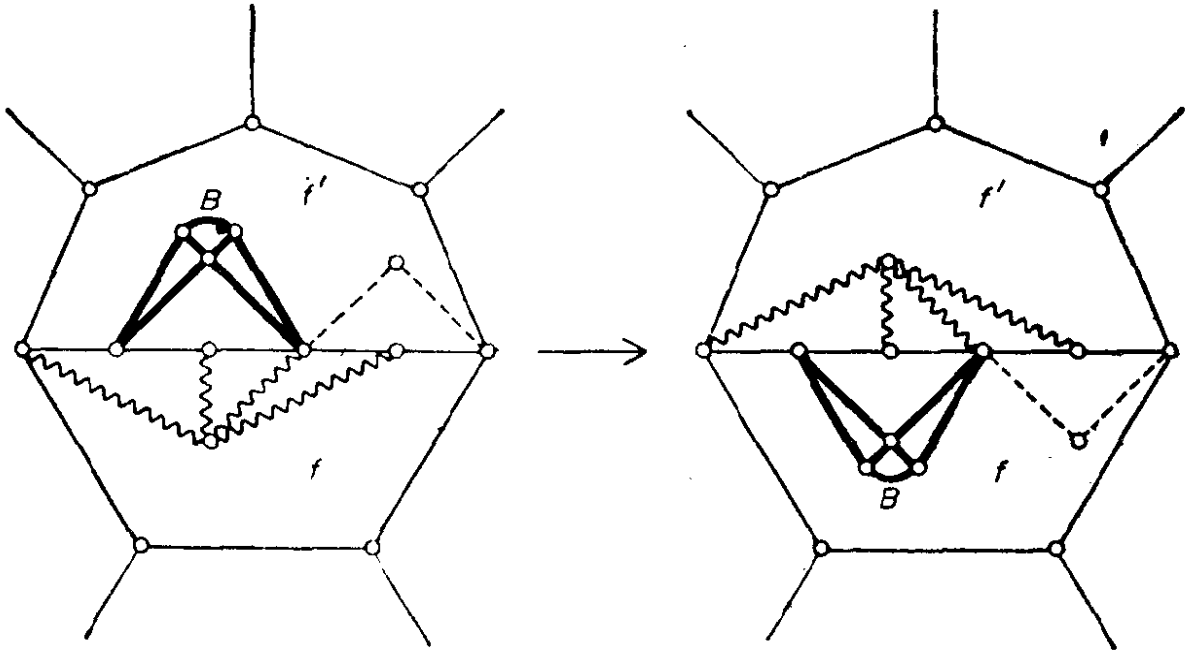


图 9.31

(ii) 确定 G 中 G_i 的桥以及它们对于 G_i 的接触顶点;

(iii) 对于 $\tilde{G}_i$ 的每个面 f 确定 $b(f)$;

(iv) 对于 $\tilde{G}_i$ 的每座桥 B 确定 $F(B, \tilde{G}_i)$;

(v) 在 G_i 的某座桥 B 中求 $V(B, G_i)$ 的两个顶点之间的一条路 P_i.

上述每一个运算都存在好算法;其细节留作习题.

比上述算法更精细的平面性算法,后来不断出现,例如可参看 Hopcroft 和 Tarjan (1974) 的著作.

习 题

9.8.1 应用上述算法证明 Petersen 图是非平面图.

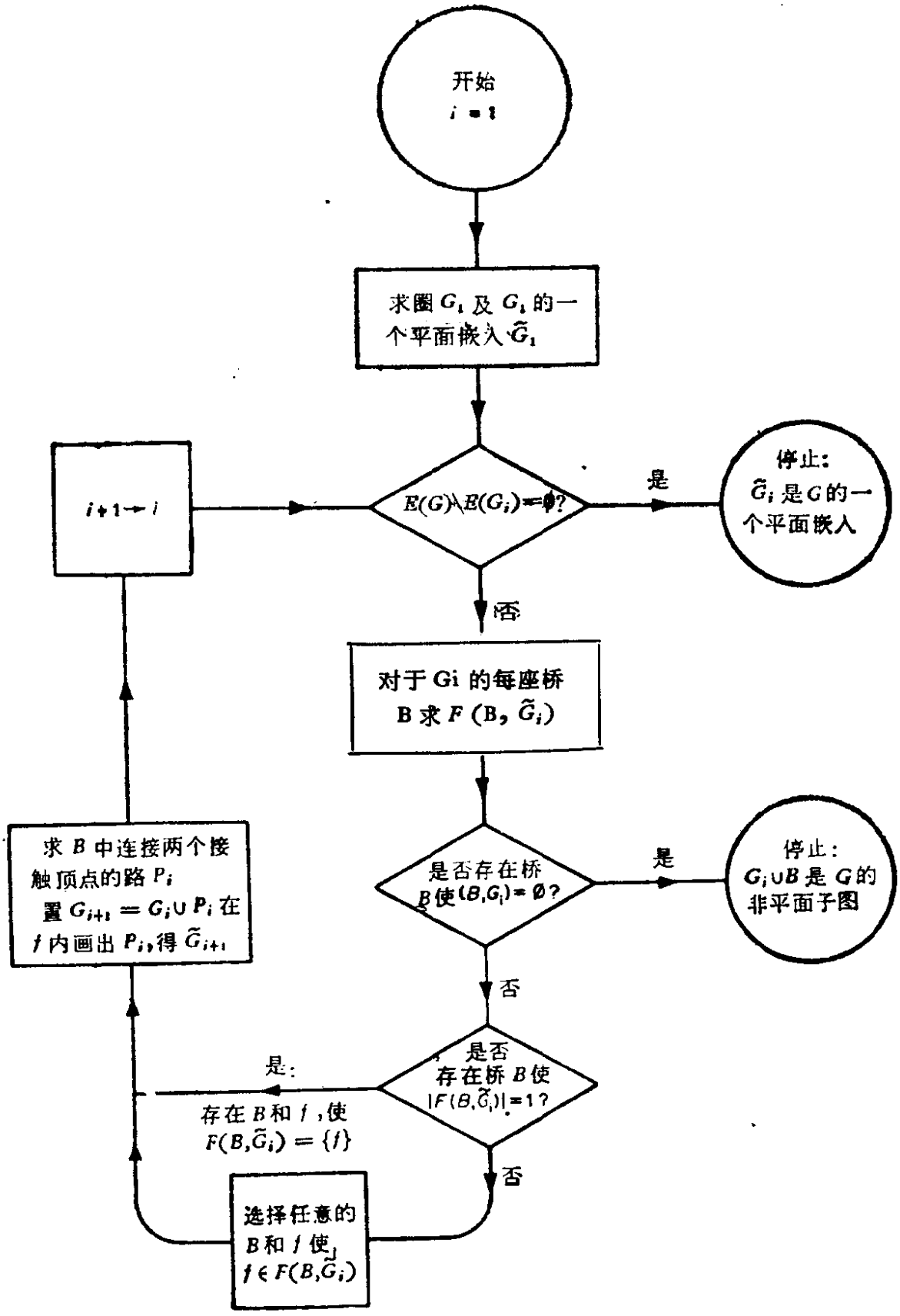

开始
$i=1$
求圈 G_1 及 G_1 的一个平面嵌入 $\tilde{G}_1$
$E(G)\setminus E(G_i)=\emptyset$?
是
停止：$\tilde{G}_i$ 是 G 的一个平面嵌入
否
$i+1\to i$
对于 Gi 的每座桥 B 求 $F(B,\tilde{G}_i)$
是否存在桥 B 使 $(B,G_i)=\emptyset$?
是
停止：$G_i\cup B$ 是 G 的非平面子图
否
求 B 中连接两个接触顶点的路 P_i
置 $G_{i+1}=G_i\cup P_i$ 在 f 内画出 P_i，得 $\tilde{G}_{i+1}$
是否存在桥 B 使 $|F(B,\tilde{G}_i)|=1$?
是：
存在 B 和 f，使 $F(B,\tilde{G}_i)=\{f\}$
否
选择任意的 B 和 f 使 $f\in F(B,\tilde{G}_i)$

图 9.32　平面性算法

參 考 文 献

Demoucron, G., Malgrange, Y. and Pertuiset, R. (1964). Graphes planaires: reconnaissance et construction de représentations planaires topologiques. *Rev. Francaise Recherche Opérationnelle,* **8**, 33—47

Dirac, G. A. and Schuster, S. (1954). A theorem of Kuratowski. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, **57**, 343—48

Fáry, I. (1948). On straight line representation of planar graphs. *Acta Sci. Math. Szeged,* **11**, 229—33

Fréchet, M. and Ky Fan (1967). *Initiation to Combinatorial Topology,* Prindle, Weber and Schmidt, Boston

Grinberg, È. Ja (1968). Plane homogeneous graphs of degree three without Hamiltonian circuits (Russian). *Latvian Math. Yearbook,* **4**, 51—58

Grötzsch, H. (1958). Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math-Nat. Reihe,* **9**, 109—19

Heawood, P. J. (1890). Map colour theorems. *Quart J. Math.*, **24**, 332—38

Hopcroft, J. E. and Tarjan, R. E. (1974). Efficient planarity testing. *J. Assoc. Comput. Math.*, **21**, 549—568

Kuratowski, C. (1930). Sur le probléme des courbes gauches en topologie *Fund. Math*, **15**, 271—83

Ore, O. (1967). *The Four-Color Problem,* Academic Press, New York

Tait, P. G. (1880). Remarks on colouring of maps. *Proc. Royal Soc. Edinburgh Ser. A.*, **10**, 729

Tutte, W. T. (1946). On Hamiltonian circuits, *J. London Math. Soc* **21**. 98—101

Tutte, W. T. (1956). A theorem on planar graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82**, 99—116

Wagner, K. (1937). Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Math Ann.*, **114**, 570—90

第十章 有 向 图

10.1 有向图

尽管很多问题本身能够自然地归结为图论形式，但是图的概念有时还是不十分适用的.例如在处理交通流问题时,必须知道网络中什么道路是单行道，什么方向上通行是允许的. 显然在这种情形下网络的图的概念是不够用的. 我们需要的是每个连杆都有指定方向的图——有方向的图. 在形式上，一个有方向的图D是指一个有序三元组 $(V(D), A(D), \phi_D)$，其中，$V(D)$ 是非空的顶点集,$A(D)$是不与 $V(D)$ 相交的弧集,而 ϕ_D 是关联函数,它使 D的每条弧对应于D的有序顶点对(不必相异). 若 a 是一条弧，而 u 和 v 是使得 $\phi_D(a)=(u, v)$ 的顶点，则称 a 为从 u 连接到 v;称 u 是 a 的尾，v 是 a 的头. 为方便起见，我们将把"有方向的图"简称为有向图. 称有向图 D' 是D的有向子图，如果 $V(D')\subseteq V(D)$，$A(D')\subseteq A(D)$ 并且 $\phi_{D'}$ 是 ϕ_D 在 $A(D')$ 上的限制. 关于有向子图的术语及记号与(无向)子图所使用的类似.

对应于每个有向图 D，可以在相同顶点集上作一个图 G，使得对于D的每条弧，G有一条有相同端点的边与之对应. 这个图称为D的基础图. 反之，给定任意图 G，对于它的每个连杆,给其

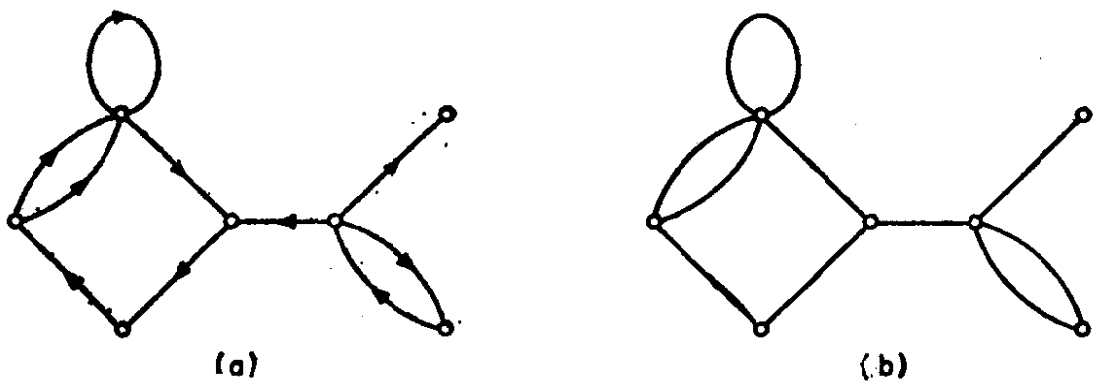


图 10.1 (a) 有向图 D; (b) D的基础图

端点指定一个顺序，从而确定一条弧，由此得到一个有向图．这样的有向图称为G的一个定向图．

和图一样，有向图也有简单的图形表示．一个有向图可以用它的基础图连同它的边上的箭头所组成的图形来表示，这里，每个箭头均指向对应弧的头．图10.1表示一个有向图和它的基础图．

图的每个概念可以自动地应用于有向图．于是，图10.1(a)的有向图是连通的，并且没有长为3的圈，因为它的基础图（图10.1(b)）具有这些性质．可是有许多涉及到方向的概念，这些概念仅仅适用于有向图．

D的有向途径是指一个有限非空序列：$W=(v_0, a_1, v_1, \cdots, a_k, v_k)$，它的各项交替地是顶点和弧，使得对于$i=1,2,\cdots,k$，弧$a_i$有头$v_i$和尾$v_{i-1}$．和图的途径一样，有向途径$(v_0, a_1, v_1, \cdots, a_k, v_k)$常常简单地用它的顶点序列$(v_0, v_1, \cdots, v_k)$来表示．有向迹是指本身是迹的有向途径；有向路，有向圈和有向环游可以类似地定义．

若D中存在有向(u, v)路，则顶点v称为在D中从顶点u出发可到达．称两个顶点在D中是双向连通的，如果它们互相可到达．和在图中连通的情形一样，双向连通在D的顶点集上也是一个等价关系．根据双向连通关系确定的$V(D)$的一个分类$(V_1, V_2, \cdots, V_m)$所导出的有向子图$D[V_1], D[V_2], \cdots, D[V_m]$，称为$D$的双向分支．有向图$D$称为双向连通的，如果它恰有一个双向分支．图10.2(a)的有向图不是双向连通的；它有如图10.2(b)

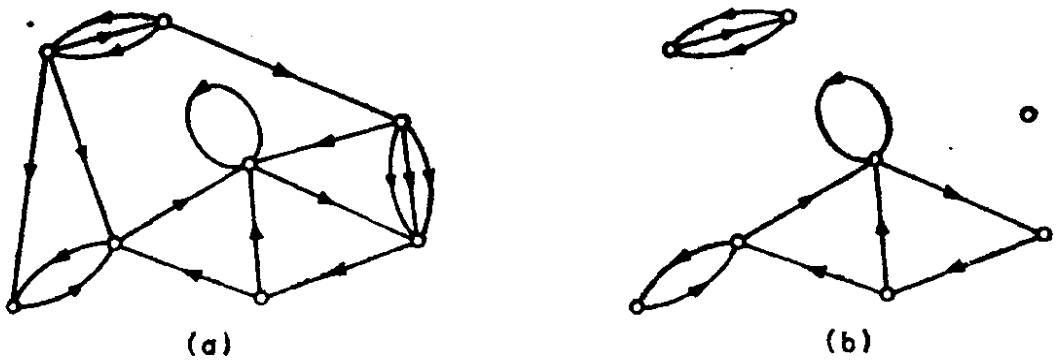


图10.2 (a) 有向图D；(b) D的三个双向分支

所示的三个双向分支.

D 中顶点 v 的入度 $d_D^-(v)$ 是指以 v 为头的弧的数目；v 的出度 $d_D^+(v)$ 是指以 v 为尾的弧的数目. 我们用 $\delta^-(D)$, $\Delta^-(D)$, $\delta^+(D)$ 和 $\Delta^+(D)$ 分别表示 D 中各顶点的最小和最大的入度和出度. 称一个有向图是严格的，如果它没有环，并且任何两条弧都不具有相同方向和相同端点.

整个这一章都用 D 表示有向图，而用 G 表示它的基础图. 这是一个有用的约定；例如，这样就可以用 V 表示 D 的顶点集（因为 $V = V(G)$），用 ν 和 ε 分别表示 D 中顶点和弧的数目. 和图一样，每当可能时我们从有关的记号中省去字母 D，例如，可以把 $A(D)$ 写成 A，把 $d_D^+(v)$ 写成 $d^+(v)$，把 $\delta^-(D)$ 写成 δ^-，等等.

习　　题

10.1.1　一个简单图 G 具有多少个定向图?

10.1.2　证明: $\sum_{v\in V} d^-(v) = \varepsilon = \sum_{v\in V} d^+(v)$

10.1.3　设 D 是没有有向圈的有向图.

(a) 证明: $\delta^- = 0$.

(b) 试证: 存在 V 的一个有序顶点列 $v_1, v_2, \cdots, v_\nu$ 使得，对于 $1 \leqslant i \leqslant \nu$，$D$ 的每条以 v_i 为头的弧在 $\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}\}$ 中都有它的尾.

10.1.4　证明: D 是双向连通的当且仅当 D 是连通的，并且 D 的每个块是双向连通的.

10.1.5　D 的逆图 $\overleftarrow{D}$ 是指在 D 中把每条弧的方向都颠倒过来得到的有向图.

(a) 证明:

(i) $\overleftarrow{\overleftarrow{D}} = D$;

(ii) $d_{\overleftarrow{D}}^+(v) = d_D^-(v)$;

(iii) v 在 $\overleftarrow{D}$ 中从 u 出发可到达当且仅当 u 在 D 中从 v 出发可到达.

(b) 利用 (a) 的 (ii)，从习题 10.1.3(a) 出发，试证: 若 D 是没有有向圈的有向图，则 $\delta^+ = 0$.

10.1.6　证明: 若 D 是严格的，则 D 包含长至少为 $\max\{\delta^-, \delta^+\}$ 的有向

路.

10.1.7 证明：若D是严格的，并且 $\max\{\delta^-, \delta^+\} = k > 0$，则$D$包含长至少为 $k+1$ 的有向圈.

10.1.8 设 $v_1, v_2, \cdots, v_\nu$ 是有向图D的顶点. D的邻接矩阵是指 $\nu \times \nu$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$，其中 a_{ij} 是D中以 v_i 为尾，以 v_j 为头的弧的数目. 证明：$\boldsymbol{A}^k$ 的第 (i, j) 元是D中长为 k 的有向 (v_i, v_j) 途径的数目.

10.1.9 设 $D_1, D_2, \cdots, D_m$ 是D的双向分支. D的凝聚图 $\hat{D}$ 是指一个有 m 个顶点 $w_1, w_2, \cdots, w_m$ 的有向图，$\hat{D}$ 中存在一条以 w_i 为尾以 w_j 为头的弧当且仅当D中存在一条尾在 D_i 中而头在 D_j 中的弧. 证明：D的凝聚图 $\hat{D}$ 不包含有向圈.

10.1.10 证明：G有一个定向图 D，使得对于所有 $v \in V$，$|d^+(v) - d^-(v)| \leqslant 1$ 成立.

10.2 有向路

有向图中，路和有向路的长之间不存在紧密的关系. 在图10.3的有向图中，这一点是清楚的，它没有长大于1的有向路.

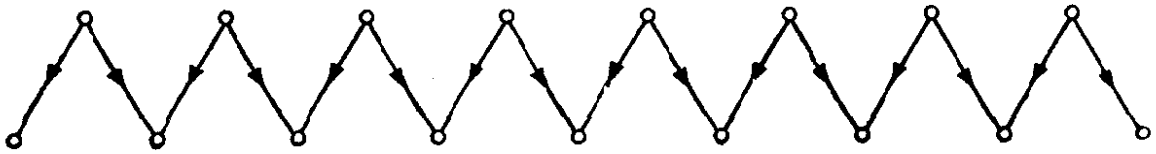


图 10.3

令人惊异的是，在有向图中，关于有向路的长的某些信息可以通过观察它的色数而得到. Roy (1967) 和 Gallai (1968) 的下述定理阐明了这一点.

定理 10.1 有向图D包含长为 $\chi - 1$ 的有向路.

证 设 A' 是D中使得 $D' = D - A'$ 不包含有向圈的极小弧集，并设 D' 中最长有向路的长为 k. 现在把颜色 $1, 2, \cdots, k+1$ 分配给 D' 的顶点：当 D' 中以 v 为起点的最长有向路的长是 $i-1$ 时，就给顶点 v 分配颜色 i. 用 V_i 表示颜色为 i 的顶点集. 我们将证明 $(V_1, V_2, \cdots, V_{k+1})$ 是D的正常 $(k+1)$ 顶点着色.

首先证明 D' 中任何有向路的起点和终点都有不同的颜色.因为,设 P 是 D' 中的一条长为正的有向 (u, v) 路，并假设 $v \in V_i$. 则在 D' 中存在一条有向路 $Q = (v_1, v_2, \cdots, v_i)$，这里 $v_1 = v$. 由于 D' 不包含有向圈，PQ 必然是一条以 u 为起点而长至少为 i 的有向路. 于是 $u \notin V_i$.

现在可以证明 D 的任意弧的端点都有不同颜色. 假设 $(u, v) \in A(D)$. 若 $(u, v) \in A(D')$，则 (u, v) 是 D' 中的有向路,因而 u 和 v 有不同的颜色. 否则 $(u, v) \in A'$. 由 A' 的极小性，$D' + (u, v)$ 必然包含一个有向圈 C. $C-(u, v)$ 是 D' 中的有向 (v, u) 路，因此,在这种情形下，u 和 v 也有不同的颜色.

于是，$(V_1, V_2, \cdots, V_{k+1})$ 是 D 的一个正常顶点着色. 由此推得 $\chi \leqslant k + 1$，所以 D 有长为 $k \geqslant \chi - 1$ 的有向路.

由于每个图 G 都有一个定向图,其最长有向路的长为 $\chi - 1$，所以在这个意义上说，定理 10.1 的结论是最佳可能的. 事实上，给定 G 的一个正常 χ 顶点着色 $(V_1, V_2, \cdots, V_\chi)$，如果 $u \in V_i$ 而 $v \in V_j$，且 $i < j$，就把边 uv 改为弧 (u, v)，得到 G 的一个定向图. 显然,在 G 的这个定向图中,任何有向路都不可能包含多于 χ 个的顶点,因为这种路的任何两个顶点都不可能有相同的颜色.

完全图的定向图称为竞赛图. 具有四个顶点的竞赛图如图 10.4 所示,其中每个竞赛图都可以看作是四个运动员在循环赛中竞赛的结果；例如，图 10.4 中第一个竞赛图表示一个运动员在所有三次竞赛中都获胜,而另外三个运动员每人各胜一次.

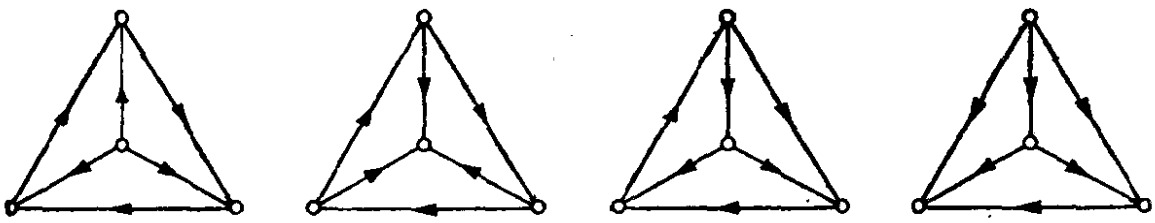


图 10.4 具有四个顶点的竞赛图

D 的有向 Hamilton 路是指包含 D 的每个顶点的有向路. 定理 10.1 的一个直接的推论是：每个竞赛图都有这种路. 这是

Rédei（1934）首先证明的.

推论 10.1 每个竞赛图都有有向 Hamilton 路.

证 若D是竞赛图，则 $\chi = \nu$.

关于竞赛图的另一个有趣的事实是：总存在一个顶点，从它出发，到每个别的顶点都最多两步即可到达. 我们将作为 Chvátal 和 Lovász（1974）定理的特殊情形来得到这一结论. D中顶点v的内邻点是指使得 $(u, v) \in A$ 的顶点 u；v的外邻点是使 $(v, w) \in A$ 的顶点 w. 我们分别用 $N_D^-(v)$ 和 $N_D^+(v)$ 表示D中v的内邻集和外邻集.

定理 10.2 无环有向图D总存在一个独立集 S，使得对于 D 的不在 S 中的每个顶点，从 S 的一个顶点出发通过长最多是 2 的有向路可到达.

证 对 ν 用归纳法. 对于 $\nu = 1$，定理显然正确. 假设对于顶点数小于 ν 的所有有向图定理是正确的，并设 v 是D的任一顶点. 由归纳法假设，在 $D' = D - (\{v\} \cup N^+(v))$ 中，存在一个独立集 S'，使得 D' 的不在 S' 中的每个顶点，从 S' 中的一个顶点出发通过长最多为 2 的有向路可到达. 若 v 是S'的某一顶点 u 的外邻点，则 $N^+(v)$ 的每个顶点，从 u 出发通过长为 2 的有向路可到达. 因此在这种情形中，$S = S'$，满足所要求的性质. 另一方面，若 v 不是 S' 的任何顶点的外邻点，则 v 不与 S' 的任何顶点相连，因而独立集 $S = S' \cup \{v\}$ 具有所要求的性质.

推论 10.2 竞赛图总包含这样一个顶点，使得每个别的顶点从它出发，通过长最多为 2 的有向路可到达.

证 若D是竞赛图，则 $\alpha = 1$.

习　　题

10.2.1 证明：每个竞赛图，或者是双向连通的，或者只通过一条弧的改向而转变为双向连通竞赛图.

10.2.2* 有向图D是单连的，是指对于任意两个顶点 u 和 v，或者 v 是从 u 出发可到达的，或者 u 是从 v 出发可到达的. 证明：D是单连的当且仅

当 D 有一条生成有向途径.

10.2.3 (a) 设 $P=(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ 是竞赛图 D 中的一条极大有向路. 假设 P 不是有向 Hamilton 路, 并设 v 是不在 P 上的任一顶点. 证明: 对于某个 i, (v_i, v) 和 (v, v_{i+1}) 都是 D 的弧.

(b) 证明 Rédei 定理.

10.2.4 通过考察最大出度的顶点来证明推论 10.2.

10.2.5* (a) 设 D 是 $\chi > mn$ 的有向图, 而 f 是定义在 V 上的一个实值函数. 证明: D 或者有一条适合 $f(u_0) \leqslant f(u_1) \leqslant \cdots \leqslant f(u_m)$ 的有向路 $(u_0, u_1, \cdots, u_m)$, 或者有一条适合 $f(v_0) > f(v_1) > \cdots > f(v_n)$ 的有向路 $(v_0, v_1, \cdots, v_n)$. (V. Chvátal 和 J. Komlós)

(b) 试证: 任意 $mn+1$ 个不同整数的序列, 或者包含一个 m 项的递增子序列, 或者包含一个 n 项的递减子序列.

(P. Erdös 和 G. Szekeres)

10.2.6 (a) 利用定理 10.1 和推论 8.1.2 证明: G 有一个定向图, 其中每条有向路之长最多是 Δ.

(b) 给出(a)的构造性证明.

10.3 有向圈

推论 10.1 告诉我们, 每个竞赛图都包含有向 Hamilton 路. 然而, 如果竞赛图是双向连通的, 则可以得出更强的结论. 下面的定理是 Moon (1966) 得到的. 若 S 和 T 是 V 的两个子集, 则 D 中尾在 S 内而头在 T 内的所有弧的集记为 (S, T).

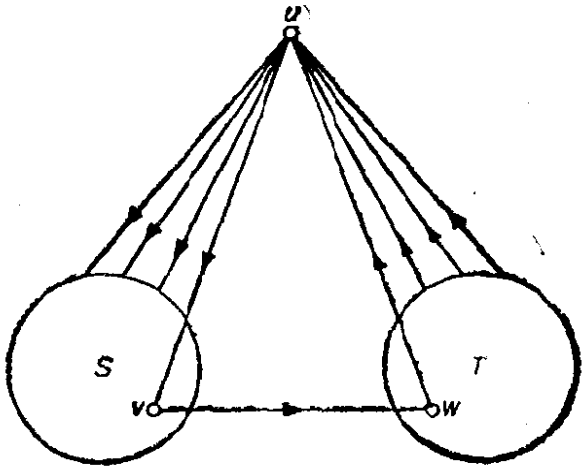


图 10.5

定理 10.3 $v \geqslant 3$ 的双向连通竞赛图 D 的每个顶点都包含在有向 k 圈中，$3 \leqslant k \leqslant v$.

证 设 D 是 $v \geqslant 3$ 的双向连通竞赛图，并设 u 是 D 的任一顶点. 置 $S = N^+(u)$ 以及 $T = N^-(u)$. 我们首先证明 u 在有向 3 圈中. 由于 D 是双向连通的，S 和 T 都不空；并且，由于同样的理由，(S, T) 也必然是非空的(见图 10.5). 于是，在 D 中存在一条弧 (v, w)，使得 $v \in S$ 且 $w \in T$，因而 u 在有向 3 圈 (u, v, w, u) 中.

现在对 k 用归纳法来证此定理. 假设 u 在所有长为 3 和 n 之间的有向圈中，这里 $n < v$. 我们将证明 u 也在有向 $(n+1)$ 圈中.

设 $C = (v_0, v_1, \cdots, v_n)$ 是有向 n 圈，其中 $v_0 = v_n = u$. 若 $V(D)\backslash V(C)$ 中存在一个顶点 v，它既是尾在 C 中的一条弧的头，又是头在 C 中的一条弧的尾，则 C 中存在相邻的顶点 v_i 和 v_{i+1}，使得 (v_i, v) 和 (v, v_{i+1}) 都是 D 的弧. 在这一情形中，u 在有向 $(n+1)$ 圈 $(v_0, v_1, \cdots, v_i, v, v_{i+1}, \cdots, v_n)$ 中.

否则，用 S 表示 $V(D)\backslash V(C)$ 中所有和 C 相连的弧的头的集，而用 T 表示 $V(D)\backslash V(C)$ 中所有和 C 相连的弧的尾的集(见图 10.6).

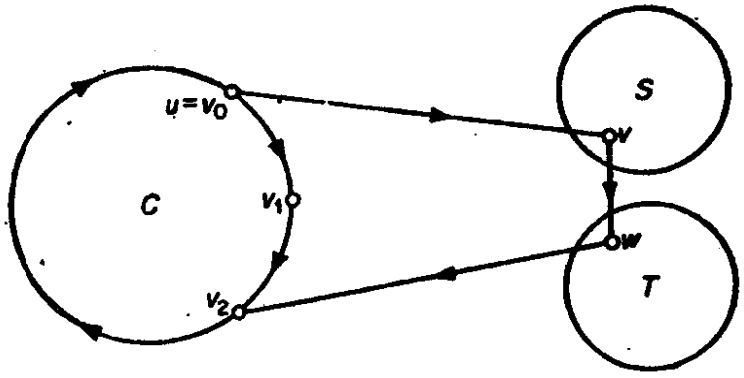


图 10.6

和前面一样，由于 D 是双向连通的，S, T 和 (S, T) 都是非空的，而且在 D 中存在一条弧 (v, w)，使得 $v \in S$ 而 $w \in T$. 因此，u 在有向 $(n+1)$ 圈 $(v_0, v, w, v_2, \cdots, v_n)$ 中

D的有向 Hamilton 圈是指包含D的每个顶点的有向圈. 从定理 10.3 推得: 每个双向连通竞赛图都包含这种圈(它是由 Camion (1959) 首先证明的). 下面的定理把 Dirac 定理 (4.3) 扩展到有向图. 它是 Ghouila-Houri 定理 (1960)的特殊情形.

定理 10.4 若D是严格的, 并且 $\min\{\delta^-, \delta^+\} \geqslant \nu/2 > 1$, 则$D$包含有向 Hamilton 圈.

证 假设D满足定理的条件,但不包含有向 Hamilton 圈. 用 l 表示D中最长有向圈的长,并设 $C = (v_1, v_2, \cdots, v_l, v_1)$ 是D中长为 l 的有向圈. 注意 $l > \nu/2$ (习题 10.1.7). 设 P 是 $D - V(C)$ 中一条最长的有向路, 并设 P 的起点为 u, 终点为 v, 长为 m(见图 10.7). 显然

$$\nu \geqslant l + m + 1 \tag{10.1}$$

由于 $l > \nu/2$, 所以

$$m < \nu/2 \tag{10.2}$$

置

$$S = \{i \mid (v_{i-1}, u) \in A\}$$
$$T = \{i \mid (v, v_i) \in A\}$$

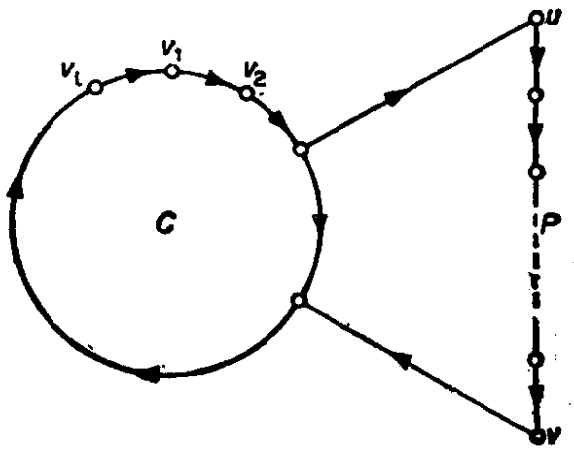


图 10.7

我们首先证明: S和T不相交. 设$C_{j,k}$表示C中起点为v_j而终点为 v_k的节. 若某一整数 i 同时在S和T中,则D将包含长为 $l + m + 1$的有向圈 $C_{i,i-1}(v_{i-1}, u)P(v, v_i)$, 这与$C$的选择相矛盾. 因此

$$S \cap T = \varnothing \tag{10.3}$$

因为 P 是 $D - V(C)$ 中最长的有向路，所以 $N^-(u) \subseteq V(P) \cup V(C)$. 但是 C 中 u 的内邻点的数目恰好是 $|S|$，因此 $d_D^-(u) = d_P^-(u) + |S|$. 由于 $d_D^-(u) \geqslant \delta^- \geqslant \nu/2$ 以及 $d_P^-(u) \leqslant m$，所以

$$|S| \geqslant \nu/2 - m \tag{10.4}$$

类似的论证推出

$$|T| \geqslant \nu/2 - m \tag{10.5}$$

注意，根据(10.2)式，S 和 T 都是非空的. 把(10.4)式和(10.5)式相加，并利用(10.1)式，得

$$|S| + |T| \geqslant l - m + 1$$

因此，由(10.3)式得

$$|S \cup T| \geqslant l - m + 1 \tag{10.6}$$

由于 S 和 T 不相交，又都是非空的，所以存在整数 i 和 k，使得 $i \in S$，$i + k \in T$，而且

$$i + j \notin S \cup T, \text{ 对于 } 1 \leqslant j < k \text{ 成立} \tag{10.7}$$

这里加法是模 l 的加法.

从(10.6)式和(10.7)式，我们看到：$k \leqslant m$. 于是长为 $l + m + 1 - k$ 的有向圈 $C_{i+k,i-1}(v_{i-1}, u)P(v, v_{i+k})$ 比 C 长. 由这个矛盾推得定理.

习　　题

10.3.1　说明怎样从定理 10.4 推出定理 4.3.

10.3.2　D 的有向 Euler 环游是指通过 D 的每条弧恰好一次的有向环游. 证明：D 包含有向 Euler 环游当且仅当 D 是连通的，并且对所有 $v \in V$，有 $d^+(v) = d^-(v)$.

10.3.3　设 D 是有向图，适合：

(i) $d^+(x) - d^-(x) = l = d^-(y) - d^+(y)$;

(ii) $d^+(v) = d^-(v)$，对 $v \in V \backslash \{x, y\}$ 成立.

利用习题 10.3.2 证明：D 中存在 l 条弧不重的有向 (x, y) 路.

10.3.4* 证明：包含奇圈的双向连通有向图也包含有向奇圈.

10.3.5　称非平凡有向图 D 是 k 弧连通的，如果对 V 的每个非空真子集 S，

都有 $|(S,\bar{S})| \geqslant k$. 证明：非平凡有向图是双向连通的当且仅当它是1弧连通的。

10.3.6 图 G 的伴随有向图 $D(G)$ 是指把 G 的每条边 e 都用两条相反方向而和 e 有相同端点的弧代替所得到的有向图。证明：

(a) 存在 G 中的路和 $D(G)$ 中的有向路之间的一一对应；

(b) $D(G)$ 是 k 弧连通的当且仅当 G 是 k 边连通的。

应　　用

10.4 工件排序问题

设某台机器必须加工多种工件 $J_1, J_2, \cdots, J_n$；例如，在玻璃工厂中，每个 J_i 可以是一类瓶或缸。在一种工件加工完毕之后，为了加工下一种工件，机器必须进行调整。如果从工件 J_i 到工件 J_j 的调整时间是 t_{ij}，求这些工件的一个排序，使整个机器的调整时间最少。

这个问题显然与旅行售货员问题有关，关于它的求解，现在还没有已知的有效方法。所以希望有一个方法来得到一个相当好的解(未必是最优解)。我们的方法用到 Rédei 定理(推论 10.1)。

第一步　构作具有顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的有向图 D，使得 $(v_i, v_j) \in A$ 当且仅当 $t_{ij} \leqslant t_{ji}$。根据定义，D 包含生成竞赛图。

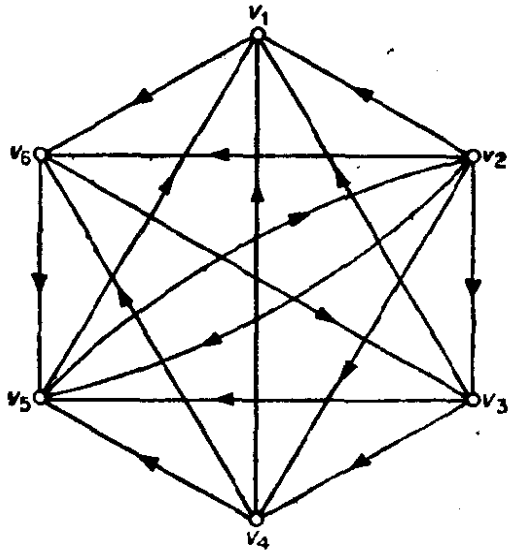


图 10.8

第二步　求D的有向 Hamilton 路$(v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_n})$(习题 10.4.1)，并且把工件相应地排列好.

由于第一步丢掉了调整矩阵$[t_{ij}]$的一大半，所以可以合理地推测：一般说来，这个方法将产生相当好的工件序列. 然而，值得注意的是，当调整矩阵对称时，这个方法没有任何帮助.

作为一个例子，假设存在六个工件J_1, J_2, J_3, J_4, J_5和J_6，并且调整矩阵是

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
J_1	0	5	3	4	2	1
J_2	1	0	1	2	3	2
J_3	2	5	0	1	2	3
J_4	1	4	4	0	1	2
J_5	1	3	4	5	0	5
J_6	4	4	2	3	1	0

序列$J_1 \to J_2 \to J_3 \to J_4 \to J_5 \to J_6$的调整时间需要13个单位. 为了找出一个较好的序列，按第一步构作有向图D(图 10.8).

$(v_1, v_6, v_3, v_4, v_5, v_2)$是$D$的有向 Hamilton 路，因而产生序列

$$J_1 \to J_6 \to J_3 \to J_4 \to J_5 \to J_2,$$

它的调整时间只需要 8 个单位. 注意相反的序列

$$J_2 \to J_5 \to J_4 \to J_3 \to J_6 \to J_1$$

是很差的，其调整时间需要 19 个单位.

习　　题

10.4.1　借助于习题 10.2.3，叙述一个在竞赛图中求有向 Hamilton 路的好算法.

10.4.2　举例说明，利用上面的方法所得到的工件排序可能与最优解相差甚远.

10.5　高效率计算机鼓轮的设计

旋转鼓轮的位置是借助于鼓轮表面上的一系列电触点所产生

的二元信号来识别的．这个表面分成 2^n 段，每段由绝缘体或者由导体材料组成．绝缘段给出信号 0(没有电流)，导通段给出信号 1(有电流)．例如，在图 10.9 中，鼓轮的位置由四个触点给出读数 0010．如果鼓轮沿顺时针方向旋转一段，读数将是 1001．因为给出不同的读数，所以这两个位置可以区别开来．可是进一步旋转两段，将得到具有读数 0010 的另一个位置，这一位置无法与初始位置区别开来．

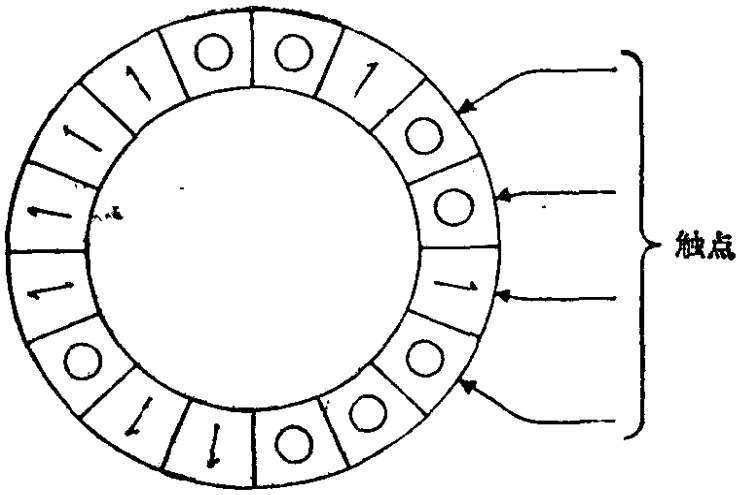
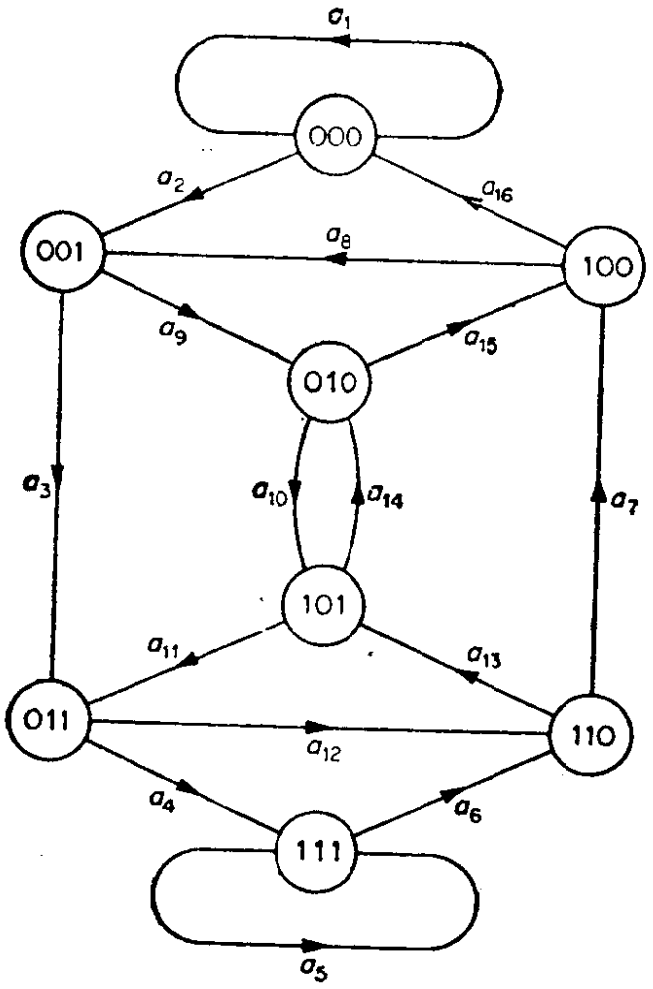


图 10.9　计算机鼓轮

我们希望设计这样的鼓轮表面，使鼓轮的 2^n 个不同的位置能够由相继位于鼓轮周围的 k 个触点区别开来，并且希望数 k 尽可能地小．怎样才能实现这一点呢?

首先注意，k 个触点产生 k 位数字的二进数，并且有 2^k 个这样的数．所以，若所有 2^n 个位置都给以不同的读数，则必须有 $2^k \geqslant 2^n$，即 $k \geqslant n$．我们将证明：n 个触点足以区分所有 2^n 个位置，鼓轮表面可以据此设计出来．

我们定义一个有向图 D_n 如下：D_n 的顶点是 $(n-1)$ 位数字的二进数 $p_1p_2\cdots p_{n-1}$，其中 $p_i = 0$ 或 1．存在一条以 $p_1p_2\cdots p_{n-1}$ 为尾而以 $q_1q_2\cdots q_{n-1}$ 为头的弧当且仅当 $p_{i+1} = q_i$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant n-2$ 成立．换言之，所有的弧都具有 $(p_1p_2\cdots p_{n-1}, p_2p_3\cdots p_n)$ 的形式．另外，D_n 的每条弧 $(p_1p_2\cdots p_{n-1}, p_2p_3\cdots p_n)$ 都分配以标



弧	标号
a_1	0000
a_2	0001
a_3	0011
a_4	0111
a_5	1111
a_6	1110
a_7	1100
a_8	1001
a_9	0010
a_{10}	0101
a_{11}	1011
a_{12}	0110
a_{13}	1101
a_{14}	1010
a_{15}	0100
a_{16}	1000

图 10.10

号 $p_1p_2\cdots p_n$. D_4 如图 10.10 所示.

显然，D_n 是连通的，并且 D_n 的每个顶点都具有入度 2 和出

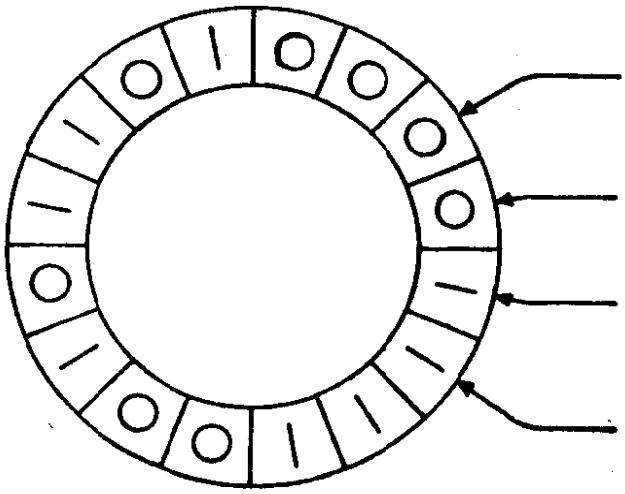


图 10.11

度 2．所以（习题 10.3.2）D_n 有一条有向 Eu'er 环游．这条有向 Euler 环游看作 D_n 的弧的序列，产生一个长为 2^n 的，和鼓轮表面的设计要求相符合的二元序列．

例如，图 10.10 的有向图 D_4 有有向 Euler 环游 $(a_1, a_2, \cdots, a_{16})$，它给出 16 位数字的二元序列 0000111100101101．（恰好给出 a_i 的标号的第 1 位数字．）用这个序列构成的鼓轮如图 10.11 所示．

有向 Euler 环游的这一应用是由 Good（1946）提出的．

习　　题

10.5.1　求一个由七个 0 和七个 1 所组成的循环序列，使得除去 0000 和 1111 以外的所有 4 位数字的二进数都作为这个序列的块而出现．

10.5.2　设 S 是 n 个字母的字母表．证明：存在一个包含每个字母的 n^3 个拷贝的循环序列，使得由 S 的字母形成的每 4 个字母所组成的一个“字”都作为这个序列的一个块而出现．

10.6　单行道路系统的构造[1)]

给定一个道路系统，怎样把它改成单行道路系统，而使交通尽可能畅通？

这显然是关于图的定向问题．例如，考察图 10.12(a) 和 10.12(b) 中代表道路网络的两个图．

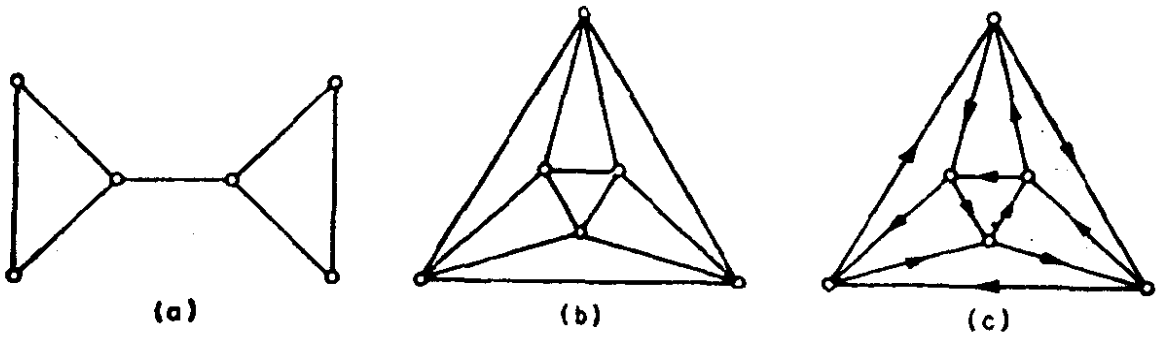


图 10.12　(a) G_1；　(b) G_2；　(c) D_2

1）原标题是“使一个道路系统单行化”．——译者注

不论怎样给 G_1 定向，所得的定向图都不会是双向连通的——这个系统中交通不可能畅通．麻烦在于 G_1 有割边．另一方面，G_2 有“均衡的”定向图 D_2（图 10.12(c)），其中每个顶点从任何别的顶点出发都是最多二步可到达的；特别地，D_2 是双向连通的．

当然，G 有双向连通定向图的必要条件为 G 是 2 边连通的．Robbins（1939）证明这个条件也是充分的．

定理 10.5 若 G 是 2 边连通的，则 G 有双向连通的定向图．

证 设 G 是 2 边连通的．则 G 包含一个圈 G_1．我们归纳地定义 G 的连通子图序列 $G_1, G_2, \cdots$ 如下：若 G_i $(i = 1, 2, \cdots)$ 不是 G 的生成子图，设 v_i 是在 G 中而不在 G_i 中的顶点．则（习题 3.2.1）存在从 v_i 到 G_i 的边不重路 P_i 和 Q_i．定义

$$G_{i+1} = G_i \cup P_i \cup Q_i.$$

由于 $v(G_{i+1}) > v(G_i)$，这个序列必然终止于 G 的一个生成子图 G_n．

现在给 G_n 定向，使得：G_1 成为有向圈，每条路 P_i 成为以 v_i 为起点的有向路，并且每条路 Q_i 成为以 v_i 为终点的有向路．显然每个 G_i，特别是 G_n，因此而变成双向连通的定向图．由于 G_n 是 G 的生成子图，所以 G 也就有双向连通的定向图．

Nash-Williams（1960）通过证明每个 $2k$ 边连通图 G 都有 k 弧连通的定向图而推广了 Robbins 定理．尽管这个定理的证明是困难的，但对 G 有 Euler 迹的特殊情形，这个定理有一个简单的证明．

定理 10.6 设 G 是有 Euler 迹的 $2k$ 边连通图．则 G 有 k 弧连通的定向图．

证 设 $v_0e_1v_1\cdots e_\varepsilon v_\varepsilon$ 是 G 的一条 Euler 迹．把以 v_{i-1} 和 v_i 为端点的边 e_i 改为以 v_{i-1} 为尾而以 v_i 为头的弧 a_i，$1 \leqslant i \leqslant \varepsilon$，就得到 G 的一个定向图．现在设 $[S, \bar{S}]$ 是 G 的一个 m 边割．有向迹 $(v_0, a_1, v_1, \cdots, a_\varepsilon, v_\varepsilon)$ 从 S 到 $\bar{S}$ 的横跨次数和它从 $\bar{S}$ 到 S 的横跨次数相差最多为 1．由于它含有 D 的所有弧，所以 $(S, \bar{S})$ 和 $(\bar{S}, S)$ 必然都至少包含 $[m/2]$ 条弧．定理得证．

习　　题

10.6.1　通过考察 Petersen 图，证明下述语句是错误的：每个图 G 都有一个定向图，使得对每个 $S\subseteq V$，$(S,\bar{S})$ 和 $(\bar{S},S)$ 的弧数相差最多为 1.

10.6.2　(a) 证明 Nash-Williams 定理等价于下述语句：若 G 的每个键至少有 $2k$ 条边，则存在 G 的一个定向图，其中每个键在每个方向上都至少有 k 条弧.

(b) 通过考察 Grötzsch 图（图 8.2），证明：与 Nash-Williams 定理相似的下述语句是错误的：若 G 的每个圈至少有 $2k$ 条边，则存在 G 的一个定向图，其中每个圈在每个方向上都至少有 k 条弧.

10.7　竞赛参加者名次的排列

在一场网球竞赛中，若干选手两两互相竞赛. 得出竞赛成绩后，应该怎样排参加者的名次呢？

例如，考察图 10.13 中的竞赛图，它代表六个选手之间的一场竞赛结果；我们看到选手 1 打败选手 2，4，5 和 6，而输给选手 3，等等.

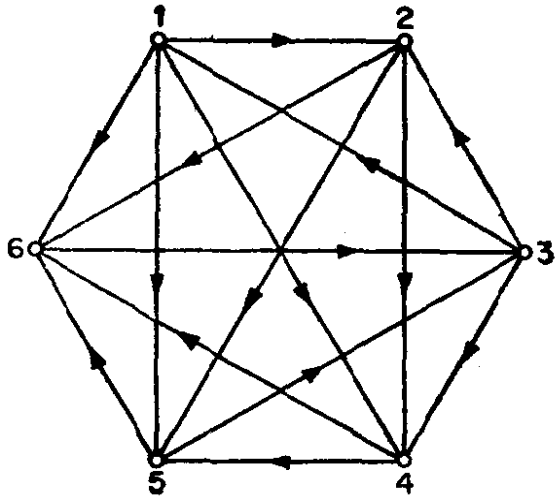


图　10.13

排参加者名次的一个可能的办法是寻找这个竞赛图中的一条有向 Hamilton 路（根据推论 10.1，这样的路是存在的），然后按照参加者对应的顶点在这条路中的位置排列名次. 例如，有向 Hamilton 路 (3, 1, 2, 4, 5, 6) 表明选手 3 是冠军，选手 1 是亚军，等

等．可是这种排名次的方法经不起进一步的推敲，因为一个竞赛图一般有许多条有向 Hamilton 路;我们的例子中就有 (1, 2, 4, 5, 6,3)，(1, 4, 6, 3, 2, 5) 以及若干别的有向 Hamilton 路．

另一个办法是计算得分（每个选手得胜的竞赛次数)，并比较它们．在上面的例子中这样做,得到得分向量

$$s_1 = (4, 3, 3, 2, 2, 1)$$

这里有一个缺陷，即这个得分向量不能区别选手 2 和选手 3 的高低，尽管选手 3 打败了得分较高的选手．于是我们导出第二级得分向量

$$s_2 = (8, 5, 9, 3, 4, 3)$$

其中每个选手的第二级得分是被他打败的选手的得分之和．现在选手 3 名列第一．继续这个程序,得到进一步的向量:

$$s_3 = (15, 10, 16, 7, 12, 9)$$

$$s_4 = (38, 28, 32, 21, 25, 16)$$

$$s_5 = (90, 62, 87, 41, 48, 32)$$

$$s_6 = (183, 121, 193, 80, 119, 87)$$

看来选手名次的排列有点波动，例如选手 3 和选手 1 竞争第一名的情况就是这样．但是，我们将证明，当问题中的竞赛图是双向连通的,并且至少有四个顶点时,这个程序总是收敛于一个固定的排列．这将导出在任何竞赛中排选手名次的一个方法．

在双向连通有向图 D 中,最短有向 (u, v) 路的长用 $\vec{d}_D(u, v)$ 表示,并称为从 u 到 v 的距离;D 的有向直径是从 D 的任一顶点到任何别的顶点的最大距离．

定理 10.7 设 D 是 $v \geqslant 5$ 的一个双向连通竞赛图,并设 $\boldsymbol{A}$ 是 D 的邻接矩阵．则 $\boldsymbol{A}^{d+3} > \boldsymbol{0}$（每个元素都是正的)，这里 d 是 D 的有向直径．

证 由于 $\boldsymbol{A}^k$ 的第 (i, j) 元素恰好是 D 中长为 k 的有向 (v_i, v_j) 途径的数目（习题 10.1.8),所以必须证明：对于任意两个顶点 v_i 和 v_j（可能重合),均存在长为 $d + 3$ 的有向 (v_i, v_j) 途径．

设 $d_{ij} = \vec{d}(v_i, v_j)$．则 $0 \leqslant d_{ij} \leqslant d \leqslant v - 1$，因而

$$3 \leqslant d - d_{ij} + 3 \leqslant \nu + 2$$

若 $d - d_{ij} + 3 \leqslant \nu$，则根据定理 10.3，存在一条包含 v_j 的有向 $(d - d_{ij} + 3)$ 圈 C. 一条长为 d_{ij} 的有向 (v_i, v_j) 路 P 和有向圈 C 一起构成一条长为 $d + 3$ 的有向 (v_i, v_j) 途径，这正是我们所要证的.

还有两个特殊情形. 若 $d - d_{ij} + 3 = \nu + 1$，则 P 接一个过 v_j 的有向$(\nu - 2)$圈，再接一个过 v_j 的有向 3 圈，合起来组成一条长为 $d + 3$ 的有向 (v_i, v_j) 途径(由于 $\nu \geqslant 5$，所以$(\nu - 2)$圈是存在的)；若 $d - d_{ij} + 3 = \nu + 2$，则 P 接一个过 v_j 的有向 $(\nu - 1)$ 圈，再接一个过 v_j 的有向 3 圈，就组成这样的一条途径.

若对某一 k，$\boldsymbol{R}^k > \boldsymbol{0}$，则称实数矩阵 $\boldsymbol{R}$ 是本原的.

推论 10.7 竞赛图 D 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是本原的当且仅当 D 是双向连通的并且 $\nu \geqslant 4$.

证 若 D 不是双向连通的，则 D 中存在顶点 v_i 和 v_j，使得 v_j 从 v_i 出发是不可到达的. 于是 D 中就不存在有向 (v_i, v_j) 途径. 由此推出，对所有的 k，$\boldsymbol{A}^k$ 的第(i, j)元素均是零，因此 $\boldsymbol{A}$ 不是本原的.

反之，假设 D 是双向连通的. 若 $\nu \geqslant 5$，则由定理 10.7 得 $\boldsymbol{A}^{d+3} > 0$，因而 $\boldsymbol{A}$ 是本原的.另外，恰好存在一个三个顶点的双向连通竞赛图(图 10.14(a))，也恰好存在一个四个顶点的双向连通

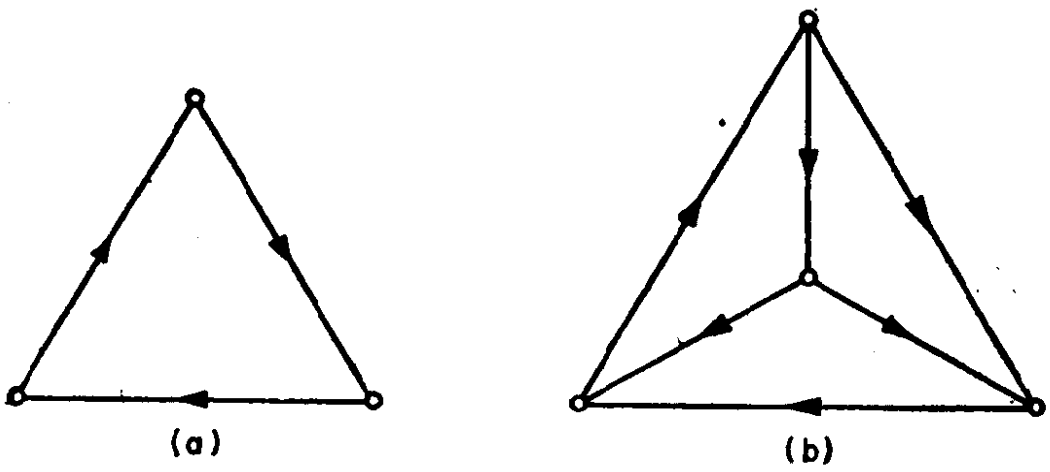


图 10.14

竞赛图(图 10.14(b))．不难验证三个顶点的这个竞赛图的邻接矩阵不是本原的，也可以证明四个顶点的这个竞赛图的邻接矩阵的第九次幂有全部正的元素．

现在回到得分向量．我们看到竞赛图 D 的第 i 级得分向量由

$$\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{A}^i\boldsymbol{J}$$

给出，这里 $\boldsymbol{A}$ 是 D 的邻接矩阵，$\boldsymbol{J}$ 是由 1 组成的列向量．若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是本原的，则根据 Perron-Frobenius 定理(见 Gantmacher, 1960)，$\boldsymbol{A}$ 的具有最大绝对值的特征值是正实数 r，并且还有

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{A}}{r}\right)^i\boldsymbol{J} = \boldsymbol{s}$$

这里 $\boldsymbol{s}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 r 的正特征向量．所以根据推论 10.7，若 D 是至少有四个顶点的双向连通竞赛图，则正规化向量 $\boldsymbol{s}$(各元素之和为 1)可以取为 D 中表示各选手相对实力的向量．在图 10.13 的例子中，我们求得(近似地)

$$r = 2.232 \text{ 和 } \boldsymbol{s} = (.238, .164, .231, .113, .150, .104).$$

于是，用这个方法给出的选手的名次排列是 1, 3, 2, 5; 4, 6.

若竞赛图不是双向连通的，则(习题 10.1.9 和 10.1.3(b)) 它的各个双向分支可以按优胜次序线性排列．于是在循环赛中的参加者可以按下列程序排出名次：

第一步　在四个或者更多个顶点的各个双向分支中，利用特征向量 $\boldsymbol{s}$ 排选手的名次；在三个顶点的双向分支中，三个选手的名次全都相同．

第二步　把这些双向分支按优胜次序线性排列成 $D_1, D_2, \cdots, D_m$，即：若 $i < j$，则凡是一个端点在 D_i 中，另一个端点在 D_j 中的每条弧，其头都在 D_j 中．

这个排名次的方法是由 Wei (1952) 和 Kendell (1955) 提出的．其他排名次的程序见 Moon 和 Pullman (1970) 的著作．

习　　题

10.7.1　把 10.7 节中叙述的排名次方法应用于：

(a) 图 10.4 中表示的四个竞赛图;

(b) 具有下述邻接矩阵的竞赛图:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
A	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0
E	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
G	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
H	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
I	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
J	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0

10.7.2 可供选择的排名次的另一方法是考察"失分向量"以代替得分向量.

(a) 证明: 这相当于排把各弧反向后所得的逆竞赛图的名次,然后把所得名次倒过来,即为所要求的名次排列.

(b) 通过考察四个顶点的双向连通竞赛图,证明排名次的这两种方法不一定产生相同的结果.

参 考 文 献

Camion, P. (1959). Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **249,** 2151—52

Chvátal. V. and Lovász, L. (1974). Every directed graph has a semi-kernel, in *Hypergraph Seminar* (eds. C. Berge and D. K. Ray-Chaudhuri), Springer-Vevlag, New York, p. 175

Gallai, T. (1968). On directed paths and circuits, in *Theory of Graphs* (eds. P. Frdös and G. Katona), Academic Press, New York, pp. 115—18

Gantmacher, F. R. (1960). *Theory of Matrices,* Chelsea, New York

Ghouila-Houri, A. (1960). Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **251,** 495—97

Good, I. J. (1946). Normal recurring decimals. *J. London Math. Soc.* **21,** 167—72

Kendall, M. G. (1955). Further contributions to the theory of paired comparisons. *Biometrics,* **11,** 43—62

Moon, J. W. (1966). On subtournaments of a tournament. *Canad. Math Bull.* **9**, 297—301

Moon, J. W. and Pullman, N. J. (1970). On generalised tournament matrices. *SIAM Rev.* **12**, 384—399

Nash-Williams, C. St. J. A. (1960). On orientations, connectivity and odd-vertex pairings in finite graphs. *Canad. J. Math.*, **12**, 555—67

Rédei, L. (1934). Ein kombinatorischer Satz. *Acta Litt. Sci. Szeged*, **7**, 39—43

Robbins, H. E. (1939). A theorem on graphs, with an application to a problem of traffic control. *Amer. Math. Monthly*, **46**, 281—83

Roy, B. (1967). Nomber chromatique et plus longs chemins d'un graphe, *Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Opérationelle Sér. Rouge*, **1**, 127—32

Wei, T. H. (1952). *The Algebraic Foundations of Ranking Theory*. Ph. D. Thesis, Cambridge University

第十一章　网　　络

11.1　流

作为商品从产地运送到市场必经之途的运输网络，在把它看作是具有某些附加结构的有向图时，可以进行极为有效的分析．这方面的理论是本章的主题，它有着多方面的重要应用．

一个网络 N 是指一个具有两个特定顶点子集 X 和 Y 的有向图 D（称为 N 的基础有向图），以及一个在 D 的弧集 A 上定义的非负整数值函数 c；假定顶点集 X 和 Y 是不相交的和非空的．称 X 中的顶点是 N 的发点，称 Y 中的顶点是 N 的收点，它们分别对应于产地和市场，既不是发点又不是收点的顶点称为中间点；所有中间点的集记为 I．称函数 c 是 N 的容量函数，它在弧 a 上的值称为 a 的容量．一条弧的容量可以看作为沿着这条弧输送商品所能允许的最大流量．

我们通过画出网络的基础有向图，并在每条弧上标出它的容量来描述一个网络．图 11.1 表示具有两个发点 x_1 和 x_2，三个收点 y_1，y_2 和 y_3，以及四个中间点 v_1，v_2，v_3 和 v_4 的一个网络．

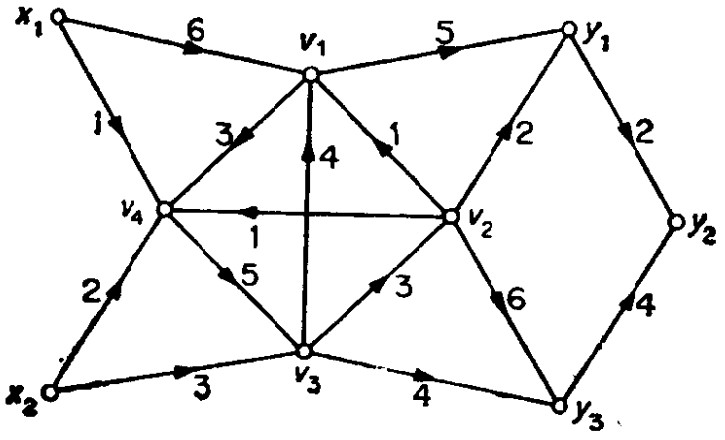


图 11.1　一个网络

若 $S \subseteq V$，则用 $\bar{S}$ 表示 $V \backslash S$．另外，下述记号是有用的，即：

若 f 是定义在 N 的弧集 A 上的实值函数，并且 $K \subseteq A$，则用 $f(K)$ 表示 $\sum_{a \in K} f(a)$. 此外，若 K 是形为 $(S, \bar{S})$ 的弧集，则把 $f(S, \bar{S})$ 写为 $f^+(S)$，而把 $f(\bar{S}, S)$ 写为 $f^-(S)$.

网络 N 中的流是指定义在 A 上的一个整数值函数 f，使得

$$0 \leqslant f(a) \leqslant c(a), \quad \text{对所有 } a \in A \text{ 成立} \qquad (11.1)$$

以及

$$f^-(v) = f^+(v), \quad \text{对所有 } v \in I \text{ 成立} \qquad (11.2)$$

f 在弧 a 上的值 $f(a)$ 可以看作是在流 f 中物资沿着 a 输送的流量. 条件 (11.1) 式中的上界称为容量约束；它给出一个自然的限制，即：沿一条弧的流量不能超过这条弧的容量. (11.2) 式称为守恒条件，它要求：对于任何中间点 v，物资输入 v 的流量等于输出 v 的流量. 值得注意的是，每个网络至少有一个流，因为对于所有 $a \in A$，由 $f(a) = 0$ 所定义的函数 f 显然满足 (11.1) 式和(11.2)式；它称为零流. 图 11.2 给出一个非平凡的流，沿着每条弧的流量用粗体字标出.

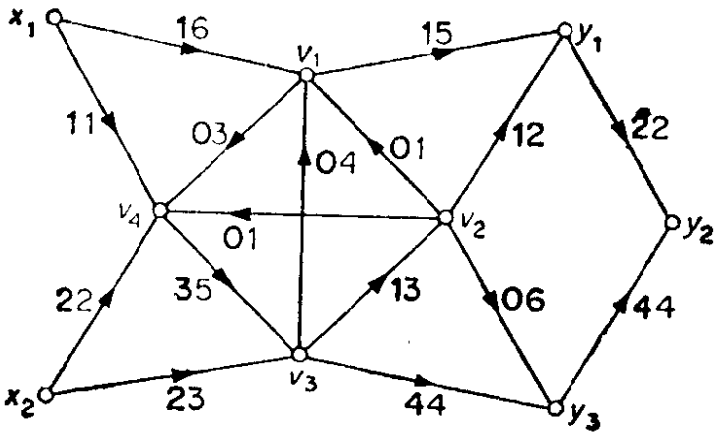


图 11.2 网络中的流

若 S 是网络 N 的顶点子集，而 f 是 N 中的流，则 $f^+(S) - f^-(S)$ 称为 f 流出 S 的合成流量，而 $f^-(S) - f^+(S)$ 是 f 流进 S 的合成流量. 由于守恒条件要求流出任何中间点的合成流量都是零，所以直观上很清楚，而且也不难证明(习题 11.1.3)：对于任何流 f，流出 X 的合成流量等于流进 Y 的合成流量. 这个共同的量称为 f 的

值，并用 val$f$ 表示；于是

$$\mathrm{val}\, f = f^+(X) - f^-(X)$$

图 11.2 中表示的流的值是 6.

N 中流 f 称为最大流，如果 N 中不存在流 f'，使得 $\mathrm{val}\, f' > \mathrm{val}\, f$. 这种流在运输网络中显然是重要的. 在任一网络中确定最大流的问题都可以借助于一个简单的方法化成只有一个发点和一个收点的网络的情形. 具体做法是对给定的网络 N，构作一个新的网络 N' 如下：

(i) 在 N 中添加两个新顶点 x 和 y；

(ii) 用一条容量为 ∞ 的弧把 x 连接到 X 中的每个顶点；

(iii) 用一条容量为 ∞ 的弧把 Y 中的每个顶点都连接到 y；

(iv) 指定 x 为 N' 的发点而 y 为 N' 的收点。

对图 11.1 中的网络 N 应用这个程序，得到图 11.3 中的网络 N'。

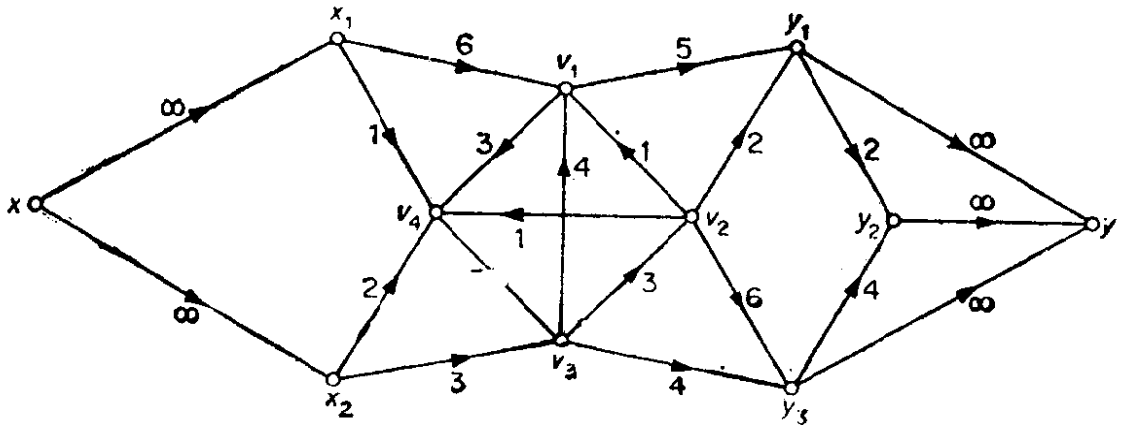


图 11.3

N 和 N' 中的流以一个简单的方式相互对应. 若 f 是 N 中的流，则由

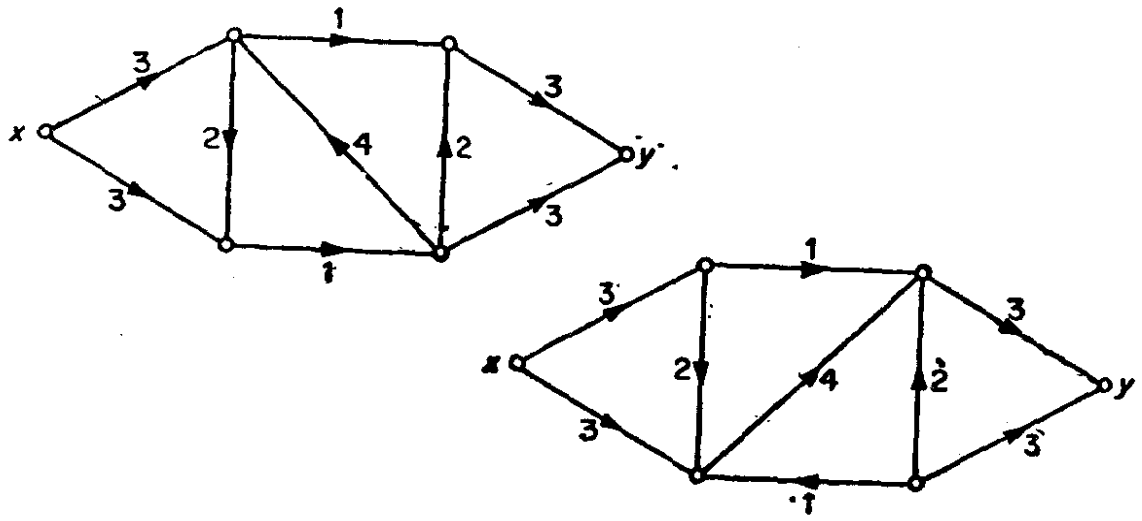
$$f'(a) = \begin{cases} f(a), & \text{若 } a \text{ 是 } N \text{ 的弧} \\ f^+(v) - f^-(v), & \text{若 } a = (x, v) \\ f^-(v) - f^+(v), & \text{若 } a = (v, y) \end{cases} \qquad (11.3)$$

所定义的函数 f' 是 N' 中使得 $\mathrm{val}\, f' = \mathrm{val}\, f$ 的流(习题 11.1.4(a)). 反之，N' 中的流在 N 的弧集上的限制就是 N 中具有相同值的流(习题 11.1.4(b))。所以下面三节，我们把注意力集中于讨论具有

单一发点 x 和单一收点 y 的网络.

习　　题

11.1.1　对于下列各个网络,确定所有可能的流以及最大流的值.



11.1.2　证明: 对于 N 中的任一流 f 和任一 $S\subseteq V$, 都有

$$\sum_{v\in S}(f^+(v)-f^-(v))=f^+(S)-f^-(S)$$

(注意: 一般说来, $\sum_{v\in S}f^+(v)\neq f^+(S)$, $\sum_{v\in S}f^-(v)\neq f^-(S)$).

11.1.3　证明: 对于 N 中的任一流,流出 X 的合成流量等于流进 Y 的合成流量.

11.1.4　证明:

(a) 由 (11.3) 式给出的函数 f' 是 N' 中的流,并且 $\mathrm{val}f'=\mathrm{val}f$;

(b) N' 中的流在 N 的弧集上的限制就是 N 中具有相同值的流.

11.2　割

设 N 是具有单一发点 x 和单一收点 y 的网络. N 中的割是指形如 $(S,\bar{S})$ 的弧集, 这里 $x\in S$ 而 $y\in\bar{S}$. 在图 11.4 的网络中,粗线表示一个割.

割 K 的容量是指它的各条弧的容量之和. 我们用 $\mathrm{cap}K$ 表示 K 的容量;于是

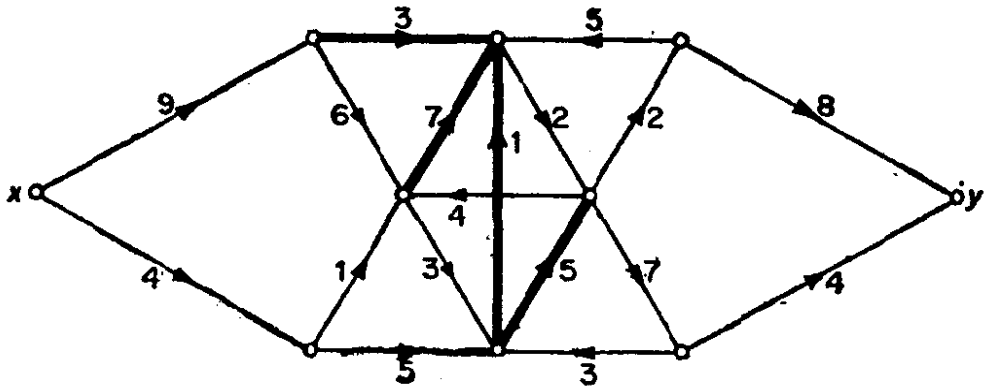


图 11.4　网络中的一个割

$$\operatorname{cap} K = \sum_{a \in K} c(a)$$

图 11.4 中表示的割有容量 16.

引理 11.1　对于N中的任一流 f 和任一割 $(S, \bar{S})$，均有

$$\operatorname{val} f = f^{+}(S) - f^{-}(S) \tag{11.4}$$

证　设 f 是N中的流，$(S, \bar{S})$ 是N中的割．从流和流值的定义，有

$$f^{+}(v) - f^{-}(v) = \begin{cases} \operatorname{val} f, & \text{若 } v = x \\ 0, & \text{若 } v \in S \backslash \{x\} \end{cases}$$

把 S 上所有顶点的这些方程加起来，并化简(习题 11.1.2)，得到

$$\operatorname{val} f = \sum_{v \in S} (f^{+}(v) - f^{-}(v)) = f^{+}(S) - f^{-}(S)$$

为方便起见，若 $f(a) = 0$，则称弧 a 是 f 零的；若 $f(a) > 0$，则称弧 a 是 f 正的；若 $f(a) < c(a)$，则称弧 a 是 f 非饱和的；若 $f(a) = c(a)$，则称弧 a 是 f 饱和的．

定理 11.1　对于N中的任一流 f 和任一割 $K = (S, \bar{S})$，均有

$$\operatorname{val} f \leqslant \operatorname{cap} K \tag{11.5}$$

而且，(11.5) 式中的等式成立当且仅当 $(S, \bar{S})$ 中的每条弧都是 f 饱和的，且 $(\bar{S}, S)$ 中的每条弧都是 f 零的．

证　根据 (11.1) 式，有

$$f^{+}(S) \leqslant \operatorname{cap} K \tag{11.6}$$

以及

$$f^{-}(S) \geqslant 0 \tag{11.7}$$

把不等式(11.6)和(11.7)代入(11.4)式,即得(11.5)式. 再注意到,(11.6)式中的等式成立当且仅当$(S, \bar{S})$中的每条弧都是f饱和的,而(11.7)式中的等式成立当且仅当$(\bar{S}, S)$中的每条弧都是f零的,即得定理的第二个结论.

N中的割K称为最小割,如果N中不存在割K',使得$\operatorname{cap} K' < \operatorname{cap} K$. 若$f^*$是最大流而$\tilde{K}$是最小割,则作为定理11.1的特殊情形,有

$$\operatorname{val} f^* \leqslant \operatorname{cap} \tilde{K} \tag{11.8}$$

推论11.1 设f是流而K是割,适合$\operatorname{val} f = \operatorname{cap} K$. 则$f$是最大流而$K$是最小割.

证 设f^*是最大流而$\tilde{K}$是最小割. 根据(11.8)式,有

$$\operatorname{val} f \leqslant \operatorname{val} f^* \leqslant \operatorname{cap} \tilde{K} \leqslant \operatorname{cap} K$$

因为根据假设,$\operatorname{val} f = \operatorname{cap} K$,由此推得:$\operatorname{val} f = \operatorname{val} f^*$以及$\operatorname{cap} K = \operatorname{cap} \tilde{K}$,于是$f$是最大流而$K$是最小割.

在下一节,我们将证明推论11.1的逆命题,即(11.8)式中的等式永远成立.

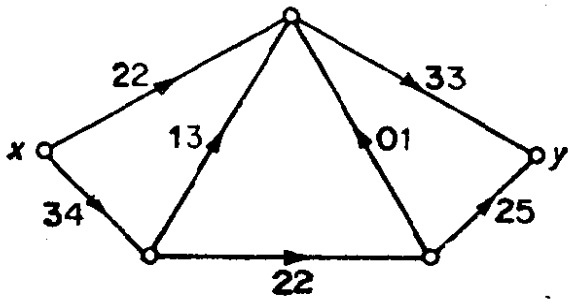
习　　题

11.2.1 在下面的网络中,

(a) 确定所有的割;

(b) 求最小割的容量;

(c) 证明由粗体字所指出的流是最大流.



11.2.2 证明:若N中不存在有向(x, y)路,则最大流的值和最小割的容量都是零.

11.2.3 若 $(S, \bar{S})$ 和 $(T, \bar{T})$ 都是N中的最小割，证明：$(S \cup T, \overline{S \cup T})$ 和 $(S \cap T, \overline{S \cap T})$ 也都是N中的最小割.

11.3 最大流最小割定理

本节中，我们将给出在网络中确定最大流的一个算法. 由于任何这种算法的基本要求是：当给定的流事实上是最大流时，算法必须能判断出来;所以我们首先研究这个问题.

设 f 是网络N中的一个流. 对于N中的每条路P，我们用一个非负整数 $\iota(P)$ 与之相伴,其定义为

$$\iota(P) = \min_{a \in A(P)} \iota(a)$$

这里

$$\iota(a) = \begin{cases} c(a) - f(a), & \text{若 } a \text{ 是 } P \text{ 的顺向弧} \\ f(a), & \text{若 } a \text{ 是 } P \text{ 的反向弧} \end{cases}$$

容易看出，$\iota(P)$ 是在不违反条件(11.1)的前提下沿着 P 所能增加的流量(相对于 f)的最大数值. 若 $\iota(P) = 0$，则称路 P 是 f 饱和的，若 $\iota(P) > 0$，则称路 P 是 f 非饱和的(或者等价地说，若 P 的每条顺向弧是 f 非饱和的，而 P 的每条反向弧是 f 正的，则称路 P 是 f 非饱和的). 简单地说，f 非饱和路是没有用足整个容量的路. f 可增路是指从发点 x 到收点 y 的 f 非饱和路. 例如，若 f 是图 11.5(a) 的网络中粗线指出的流，则路 $P = xv_1v_2v_3y$ 是一条 f 可增路. P的顺向弧是 (x, v_1) 和 (v_3, y)，并且 $\iota(P) = 2$.

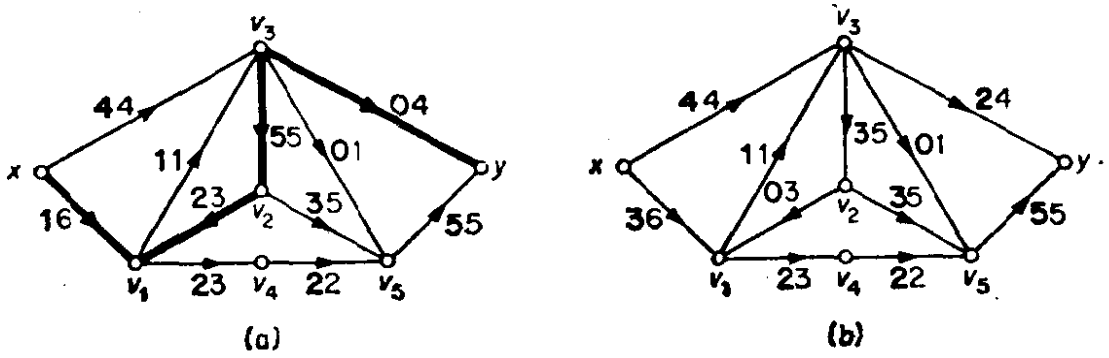


图 11.5 (a) 一条 f 可增路 P; (b) 基于 P 的修改流.

网络中 f 可增路 P 的存在是有意义的，因为这意味着 f 不是

最大流;事实上,沿着 P 增减一个值为 $\iota(P)$ 的附加流量,得到由

$$\hat{f}(a)=\begin{cases} f(a)+\iota(P), & \text{若 } a \text{ 是 } P \text{ 的顺向弧} \\ f(a)-\iota(P), & \text{若 } a \text{ 是 } P \text{ 的反向弧} \\ f(a), & \text{其他} \end{cases} \tag{11.9}$$

所定义的新流 $\hat{f}$,它适合: $\mathrm{val}\,\hat{f}=\mathrm{val}\,f+\iota(P)$ (习题 11.3.1)。$\hat{f}$ 称为基于 P 的修改流. 图 11.5(b) 表示在图 11.5(a) 的网络中基于 f 可增路 $xv_1v_2v_3y$ 的修改流.

在网络流的理论中可增路所起的作用类似于在对集理论中可扩路的作用,正如下述定理所证明的那样(与定理 5.1 相比较).

定理 11.2 N 中的流 f 是最大流当且仅当 N 不包含 f 可增路.

证 若 N 包含 f 可增路 P, 则 f 不能是最大流,因为基于 P 的修改流 $\hat{f}$ 具有更大的值.

反之,假设 N 不包含 f 可增路. 我们的目的是证明 f 是最大流. 设 S 表示 N 中用 f 非饱和路与 x 连接起来的所有顶点的集. 显然 $x\in S$. 又由于 N 没有 f 可增路,所以 $y\in\bar{S}$. 因此, $K=(S,\bar{S})$ 是 N 中的一个割. 我们将证明 $(S,\bar{S})$ 中的每条弧是 f 饱和的,而 $(\bar{S},S)$ 中的每条弧是 f 零的.

考察尾 $u\in S$ 而头 $v\in\bar{S}$ 的弧 a. 由于 $u\in S$, 所以存在一条 f 非饱和 (x,u) 路 Q. 若 a 是 f 非饱和的,则 Q 可以由弧 a 扩充成为一条 f 非饱和 (x,v) 路. 但是 $v\in\bar{S}$, 因此不存在这样的路. 所以 a 必然是 f 饱和的. 同理可证: 若 $a\in(\bar{S},S)$, 则 a 必然是 f 零的.

应用定理 11.1, 得到

$$\mathrm{val}\,f=\mathrm{cap}\,K$$

于是从推论 11.1 可以推得 f 是最大流(以及 K 是最小割).

在上述证明过程中,我们证实了适合 $\mathrm{val}\,f=\mathrm{cap}\,K$ 的最大流 f 和最小割 K 的存在,从而有由 Ford 和 Fulkerson(1956) 提出的下述定理.

定理 11.3 在任何网络中,最大流的值等于最小割的容量.

定理 11.3 名为最大流最小割定理. 它是图论的重要核心之一. 关于图的许多结果,在适当选择网络之后,就变成这个定理的很容易得出的推论. 在 11.4 节和 11.5 节中,我们将讨论这方面的两个应用.

定理 11.2 的证明本质上是构造性的. 从它可以引出求网络最大流的一个算法. 这个也是由 Ford 和 Fulkerson (1957) 提出的算法名为标号法. 从一个已知的流,例如零流,开始,递推地构作出一个其值不断增加的流的序列,并且终止于最大流. 在每一个新的流 f 作出之后,如果存在 f 可增路,则用被称为标号程序的一个子程序来求出它. 若找到了这样的一条路 P,则作出基于 P 的修改流 $\hat{f}$,并且取为这个序列的下一个流. 如果不存在 f 可增路,则算法终止;根据定理 11.2,f 就是最大流.

为了叙述标号程序,需要下述定义. N 中的树 T 称为 f 非饱和树,如果 (i) $x \in V(T)$,并且 (ii) 对于 T 的每个顶点 v,T 中唯一的 (x, v) 路是 f 非饱和路. 图 11.6 的网络中表示了一棵这样的树.

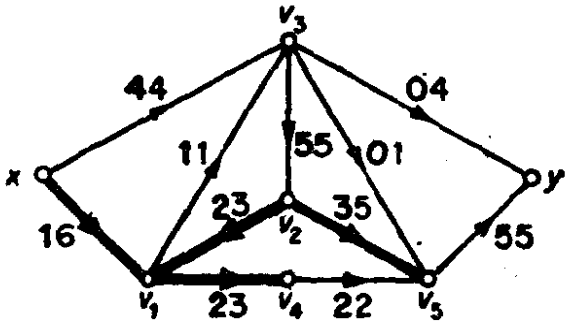


图 11.6 一棵 f 非饱和树

寻找 f 可增路的过程必须包含 N 中 f 非饱和树 T 的生长过程. 最初,T 仅由发点 x 组成. 在任一阶段,都存在着生长树的两种方法:

1. 若 $(S, \bar{S})$ 中存在 f 非饱和弧 a,这里 $S = V(T)$,则把 a 和它的头都添加到 T 上去.
2. 若 $(\bar{S}, S)$ 中存在 f 正的弧 a,则把 a 和它的尾都添加到 T 上去.

显然，上述每一个程序都导致一棵扩大了的 f 非饱和树.

于是，或者 T 最后到达收点 y，或者它在到达 y 之前停止生长. 前一种情形不妨称为突破；如果突破发生，T 中的 (x, y) 路是我们所要的 f 可增路. 可是，如果 T 在到达 y 之前停止生长，则从定理 11.1 和推论 11.1 推知 f 是最大流. 在图 11.7 中，对这个树生长程序的两种叠代都作了直观说明. 第一种叠代导致突破；第二种叠代则表明：得到的修改流是最大流.

这个标号程序是生长 f 非饱和树 T 的一个系统方法. 在生长 T 的过程中，它分配给 T 的每个顶点 v 的标号为 $l(v) = \iota(P_v)$，这里 P_v 是 T 中唯一的 (x, v) 路. 这种标号的优越性在于，如果突破发生，则我们不仅有 f 可增路 P_y，而且还有可用来计算基于 P_y 的修改流的数值 $\iota(P_y)$. 这个标号程序从分配给发点 x 以标号 $l(x) = \infty$ 开始，按照下述法则继续：

1. 若 a 是 f 非饱和弧，其尾 u 已经标号，但其头 v 还未标号，则 v 标为 $l(v) = \min\{l(u), c(a) - f(a)\}$.

2. 若 a 是 f 正的弧，其头 u 已经标号，但其尾 v 还未标号，则 v 标为 $l(v) = \min\{l(u), f(a)\}$.

在上述各种情形中，v 称为基于 u 而被标号的. 查视已标号的顶点 u，并将所有能够基于 u 而被标号的但尚未标号的顶点进行标号. 这个标号程序一直继续到或者收点 y 被标号（突破），或者所有被标号的顶点都被查视过而没有更多的顶点可以被标号（这意味着 f 是最大流）.

图 11.8 给出了概述这个标号法的框图.

值得指出的是，上述标号法并不是好算法. 例如，考察图 11.9 中的网络 N. 显然 N 中最大流的值是 $2m$. 如果从零流开始，并且轮流选择 $xpuvsy$ 和 $xrvuqy$ 作为可增路，则这个标号法要用标号程序 $2m + 1$ 次，因为在每一种情形下，流值每次都恰好增加 1. 由于 m 是任意的，所以在这个例子中完成标号法所需要的计算步数就不能用 v 和 ε 的函数来限定. 换言之，它不是好算法.

可是，Edmonds 和 Karp (1970) 证明：这个标号程序稍加改

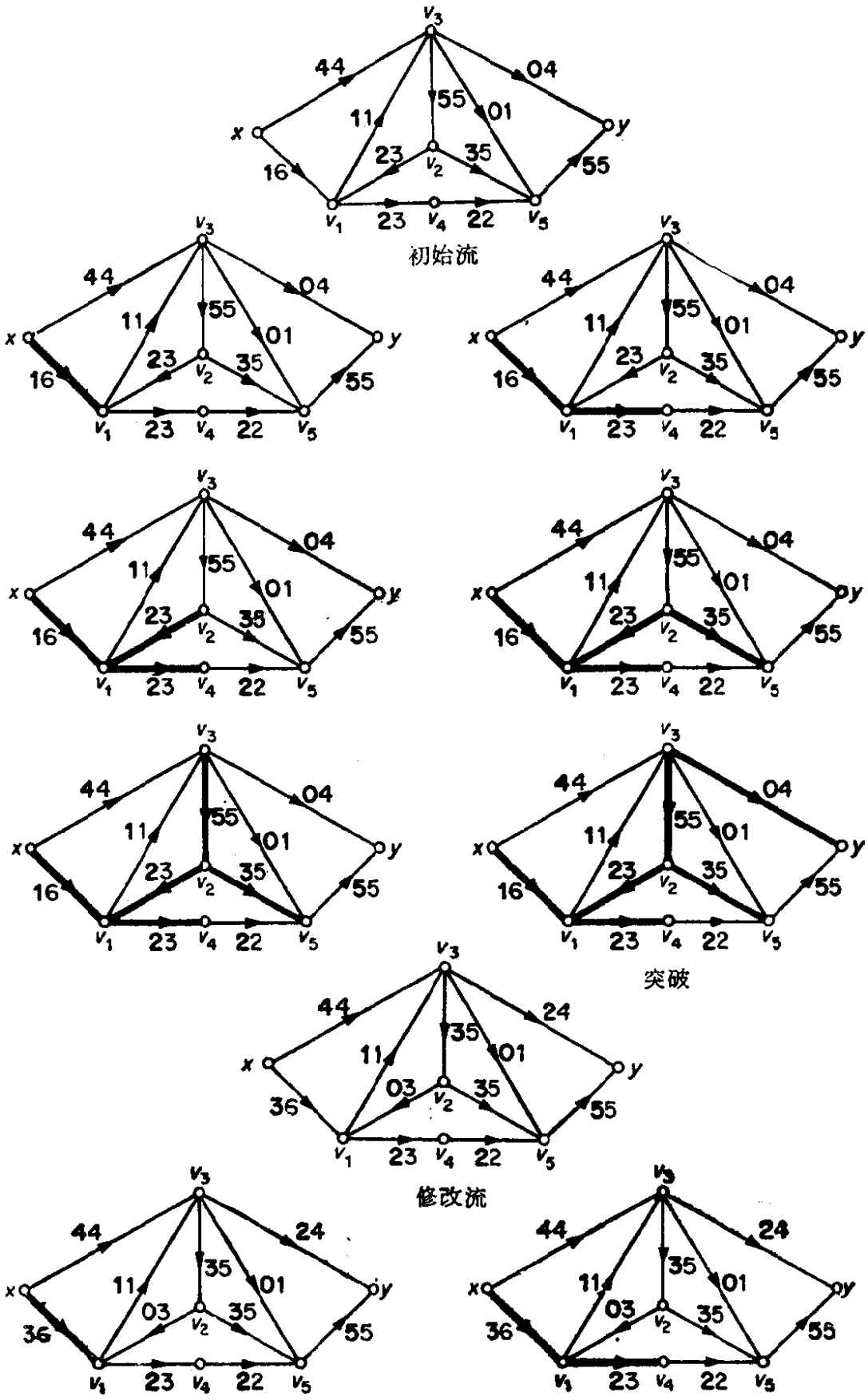


图 11.7

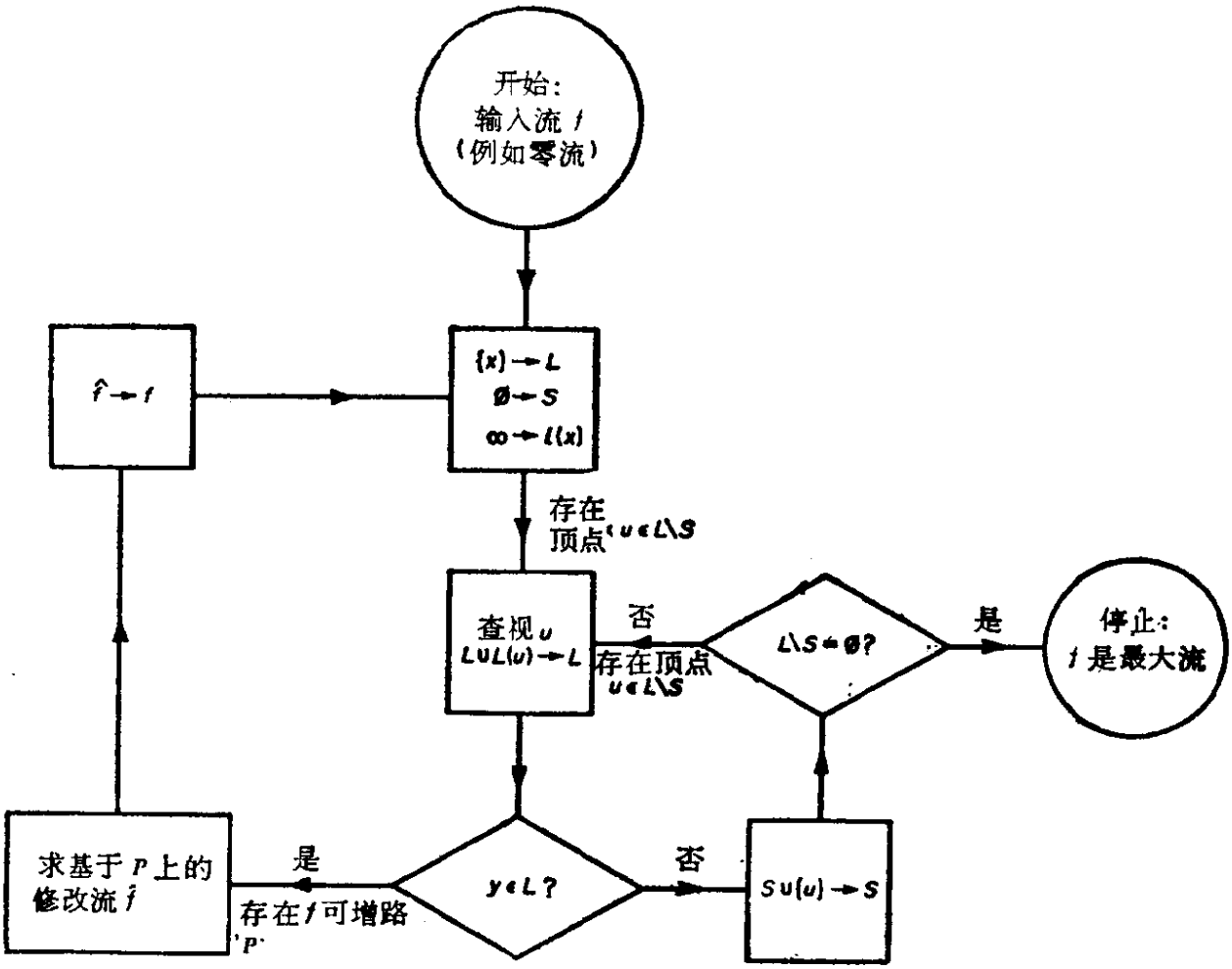


图 11.8 标号法 (L, 已标号的顶点集; S, 已查视的顶点集; $L(u)$, 在 u 的查视期间标号的顶点集)

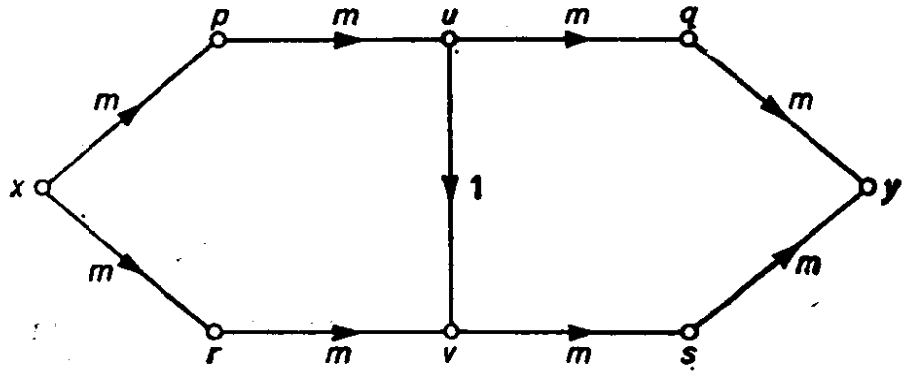


图 11.9

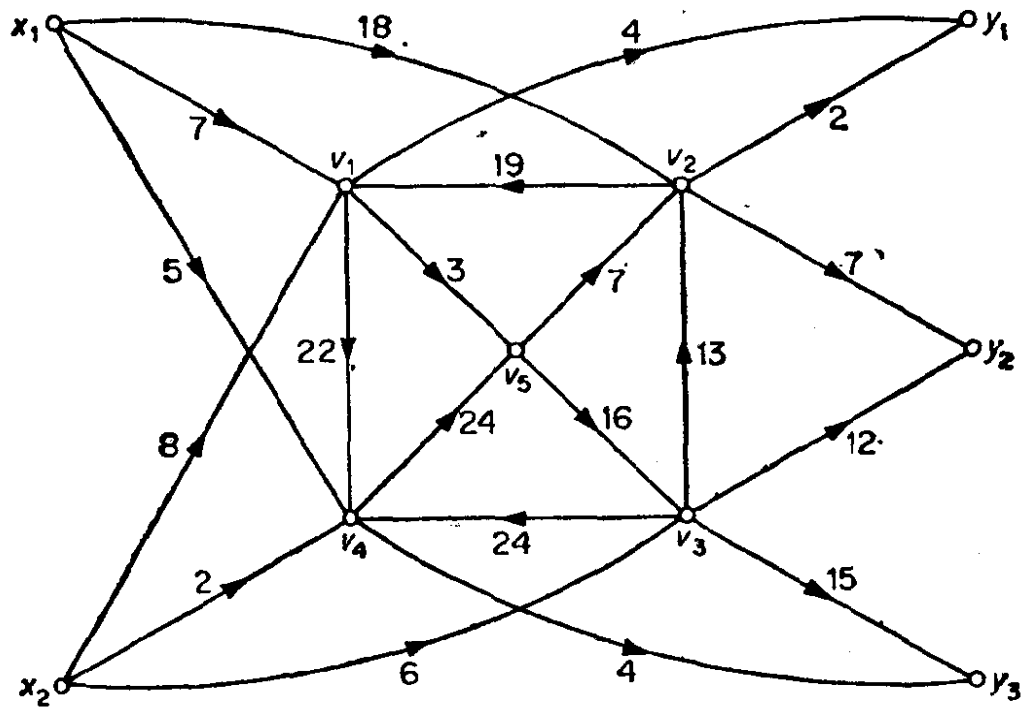
进即可转变为好算法.他们提出的改进如下所述:标号程序中应在"先标号者先查视"的基础上进行查视,即,在查视已标号的顶点 u

之前，应先查视在 u 之前被标号的顶点. 可以看出，这相当于选择最短的可增路. 显然，利用这个改进，图 11.9 的网络中的最大流仅仅用标号程序的两次叠代就可以求出。

习　　题

11.3.1　证明由 (11.9) 式给出的函数 f 是 $\mathrm{val}\hat{f} = \mathrm{val}f + \iota(P)$ 的流.

11.3.2　由两家工厂 x_1 和 x_2 生产的一种特定商品，通过下列网络运送到市场 y_1，y_2 和 y_3。利用标号法确定从工厂到市场所能运送的最大总量。



11.3.3　证明：在任何网络 N（具有整数容量）中，总存在最大流 f，使得 $f(a)$ 对于所有 $a \in A$ 都是整数.

11.3.4　考察其每条弧 a 都伴随一个整数 $b(a) \leqslant c(a)$ 的网络 N. 修改标号法，以求 N 中对所有 $a \in A$ 都满足约束条件 $f(a) \geqslant b(a)$ 的最大流 f（假设存在满足这个条件的初始流）。

11.3.5* 考察其每个中间点 v 都伴随一个非负整数 $m(v)$ 的网络 N。说明怎样修改网络，并应用标号法于修改了的网络，以求出对所有 $v \in V\backslash\{x, y\}$ 都满足约束条件 $f^-(v) \leqslant m(v)$ 的最大流 f。

应　　用

11.4 Menger 定理

在本节，我们利用最大流最小割定理证明若干由 Menger (1927) 提出的定理；其中两个定理已经在 3.2 节中提及．下述引理提供了证明的关键．

引理 11.4　设 N 是以 x 为发点以 y 为收点的网络，并且它的每条弧都具有单位容量．则

(a) N 中最大流的值等于 N 中弧不重的有向 (x, y) 路的最大数目 m；并且

(b) N 中最小割的容量等于 N 中删去后就会破坏 N 中所有有向 (x, y) 路的那些弧的最小数目 n．

证　设 f^* 是 N 中的最大流，并设 D^* 表示从 D 中删去所有 f^* 零的弧而得到的有向图．由于 N 的每条弧有单位容量，因此，对所有 $a \in A(D^*)$，都有 $f^*(a) = 1$．由此推得：

(i) $d_D^+{}^*(x) - d_D^-{}^*(x) = \mathrm{val} f^* = d_D^-{}^*(y) - d_D^+{}^*(y)$；

(ii) $d_D^+{}^*(v) = d_D^-{}^*(v)$，对所有 $v \in V \backslash \{x, y\}$ 成立．

所以(习题 10.3.3)，在 D^* 中，因而也在 D 中存在 $\mathrm{val} f^*$ 条弧不重的有向 (x, y) 路．于是

$$\mathrm{val} f^* \leqslant m \tag{11.10}$$

现在设 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 是 N 中任一组 m 条弧不重的有向 (x, y) 路，并由

$$f(a) = \begin{cases} 1, & \text{若 } a \text{ 是 } \bigcup_{i=1}^{m} P_i \text{ 的弧} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

定义 A 上的一个函数 f．显然 f 是 N 中值为 m 的一个流．由于 f^* 是最大流，我们有

$$\mathrm{val} f^* \geqslant m \tag{11.11}$$

于是从 (11.10) 式和 (11.11) 式推得

$$\text{val } f^* = m.$$

设 $\tilde{K} = (S, \bar{S})$ 是N中的最小割. 则在 $N - \tilde{K}$ 中，$\bar{S}$的顶点从 S 中的任何顶点出发都不可到达;特别是，y 从 x 出发不可到达. 于是 $\tilde{K}$ 是一个删去它就会破坏所有有向 (x, y) 路的弧集，并且有

$$\text{cap } \tilde{K} = |\tilde{K}| \geqslant n \tag{11.12}$$

现在设 Z 是删去它就会破坏所有有向 (x, y) 路的 n 条弧的集，并且用 S'[1] 表示在 $N - Z$ 中从 x 出发可到达的所有顶点的集. 由于 $x \in S'$ 而 $y \in \bar{S}'$，所以 $K = (S', \bar{S}')$ 是N中的一个割. 此外，根据S'的定义，$N - Z$ 不能包含$(S', \bar{S}')$的弧，因此 $K \subseteq Z$. 由于 $\tilde{K}$ 是最小割，我们断定:

$$\text{cap } \tilde{K} \leqslant \text{cap } K = |K| \leqslant |Z| = n \tag{11.13}$$

于是 (11.12) 式和 (11.13) 式一起产生

$$\text{cap } \tilde{K} = n$$

定理 11.4 设 x 和 y 是有向图D的两个顶点. 则D中弧不重的有向 (x, y) 路的最大数目等于删去后就会破坏 D 中所有有向 (x, y) 路的那些弧的最小数目.

证 对D的每条弧都指定单位容量，得到一个以 x 为发点以 y 为收点的网络 N. 于是定理从引理 11.4 和最大流最小割定理 (11.3) 推得.

采用简单的技巧可以立即得到定理 11.4 对于无向图的变形.

定理 11.5 设 x 和 y 是图G的两个顶点. 则G中边不重的 (x, y) 路的最大数目等于删去后就会破坏G中所有 (x, y) 路的那些边的最小数目.

证 应用定理 11.4 于G的伴随有向图 $D(G)$ (习题 10.3.6) 即可.

推论 11.5 图G是 k 边连通的当且仅当G中任意两个相异顶点被至少 k 条边不重的路所连.

---

1) 原文中为 S，为避免与上段中的 S 相混，此段中的 S 均译为 S'.——译者注

证 直接从定理 11.5 和 k 边连通的定义推得.

现在我们转到以上定理的顶点变形.

定理 11.6 设 x 和 y 是有向图 D 的两个顶点，并且 D 没有从 x 连到 y 的弧. 则 D 中内部不相交的有向 (x, y) 路的最大数目等于删去后就会破坏 D 中所有有向 (x, y) 路的那些顶点的最小数目.

证 从 D 出发构作新的有向图 D' 如下:

(i) 把每个顶点 $v \in V\backslash\{x, y\}$ 分裂成两个新的顶点 v' 和 v''，并用弧 (v', v'') 连接它们;

(ii) 把 D 中以 $v \in V\backslash\{x, y\}$ 为头的每条弧用以 v' 为头的新弧来代替，而把 D 中以 $v \in V\backslash\{x, y\}$ 为尾的每条弧用以 v'' 为尾的新弧来代替. 图 11.10 对这种构作方法作了直观说明.

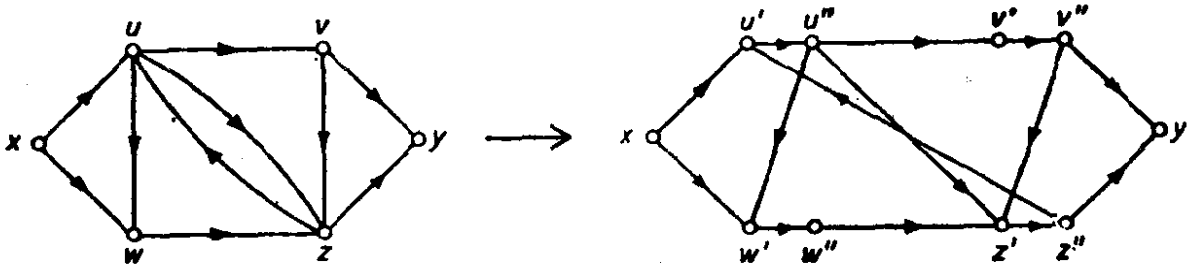


图 11.10

于是，D' 中的每条有向 (x, y) 路都对应着收缩所有 (v', v'') 型的弧之后得到的 D 中的一条有向 (x, y) 路; 并且反之，D 中的每条有向 (x, y) 路也都对应着分裂这条路的每个内部顶点之后得到的 D' 中的一条有向 (x, y) 路. 此外，D' 中两条有向 (x, y) 路是弧不重的当且仅当 D 中对应的路是内部不相交的. 由此推得，D' 中弧不重的有向 (x, y) 路的最大数目等于 D 中内部不相交的有向 (x, y) 路的最大数目. 类似地，D' 中删去后就会破坏所有有向 (x, y) 路的那些弧的最小数目等于 D 中删去后就会破坏所有有向 (x, y) 路的那些顶点的最小数目 (习题 11.4.1). 于是此定理从定理 11.4 推得.

定理 11.7 设 x 和 y 是图 G 的两个不相邻的顶点. 则 G 中内

部不相交的(x, y)路的最大数目等于删去后就会破坏所有(x, y)路的那些顶点的最小数目.

证 对G的伴随有向图 $D(G)$ 应用定理 11.6 即可. 立即可得下述推论:

推论 11.7 一个 $v \geqslant k+1$ 的图G是 k 连通的当且仅当G的任何两个相异顶点被至少 k 条内部不相交的路所连.

习 题

11.4.1 证明在定理 11.6 的证明中提到的命题: D' 中删去后就会破坏所有有向 (x, y) 路的那些弧的最大数目等于 D 中删去后就会破坏所有有向 (x, y) 路的那些顶点的最小数目.

11.4.2 从定理 11.7 导出 König 定理(5.3).

11.4.3 设 G 是一个图而 S 和 T 是 V 的两个不相交子集. 证明: 一个端点在 S 中另一个端点在 T 中的顶点不相交的路的最大数目等于删去后就会把 S 和 T 分离开来(即,删去它们之后,没有任何分支同时包含 S 的顶点和 T 的顶点)的那些顶点的最小数目.

11.4.4* 证明: 若 G 是 $k \geqslant 2$ 的 k 连通图,则 G 的任何 k 个顶点都同时包含在某个圈中. (G. A. Dirac)

11.5 可行流

设N是一个网络. 假设对N的每个发点 x_i 指定一个被称为 x_i 的供给的非负整数 $\sigma(x_i)$, 而对N的每个收点 y_j 指定一个被称为 y_j 的需求的非负整数 $\partial(y_j)$. N中的流 f 称为可行的,如果

$$f^+(x_i) - f^-(x_i) \leqslant \sigma(x_i), \quad \text{对所有 } x_i \in X \text{ 成立}$$

并且

$$f^-(y_j) - f^+(y_j) \geqslant \partial(y_j), \quad \text{对所有 } y_j \in Y \text{ 成立}$$

换言之,若对于 f 流出每个发点 x_i 的合成流量都不超过在 x_i 的供给,而对于 f 流进每个收点 y_j 的合成流量都至少和 y_j 的需求一样大,则流 f 是可行的. 这样,一个自然的问题就是: N中存在可行流的充分必要条件是什么? 由 Gale (1957) 提出的定理 11.8 提供了这个问题的答案. 该定理说: 可行流存在当且仅当对于V的

每个子集 S，从 S 到 $\bar{S}$ 的各弧总容量至少和 $\bar{S}$ 的纯需求一样大.

对于 V 的任何子集 S，用 $\sigma(S)$ 表示 $\sum_{v\in S}\sigma(v)$，用 $\partial(S)$ 表示 $\sum_{v\in S}\partial(v)$.

定理 11.8 N 中存在可行流当且仅当对于所有 $S\subseteq V$，有

$$c(S,\bar{S})\geqslant\partial(Y\cap\bar{S})-\sigma(X\cap\bar{S}) \qquad (11.14)$$

证 从 N 出发构作新的网络 N' 如下：

(i) 在 N 中添加两个新顶点 x 和 y；

(ii) 用一条容量为 $\sigma(x_i)$ 的弧把 x 连接到每个 $x_i\in X$；

(iii) 用一条容量为 $\partial(y_i)$ 的弧把每个 $y_i\in Y$ 连接到 y；

(iv) 指定 x 为 N' 的发点而 y 为 N' 的收点.

图 11.11 对 N' 的构造作了直观的说明.

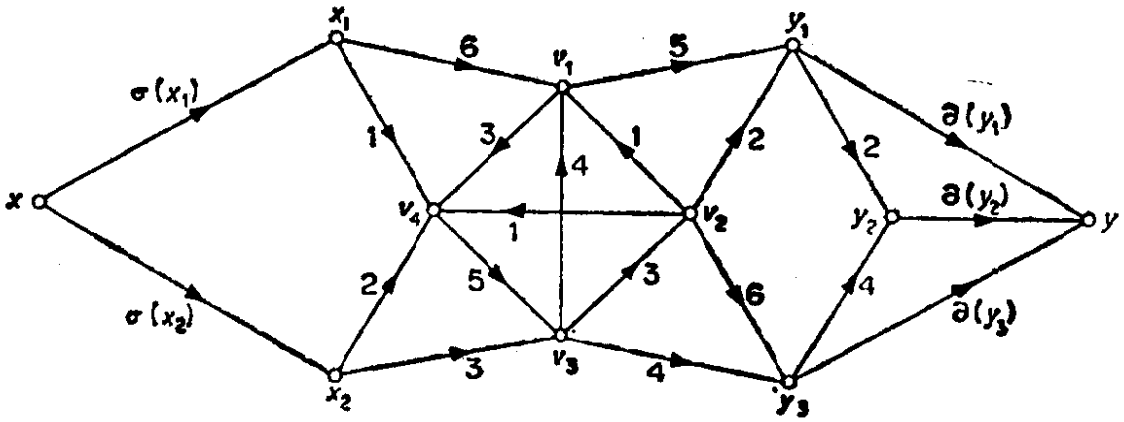


图 11.11

不难看出，N 有可行流当且仅当 N' 有饱和割 $(Y,\{y\})$ 的每条弧的流(习题 11.5.1). 于是 N' 中饱和 $(Y,\{y\})$ 的每条弧的流显然有值 $\partial(Y)=\mathrm{cap}(Y,\{y\})$，因而根据推论 11.1，它是最大流. 由此推得，N 有可行流当且仅当对于 N' 的每个割 $(S\cup\{x\},\bar{S}\cup\{y\})$，均有

$$\mathrm{cap}(S\cup\{x\},\bar{S}\cup\{y\})\geqslant\partial(Y) \qquad (11.15)$$

但是条件 (11.14) 和 (11.15) 恰好相同，因为在用 c' 表示 N' 中的容量函数后，有

$$\mathrm{cap}(S\cup\{x\},\bar{S}\cup\{y\})$$

$$= c'(S, \bar{S}) + c'(S, \{y\}) + c'(\{x\}, \bar{S})$$
$$= c(S, \bar{S}) + \partial(Y \cap S) + \sigma(X \cap \bar{S})$$

定理 11.8 在图论问题中有很多应用. 现在来讨论一个这样的应用.

设 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$ 和 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 是两个非负整数序列. 我们称序列对 $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 可用简单偶图来实现, 如果存在一个具有二分类 $(\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}, \{y_1, y_2, \cdots, y_n\})$ 的简单偶图 G, 使得

$$d(x_i) = p_i, \quad \text{对 } 1 \leqslant i \leqslant m \text{ 成立}$$

以及

$$d(y_i) = q_i, \quad \text{对 } 1 \leqslant j \leqslant n \text{ 成立}$$

例如, $\mathbf{p} = (3, 2, 2, 2, 1)$ 和 $\mathbf{q} = (3, 3, 2, 1, 1)$ 的序列对 $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 可用图 11.12 的偶图来实现.

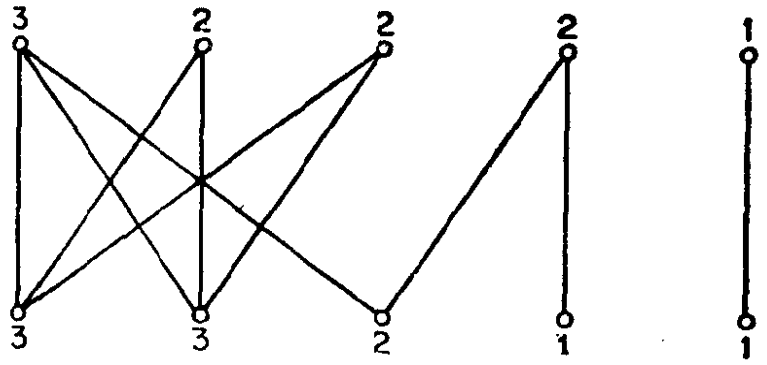


图 11.12

序列对 $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 可实现的一个显然的必要条件是:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j \tag{11.16}$$

可是 (11.16) 式本身不是充分的. 例如, $\mathbf{p} = (5, 4, 4, 2, 1)$ 和 $\mathbf{q} = (5, 4, 4, 2, 1)$ 的序列对 $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 不能用任何简单偶图来实现 (习题 11.5.2). 在下述定理中我们介绍序列对可用简单偶图来实现的充分必要条件. 序列中项的次序显然不影响可实现性问题, 因而假设 $\mathbf{q}$ 的项排成不增次序

$$q_1 \geqslant q_2 \geqslant \cdots \geqslant q_n \tag{11.17}$$

这将带来方便.

定理 11.9 设 $\mathbf{p}=(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ 和 $\mathbf{q}=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 是满足(11.16)式和(11.17)式的两个非负整数序列. 则 $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 可用简单偶图来实现当且仅当

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, k\} \geqslant \sum_{j=1}^{k} q_j, \text{ 对 } 1 \leqslant k \leqslant n \text{ 成立} \tag{11.18}$$

证 设 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 和 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 是两个不相交的集，并设D是从具有二分类 (X, Y) 的完全偶图得到的有向图，其中每条边的指定方向都是从X到Y. 给D的每条弧分配单位容量，并指定X和Y中的顶点分别作为它的发点和收点，得到网络N. 并且进一步假设，发点 x_i 的供给为 p_i，$1 \leqslant i \leqslant m$，而收点 y_j 的需求为 q_j，$1 \leqslant j \leqslant n$.

于是，对于D的每一个生成子图，N中都对应地存在一个恰好饱和该子图的各弧的流，并且这个对应显然是一对一的. 由于(11.16)式，可以推得：$(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 可用简单偶图来实现当且仅当网络N有可行流. 现在利用定理 11.8.

对于N中的任一顶点集S，记

$$I(S)=\{i \mid x_i \in S\} \text{ 和 } J(S)=\{j \mid y_j \in S\}$$

根据定义，有

$$c(S, \bar{S}) = |I(S)| \cdot |J(\bar{S})|$$

$$\sigma(X \cap \bar{S}) = \sum_{i \in I(\bar{S})} p_i \tag{11.19}$$

以及

$$\partial(Y \cap \bar{S}) = \sum_{j \in J(\bar{S})} q_j$$

假设N有可行流. 根据定理 11.8 和(11.19)式，有

$$|I(S)| \cdot |J(\bar{S})| \geqslant \sum_{j \in J(\bar{S})} q_j - \sum_{i \in I(\bar{S})} p_i$$

对任一 $S \subseteq X \cup Y$ 成立. 置 $S=\{x_i \mid p_i > k\} \cup \{y_j \mid j > k\}$，有

$$\sum_{i\in I(S)} \min\{p_i, k\} \geqslant \sum_{j=1}^{k} q_i - \sum_{i\in I(\bar{S})} \min\{p_i, k\}$$

由于它对 k 的所有值均成立，所以推得 (11.18) 式.

反之，假设 (11.18) 式得到满足. 设 S 是 N 中任一顶点集. 根据 (11.18) 式和 (11.19) 式，有

$$\begin{aligned} c(S, \bar{S}) &\geqslant \sum_{i\in I(S)} \min\{p_i, k\} \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{k} q_i - \sum_{i\in I(\bar{S})} \min\{p_i, k\} \\ &\geqslant \partial(Y\cap\bar{S}) - \sigma(X\cap\bar{S}) \end{aligned}$$

这里 $k = |J(\bar{S})|$. 从定理 11.8 即可推得 N 有可行流.

我们从矩阵的观点来观察定理 11.9，从而结束本章. 对于每个具有二分类 $(\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}, \{y_1, y_2, \cdots, y_n\})$ 的简单偶图 G，可以作出一个 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{B}$，其中 $b_{ij} = 1$ 或 0 取决于 x_iy_j 是 G 的边或者不是 G 的边. 反之，每个 $m \times n$ 的 (0,1) 矩阵用这种方法也对应着一个简单偶图. 于是，定理 11.9 给出存在行和为 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 而列和为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的 $m \times n$ (0, 1) 矩阵 $\mathbf{B}$ 的充分必要条件.

存在一个用矩阵术语使条件 (11.18) 直观化的简单方法. 设 $\mathbf{B}^*$ 表示每一行 i 的前 p_i 项是 1，而其余元素是零的 (0, 1) 矩阵，并设 $p_1^*, p_2^*, \cdots, p_n^*$ 是 $\mathbf{B}^*$ 的列和. 序列 $\mathbf{p}^* = \{p_1^*, p_2^*, \cdots, p_n^*\}$ 称为 $\mathbf{p}$ 的共轭. 例如(5, 4, 4, 2, 1)的共轭是(5, 4, 3, 3, 1)(见图 11.13).

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{p}^* \\ & \begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{array} \\ \mathbf{p}\begin{array}{c} 5 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

图 11.13

现在考察和 $\sum_{j=1}^{k} p_j^*$. $\mathbf{B}^*$ 的行 i 把 $\min\{p_i, k\}$ 贡献给这个和. 所以(11.18)式的左边等于 $\sum_{j=1}^{k} p_j^*$，并且(11.18)式等价于条件:

$$\sum_{j=1}^{k} p_j^* \geqslant \sum_{j=1}^{k} q_j, \quad \text{对于 } 1 \leqslant k \leqslant n \text{ 成立}$$

以(0, 1)矩阵的术语表示定理 11.9 的这个表达式是由 Ryser (1957) 提出的. 关于网络流理论的其他应用，可以参阅 Ford 和 Fulkerson (1962) 的著作.

习　　题

11.5.1 证明: 在定理 11.8 的证明中，网络 N 有可行流当且仅当网络 N' 有饱和割 $(Y, \{y\})$ 的每条弧的流.

11.5.2 证明: $\mathbf{p} = (5, 4, 4, 2, 1)$ 和 $\mathbf{q} = (5, 4, 4, 2, 1)$ 的序列对 $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 不能用任何简单偶图来实现.

11.5.3 给定两个序列 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 和 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$，求在顶点集 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 上存在适合下列两个条件的有向图 D 的充分必要条件:

(i) $d^-(v_i) = p_i$ 而 $d^+(v_i) = q_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 以及

(ii) D 有(0, 1)邻接矩阵.

11.5.4* 设 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$ 和 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$是两个不增的非负整数序列，并用 $\mathbf{p}'$ 和 $\mathbf{q}'$ 分别表示序列 $(p_2, p_3, \cdots, p_m)$ 和 $(q_1 - 1, q_2 - 1, \cdots, q_{p_1} - 1, q_{p_1+1}, \cdots, q_n)$.

(a) 证明: $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 可以用简单偶图来实现当且仅当 $(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$ 可以用简单偶图来实现.

(b) 利用(a)，叙述一个构作实现 $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 的简单偶图的算法，如果这种实现存在的话.

11.5.5 $(m + n)$ 正则图 G 称为 (m, n) 可定向的，如果它可以这样来定向，使得每个顶点的入度不是 m 就是 n.

(a)* 证明图 G 是 (m, n) 可定向的当且仅当存在 V 的一个分类 (V_1, V_2)，使得对于每个 $S \subseteq V$，都有

$$|(m-n)(|V_1 \cap S| - |V_2 \cap S|)| \leqslant |[S, \bar{S}]|$$

(b) 试证：若 G 是(m, n) 可定向的，并且 $m > n$，则 G 也是 $(m-1, n+1)$ 可定向的.

参 考 文 献

Edmonds, J. and Karp. R. M. (1972). Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *J. Assoc. Comput. Math.*, **19**, 248—64

Ford, L. R. Jr. and Fulkerson, D. R. (1956). Maximal flow through a network. *Canad. J. Math.*, **8**, 399—404

Ford, L. R. Jr. and Fulkerson, D. R. (1957). A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem. *Canad. J. Math.*, **9**, 210—18

Ford, L. R. Jr. and Fulkerson, D. R. (1962). *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton

Gale, D. (1957). A theorem on flows in networks. *Pacific J. Math.*, **7**, 1073—82

Menger, K. (1927). Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fund. Math.*, **10**, 96—115

Ryser, H. J. (1957). Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. *Canad. J. Math.*, **9**, 371—77

第十二章　圈空间和键空间

12.1　环流和势差

设D是有向图．　A上的一个实值函数f称为D中的一个环流，如果它在D的每个顶点上均满足守恒条件：

$$f^-(v) = f^+(v),\quad \text{对所有 } v \in V \text{ 成立} \tag{12.1}$$

若把D看作是电网络，则这样的函数f就表示D中电流的环流．图 12.1 表示某有向图的一个环流．

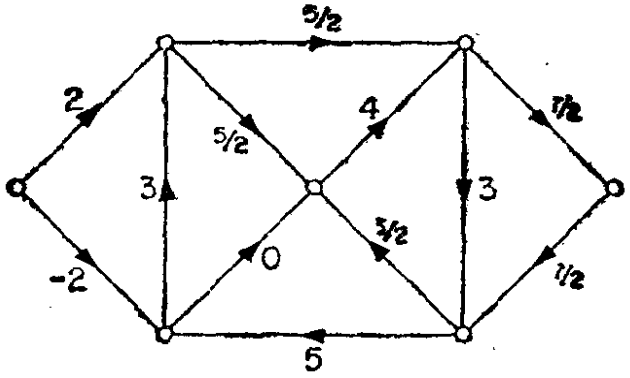


图 12.1　一个环流

若f和g是任意两个环流，r是任一实数，则容易验证$f+g$和rf也都是环流．于是，D中所有环流的集构成一个向量空间我们用$\mathscr{C}$表示这个空间．下面我们将发现，把A的子集S和由S导出的D的有向子图$D[S]$等同起来是方便的．

存在一类与D的圈相伴的特别有趣的环流．设C是D中具有指定方向的一个圈，C^+表示C中其方向与C的方向一致的那些弧的集．伴随于C，定义函数f_C为：

$$f_C(a) = \begin{cases} 1 & \text{若 } a \in C^+ \\ -1 & \text{若 } a \in C \backslash C^+ \\ 0 & \text{若 } a \notin C \end{cases}$$

显然，f_C满足(12.1)式，因而是一个环流．图 12.2 描述一个伴随于某圈的环流．

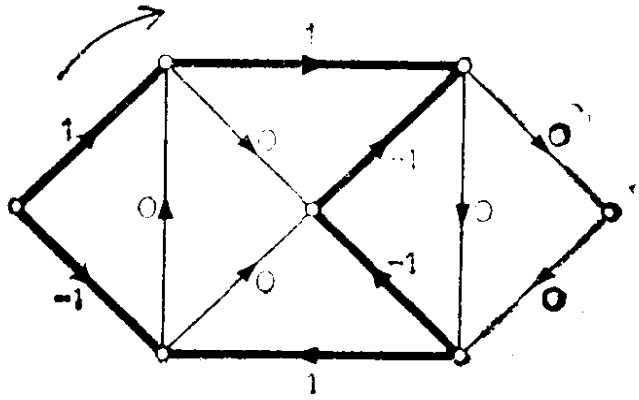


图 12.2

较后我们将看到，每个环流都是伴随于圈的环流的线性组合．由于这个理由，我们称 $\mathscr{C}$ 为 D 的圈空间．

现在我们把注意力转到有关的另一类函数上来．在 D 的顶点集 V 上给定一个函数 p，在弧集 A 上按下面的规则定义函数 δ_p，即：若弧 a 的尾为 x 而头为 y，则

$$\delta_p(a) = p(x) - p(y) \qquad (12.2)$$

若把 D 看作是在 v 处具有势 $p(v)$ 的电网络，则根据(12.2)式，δ_p 就表示沿着网络导线的势差．由于这个理由，A 上的函数 g 称为 D 中的势差如果 $g = \delta_p$ 对 V 上的某一函数 p 成立．图12.3 表示一个其顶点处具有指定势的有向图以及对应的势差．

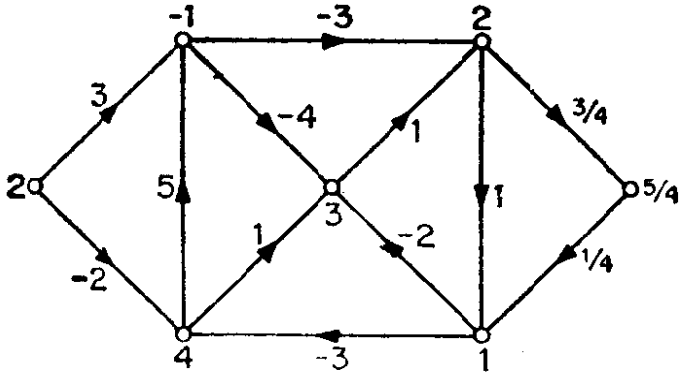


图 12.3 一个势差

和环流一样，D 中所有势差的集 $\mathscr{B}$ 在加法和数量乘法的运算下是封闭的，因此它也是一个向量空间．

和伴随于圈 C 的函数 f_C 相似，存在着伴随于键 B 的函数 g_B.

设 $B=[S,\bar{S}]$ 是D的一个键，定义 g_B 为：

$$g_B(a)=\begin{cases}1 & \text{若 } a\in(S,\bar{S})\\ -1 & \text{若 } a\in(\bar{S},S)\\ 0 & \text{若 } a\notin B\end{cases}$$

可以验证 $g_B=\delta p$，这里

$$p(v)=\begin{cases}1 & \text{若 } v\in S\\ 0 & \text{若 } v\in\bar{S}\end{cases}$$

图 12.4 描述一个伴随于某键的势差.

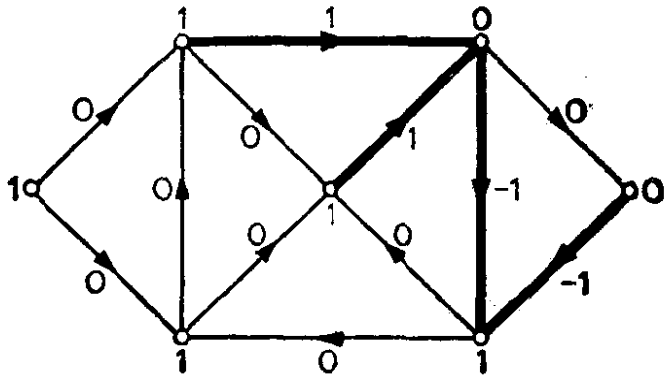


图 12.4

我们将看到，每个势差都是伴随于键的势差的线性组合. 由于这个理由，我们称 $\mathscr{B}$ 为 D 的键空间.

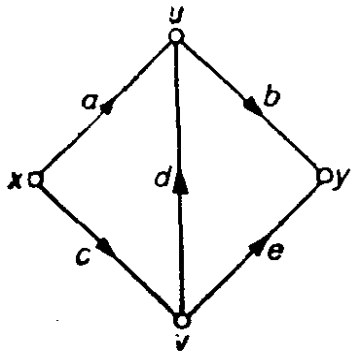
在研究两个向量空间 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 的性质时，我们将发现，把 A 上的函数看作是其坐标用 A 的元素来标记的行向量是方便的. $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 之间的关系通过引进 D 的关联矩阵可以看得很清楚. 伴随于 D 的每个顶点，在 A 上定义函数 m_v 为：

$$m_v(a)=\begin{cases}1 & \text{若 } a \text{ 是连杆且 } v \text{ 是 } a \text{ 的尾}\\ -1 & \text{若 } a \text{ 是连杆且 } v \text{ 是 } a \text{ 的头}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

D 的关联矩阵是指各行均为函数 m_v 的矩阵 $\boldsymbol{M}$. 图 12.5 表示一个有向图和它的关联矩阵.

定理 12.1 设 $\boldsymbol{M}$ 是有向图 D 的关联矩阵. 则 $\mathscr{B}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的行空间而 $\mathscr{C}$ 是这个行空间的正交补.

证 设 $g=\delta_p$ 是 D 的一个势差. 从 (12.2) 式推得



(a)

	a	b	c	d	e
x	1	0	1	0	0
u	-1	1	0	-1	0
v	0	0	-1	1	1
y	0	-1	0	0	-1

(b)

图 12.5 (a) D; (b) D的关联矩阵

$$g(a) = \sum_{v \in V} p(v) \cdot m_v(a), \quad \text{对所有 } a \in A \text{ 成立}$$

于是 g 是 $\boldsymbol{M}$ 的行的线性组合. 反之, $\boldsymbol{M}$ 的行的任何线性组合都是势差. 因此, $\mathscr{B}$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的行空间.

现在设 f 是 A 上的一个函数. 判断 f 是环流的条件(12.1)式可以改写为

$$\sum_{a \in A} m_v(a) f(a) = 0, \quad \text{对所有 } v \in V \text{ 成立.}$$

由此推得: f 是环流当且仅当 f 正交于 $\boldsymbol{M}$ 的每一行. 因此 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{B}$ 的正交补.

A 上函数 f 的支集是指 A 中使 f 的值不为零的那些元素的集. 我们用 $\|f\|$ 表示 f 的支集.

引理 12.2.1 若 f 是非零环流,则 $\|f\|$ 包含圈.

证 由于 $\|f\|$ 显然不能包含 1 度顶点,直接可得此引理.

引理 12.2.2 若 g 是非零势差,则 $\|g\|$ 包含键.

证 设 $g = \delta_p$ 是 D 的一个非零势差. 选择一个和 $\|g\|$ 中的弧相关联的顶点 $u \in V$, 并置

$$U = \{v \in V \mid p(v) = p(u)\}$$

由于对所有 $a \in [U, \bar{U}]$, $g(a) \neq 0$, 显然 $\|g\| \supseteq [U, \bar{U}]$. 但是根据 u 的选择, $[U, \bar{U}]$ 是非空的. 于是 $\|g\|$ 包含键.

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\mathscr{B}$ 的基矩阵,如果 $\boldsymbol{B}$ 的各行构成 $\mathscr{B}$ 的一个基; $\mathscr{C}$ 的基矩阵可以类似地定义. 我们将发现下面的记号是方便的.

若 $\boldsymbol{R}$ 是一个其列用 A 的元素标记的矩阵，并且 $S\subseteq A$，则用 $\boldsymbol{R}|S$ 表示 $\boldsymbol{R}$ 中由 S 的元素所标记的各列构成的子矩阵. 若 $\boldsymbol{R}$ 只有一行，我们的记号就和通常函数限制在它的定义域的子集上一样.

定理 12.2 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别是 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 的基矩阵，则对于任何 $S\subseteq A$，

(i) $\boldsymbol{B}|S$ 的各列线性无关当且仅当 S 不包含圈；

(ii) $\boldsymbol{C}|S$ 的各列线性无关当且仅当 S 不包含键.

证 用 $b(a)$ 表示 $\boldsymbol{B}$ 中对应于弧 a 的那一列. $\boldsymbol{B}|S$ 的各列线性相关当且仅当存在 A 上的函数 f，使得

$$f(a)\neq 0 \quad \text{对某一 } a\in S \text{ 成立}$$
$$f(a)=0 \quad \text{对所有 } a\notin S \text{ 成立}$$

以及

$$\sum_{a\in A} f(a)b(a)=0$$

由此可知：$\boldsymbol{B}|S$ 的各列线性相关当且仅当存在非零环流 f，使得 $\|f\|\subseteq S$. 于是，若存在这样的 f，则由引理 12.2.1 知 S 包含圈. 另一方面，若 S 包含圈 C，则 f_C 是适合 $\|f\|=C\subseteq S$ 的非零环流. 由此推得：$\boldsymbol{B}|S$ 的各列线性无关当且仅当 S 不包含圈. 利用引理 12.2.2，作类似的论证可得 (ii) 的证明.

推论 12.2 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 的维数由下列式子给出：

$$\dim \mathscr{B}=v-\omega \tag{12.3}$$
$$\dim \mathscr{C}=\varepsilon-v+\omega \tag{12.4}$$

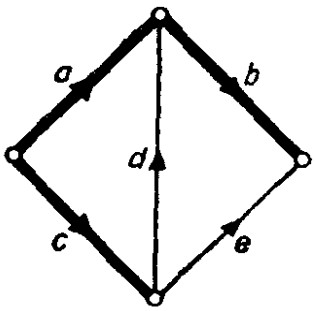
证 考察 $\mathscr{B}$ 的基矩阵 $\boldsymbol{B}$. 根据定理 12.2，

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\max\{|S|\,|\,S\subseteq A,\ S\text{ 不包含圈}\},$$

当 S 是 D 的最大森林时达到上面的最大值，因而(习题 2.2.4)等于 $v-\omega$. 由于 $\dim\mathscr{B}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，这就推得(12.3)式. 现在，由于 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{B}$ 的正交补，所以(12.4)式也成立.

设 T 是 D 的最大森林. 伴随于 T 的是 $\mathscr{C}$ 的一个特殊的基矩阵. 若 a 是 T 的一条弧，则 $T+a$ 包含唯一的圈. 用 C_a 表示这个圈，用 f_a 表示对应于 C_a 而使 $f_a(a)=1$ 的环流. 则其行是 $f_a(a\in$

$\bar{T}$)的 $(\varepsilon - \nu + \omega) \times \varepsilon$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是 $\mathscr{C}$ 的基矩阵. 这一点从 $\boldsymbol{C}$ 的每一行都是环流，以及 $\operatorname{rank} \boldsymbol{C} = \varepsilon - \nu + \omega$ (因为 $\boldsymbol{C}|\bar{T}$ 是单位矩阵)这两个事实即可推得. 我们把 $\boldsymbol{C}$ 认作对应于 T 的 $\mathscr{C}$ 的基矩阵. 图 12.6(b) 表示图 12.6(a) 的那棵树对应的 $\mathscr{C}$ 的基矩阵.



(a)

	a	b	c	d	e
f_d	-1	0	1	1	0
f_e	-1	-1	1	0	1

(b)

	a	b	c	d	e
g_a	1	0	0	1	1
g_b	0	1	0	0	1
g_c	0	0	1	-1	-1

(c)

图 12.6

类似地，若 a 是 T 的一条弧，则 $\bar{T} + a$ 包含唯一的键(见定理 2.6). 用 B_a 表示这个键，用 g_a 表示对应于 B_a 而使 $g_a(a) = 1$ 的势差. 则其行是 $g_a(a \in T)$ 的 $(\nu - \omega) \times \varepsilon$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是 $\mathscr{B}$ 的基矩阵，称为对应于 T 的 $\mathscr{B}$ 的基矩阵. 图 12.6(c) 给出这种矩阵的一个例子.

由于上述讨论而变得显而易见的圈和键之间的关系，在拟阵理论中找到了它的本质上的处理. 有兴趣的读者可以参阅 Tutte (1971) 的著作.

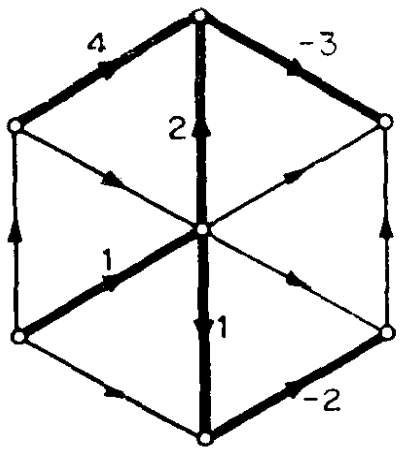
习　　题

12.1.1 (a) 在下列图 (i) 中给出定义在某生成树上的一个函数，在图 (ii) 中给出定义在该树的补图上的一个函数. 试扩充 (i) 中的函数使之成为势差，扩充 (ii) 中的函数使之成为环流.

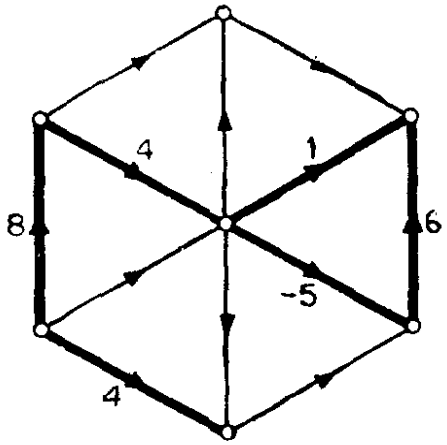
(b) 设 f 是 D 的环流而 g 是 D 的势差，T 是 D 的生成树. 证明: f 由 $f|\bar{T}$ 唯一确定，g 由 $g|T$ 唯一确定.

12.1.2 (a) 设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 的基矩阵，T 是 D 的任意一棵生成树. 证明: $\boldsymbol{B}$ 由 $\boldsymbol{B}|T$ 唯一确定，$\boldsymbol{C}$ 由 $\boldsymbol{C}|\bar{T}$ 唯一确定.

(b) 设 T 和 T_1 是 D 的两棵固定的生成树，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}_1$ 分别表示 $\mathscr{B}$ 的对应于树 T 和 T_1 的基矩阵，而 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}_1$ 分别表示 $\mathscr{C}$ 的对应于树 T 和 T_1



(i)



(ii)

的基矩阵. 证明: $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}|T_1)\boldsymbol{B}_1$ 以及 $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}|\overline{T}_1)\boldsymbol{C}_1$.

12.1.3 设 $\boldsymbol{K}$ 表示从连通有向图 D 的关联矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中删去任意一行所得到的矩阵. 证明: $\boldsymbol{K}$ 是 $\mathscr{B}$ 的基矩阵.

12.1.4 证明: 若 G 是平图,则 $\mathscr{B}(G) \cong \mathscr{C}(G^*)$, 以及 $\mathscr{C}(G) = \mathscr{B}(G^*)$.

12.1.5 在域 F 上 D 的一个环流是指一个函数 $f: A \to F$, 它在 F 中满足(12.1)式;在域 F 上 D 的一个势差可类似地定义. 这些势差和环流的向量空间用 $\mathscr{B}_F$ 和 $\mathscr{C}_F$ 表示. 证明: 若分别用 $\mathscr{B}_F$ 和 $\mathscr{C}_F$ 代替 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$, 定理 12.2 仍然成立.

12.2 生成树的数目

我们在本节中将得出关于图的生成树数目的公式.

设 G 是连通图, T 是 G 的一棵固定的生成树. 考察 G 的任一定向图 D, 并设 $\boldsymbol{B}$ 是 $\mathscr{B}$ 对应于 T 的基矩阵. 从定理 12.2 推得: 若 S 是 A 的具有 $|S| = \nu - 1$ 的子集,则子方阵 $\boldsymbol{B}|S$ 是非奇异的当且仅当 S 是 G 的生成树. 于是 G 的生成树的数目就等于 $\boldsymbol{B}$ 中阶为 $\nu - 1$ 的非奇异子矩阵的数目.

一个矩阵称为幺模的, 如果它的所有满阶子方阵的行列式都为 0, +1 或 −1. 下述定理的证明是由 Tutte (1965b) 提出的.

定理 12.3 基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是幺模的.

证 设 $\boldsymbol{P}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的满阶子方阵 (其阶为 $\nu - 1$). 假设 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}|T_1$. 我们可以假定 T_1 是 D 的生成树,因为否则,根据定理 12.2,

$\det \boldsymbol{P} = 0$. 设 $\boldsymbol{B}_1$ 表示 $\mathscr{B}$ 的对应于 T_1 的基矩阵. 则(习题 12.1.2(b))

$$(\boldsymbol{B}|T_1)\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}$$

两边限制于 T, 得

$$(\boldsymbol{B}|T_1)(\boldsymbol{B}_1|T) = \boldsymbol{B}|T$$

注意 $\boldsymbol{B}|T$ 是单位矩阵,并取行列式,得

$$\det(\boldsymbol{B}|T_1)\det(\boldsymbol{B}_1|T) = 1 \tag{12.5}$$

由于 (12.5) 式中两个行列式都是整数矩阵的行列式, 它们本身也都是整数. 由此推得 $\det(\boldsymbol{B}|T_1) = \pm 1$

定理 12.4 $$\tau(G) = \det \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' \tag{12.6}$$

证 利用两个矩阵乘积的行列式公式 (见 Hadly, 1961), 得

$$\det \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' = \sum_{\substack{S \subseteq A \\ |S| = \nu - 1}} (\det(\boldsymbol{B}|S))^2 \tag{12.7}$$

于是,根据定理 12.2, 在(12.7)式中非零项的数目等于 $\tau(G)$. 但是,根据定理 12.3, 每个这样的项的值均为 1, 所以(12.6)式成立.

可以类似地证明: 若 $\boldsymbol{C}$ 是 $\mathscr{C}$ 的对应于树的基矩阵,则 $\boldsymbol{C}$ 是幺模的,并且

$$\tau(G) = \det \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}' \tag{12.8}$$

推论 12.4 $$\tau(G) = \pm \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$$

证 根据 (12.6) 式和 (12.8) 式,有

$$(\tau(G))^2 = \det \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' \cdot \det \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}' = \det \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}' \end{array}\right]$$

由于 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 是正交的, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{0}$. 于是

$$(\tau(G))^2 = \det \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' & \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}' \\ \hline \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}' & \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}' \end{array}\right] = \det \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} \end{bmatrix} [\boldsymbol{B}' \vdots \boldsymbol{C}'] \right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \cdot \det[\boldsymbol{B}' \vdots \boldsymbol{C}'] = \left(\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \right)^2.$$

取平方根即得推论.

由于定理 12.2 对 $\mathscr{B}$ 的所有基矩阵都正确, 显然 (12.6) 式对

于是幺模的任何基矩阵也都成立. 特别地,删去关联矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的任意一行得到的矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是幺模的(习题 12.2.1(a)). 于是

$$\tau(G) = \det \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}'$$

这个关于图的生成树数目的表达式隐含在 Kirchhoff (1847) 的著作中,名为矩阵-树定理.

习　　题

12.2.1 证明:

(a)* 从 $\boldsymbol{M}$ 中删去任意一行得到的矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是幺模的;

(b) $\tau(G) = \pm \det \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{K} \\ \hline \boldsymbol{C} \end{array}\right]$.

12.2.2 无环图 G 的传导矩阵 $\boldsymbol{C} = [c_{ij}]$ 是指 $v \times v$ 矩阵,

其中

$$c_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} \quad \text{对所有 } i \text{ 成立}$$

$$c_{ij} = -a_{ij} \quad \text{对所有 } i \neq j \text{ 的 } i \text{ 和 } j \text{ 成立}$$

这里 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 是 G 的邻接矩阵. 证明:

(a) $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}'$, 这里 $\boldsymbol{M}$ 是 G 的任一定向图的关联矩阵;

(b) $\boldsymbol{C}$ 的所有余因子均等于 $\tau(G)$.

12.2.3 一个矩阵是全幺模的,是指它的所有子方阵的行列式都为 0, +1 或 −1. 证明:

(a) $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 对应于树的任何基矩阵都是全幺模的;

(b) 简单图 G 的关联矩阵是全幺模的当且仅当 G 是偶图.

12.2.4 设 F 是特征数 p 的域. 证明:

(a) 若 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别是 $\mathscr{B}_F$ 和 $\mathscr{C}_F$ 对应于树的基矩阵,则

$$\det \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} \end{array}\right] = \tau(G) \pmod{p};$$

(b) $\dim(\mathscr{B}_F \cap \mathscr{C}_F) > 0$ 当且仅当 $p \mid \tau(G)$. (H. Shank)

应　　用

12.3 完美正方形

方化矩形是指可以分割成至少两个(但为有限数)正方形的矩

形．若分割出的任意两个正方形的大小均不相等，则称这个方化矩形是完美的．方化矩形的阶是指它被分割成的那些正方形的数目．图 12.7 表示一个阶为 9 的完美矩形．一个方化矩形是简单的，是指它不能分割成至少两个方化矩形．显然，每个方化矩形均由简单方化矩形所组成．

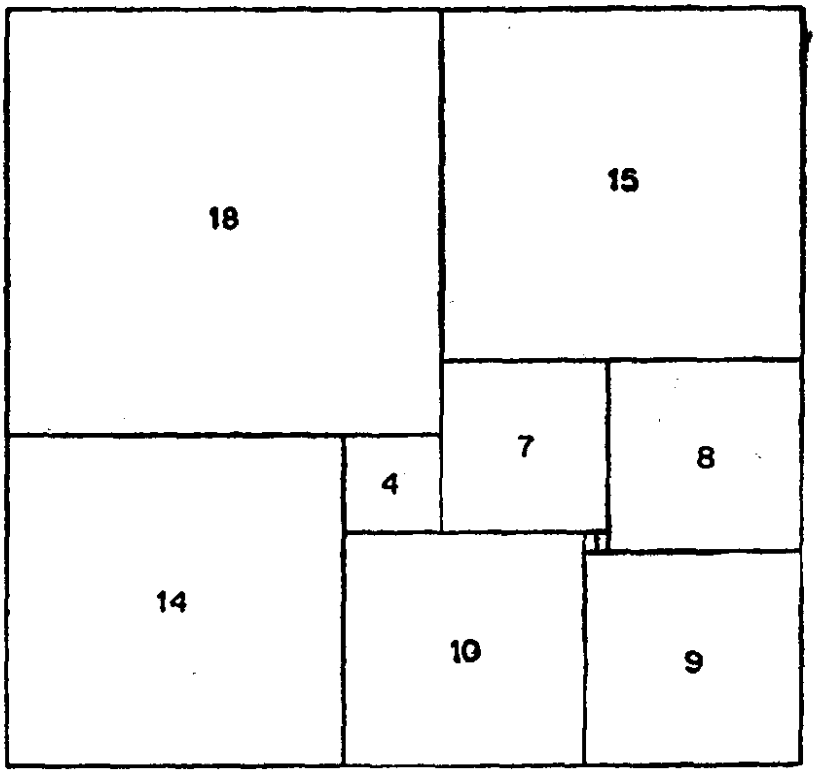
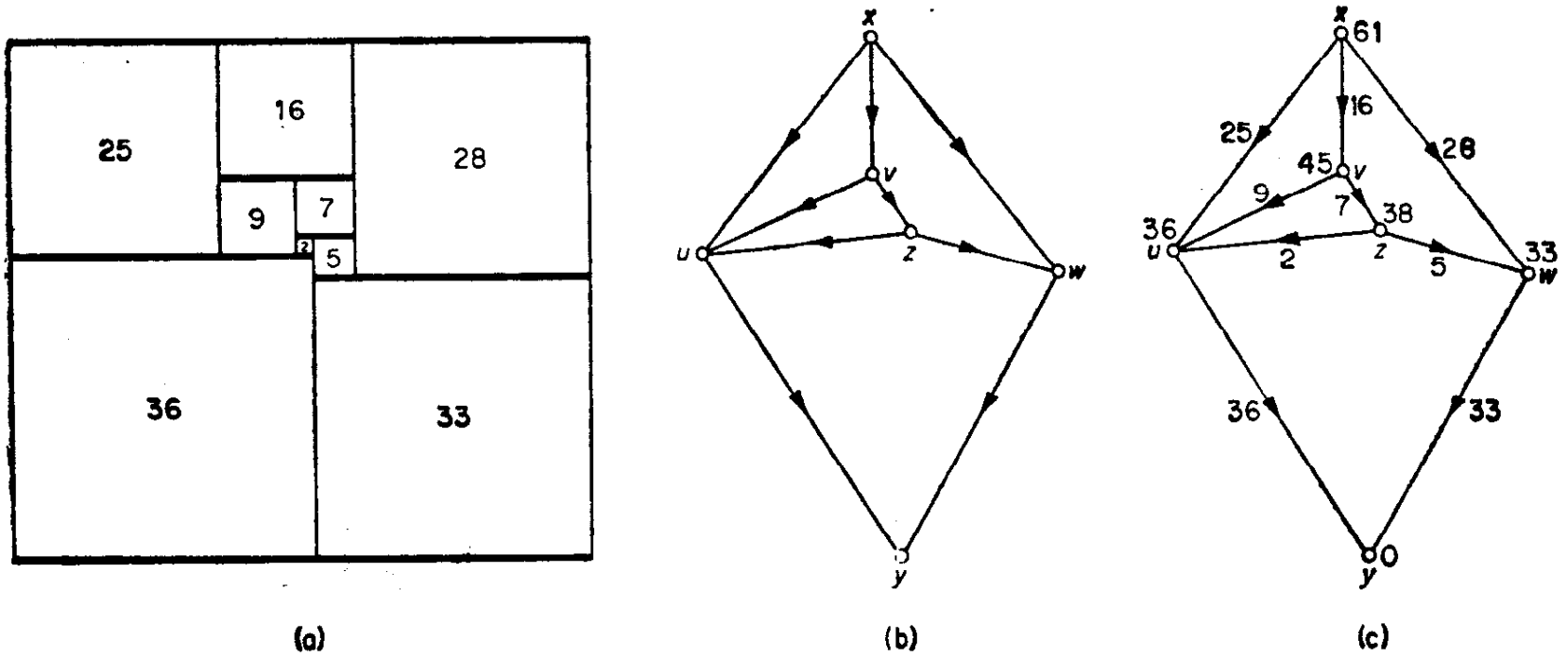


图 12.7　一个完美矩形

在很长一段时间内人们不知道有完美正方形，并猜测不存在这样的正方形．Sprague（1939）首次发表了一个完美正方形的例子．大约同时，Brooks 等人（1940）利用图的理论把完美正方形的构造发展成系统化的方法．我们在本节中对于他们的方法做个简短的讨论．

我们首先说明一个有向图怎样和一个给定的方化矩形 R 联系起来．R 分割成的那些正方形的水平边的并集由水平线段所组成，每条这样的线段称为 R 的水平分割线．在图 12.8(a) 中，水平分割线用粗线标出．现在可以定义一个伴随于 R 的有向图 D：R 的每一条水平分割线对应于 D 的一个顶点；D 的两个顶点 v_i 和 v_j



(a) (b) (c)

图 12.8

连以一弧 (v_i, v_j)，当且仅当它们对应的水平分割线 H_i 和 H_j 从上下两侧夹着分割的某个正方形，并且在 R 中 H_i 位于 H_j 之上. 图 12.8(b) 表示伴随于图 12.8(a) 中的方化矩形的有向图. 对应于 R 的上底和下底的顶点称为 D 的极，并且分别用 x 和 y 表示.

现在对于 D 的每个顶点确定一个势 $p(v)$，它等于对应的水平分割线的高(超过 R 的下底的高度). 如果把 D 看作是一个电网络，其中每条导线都有单位电阻，则势差 $g = \delta_p$ 确定了从 x 到 y 的电流的流(见图 12.8(c)). 这些电流满足 Kirchhoff 电流定律：进入顶点 $v \in V\backslash\{x, y\}$ 的电流总量等于离开它的电流总量. 例如，在图 12.8(c) 中进入 u 的总量是 $25 + 9 + 2 = 36$，和离开这个顶点的总量相同.

设 D 是对应于方化矩形 R 的有向图，极为 x 和 y，并设 G 是 D 的基础图. 则图 $G + xy$ 称为 R 的水平图. Brooks 等人 (1940) 证明：任何简单方化矩形的水平图都是 3 连通平面图 (他们的连通度定义和本书中用到的连通度的定义稍有不同). 他们还证明：反之，若 H 是 3 连通平面图，并且 $xy \in E(H)$，则在 $H - xy$ 中，任一从 x 到 y 的电流都确定一个方化矩形. 于是，寻找 n 阶完美矩形的一个可能的方法是：

(i) 列出所有具有 $(n + 1)$ 条边的 3 连通平面图，并且

(ii) 对于每个这样的图 H 以及 H 的每条边 xy，在 $H - xy$ 中确定一个从 x 到 y 的电流.

Tutte (1961) 证明：每个 3 连通平面图都可以在一个轮中通过一系列面的剖分和取对偶的运算而得到. Bouwkamp, Duijvestijn 和 Medema (1960) 则应用 Tutte 的定理列出了所有最多具有 16 条边的 3 连通平面图. 这里，我们将看到在 12.1 节和 12.2 节中介绍的定理如何用来计算有向图 D 中从 x 到 y 的电流.

设 $g(a)$ 表示 D 的在弧 a 上的电流，并假设离开 x 的总电流是 σ. 则

$$\sum_{a \in A} m_x(a) g(a) = \sigma \tag{12.9}$$

Kirchhoff 电流定律可以表述为:

$$\sum_{a\in A} m_v(a)g(a)=0,\quad \text{对所有 } v\in V\backslash\{x,y\} \text{ 成立} \tag{12.10}$$

由于 g 是势差,它正交于每个环流,所以

$$\boldsymbol{C}g'=\boldsymbol{0} \tag{12.11}$$

这里,$\boldsymbol{C}$ 是 $\mathscr{C}$ 的对应于 D 的树 T 的基矩阵,而 g' 是向量 g 的转置. 方程 (12.9)—(12.11) 一起给出矩阵方程

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}\\ \cdots\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}g'=\begin{bmatrix}\sigma\\ \cdots\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{12.12}$$

这里,$\boldsymbol{K}$ 是从 $\boldsymbol{M}$ 中删去行 m_y 得到的矩阵. 这个矩阵方程可以用 Cramer 法则求解. 注意,由于 $\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}\\ \cdots\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}=\pm\tau(G)$ (习题 12.2.1(b)),所以当 $\sigma=\tau(G)$ 时得整数解. 于是,在计算电流时,取离开 x 的总电流等于 D 的生成树的数目是适宜的.

我们用一个例子来说明上述过程. 考察图 12.9(a) 中的 3 连通平面图. 删去边 xy 并给每条边指定方向,即得图 12.9(b) 的有向图 D.

可以核对 D 中生成树的数目是 66. 考察树 $T=\{a_1,a_2,a_3,$

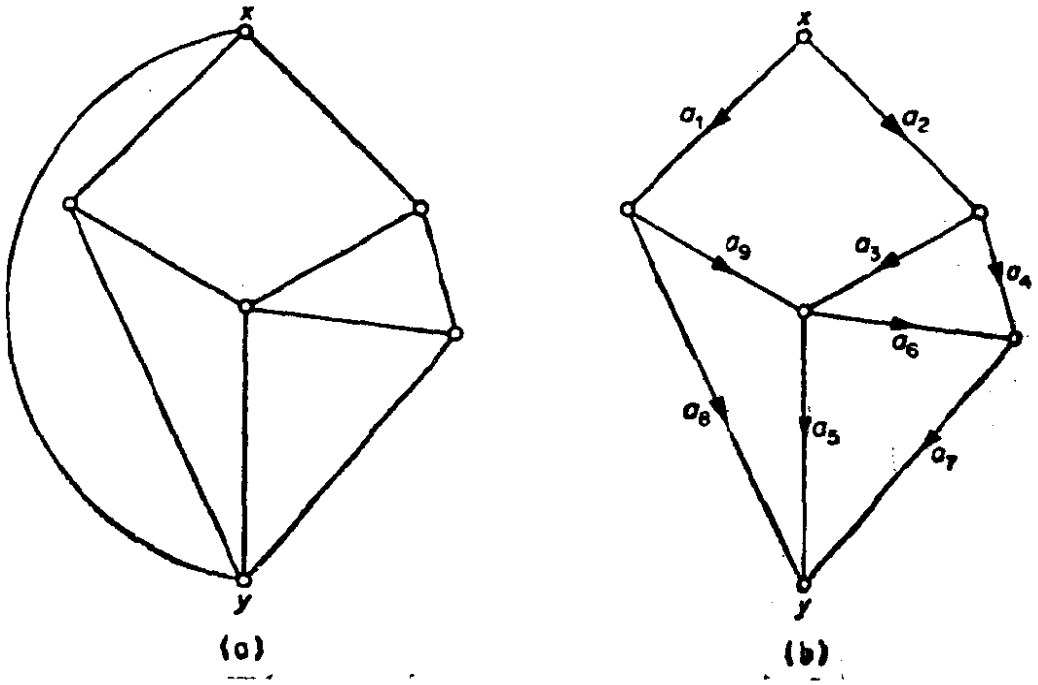


图 12.9

$a_4, a_5\}$，得到如(12.12)式所示的下述九个方程（把 $g(a_i)$ 简写为 g_i）：

$$
\begin{aligned}
g_1 + g_2 &= 66\\
g_1 - g_8 - g_9 &= 0\\
g_2 - g_3 - g_4 &= 0\\
g_3 - g_5 - g_6 + g_9 &= 0\\
g_4 + g_6 - g_7 &= 0\\
g_3 - g_4 + g_6 &= 0\\
-g_3 + g_4 - g_5 + g_7 &= 0\\
g_1 - g_2 - g_3 - g_5 + g_8 &= 0\\
g_1 - g_2 - g_3 + g_9 &= 0
\end{aligned}
$$

这个方程组的解是

$$
\begin{aligned}
&(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9)\\
&\quad = (36, 30, 14, 16, 20, 2, 18, 28, 8)
\end{aligned}
$$

基于这个电流的方化矩形恰好是把图 12.7 的所有尺寸都加倍而

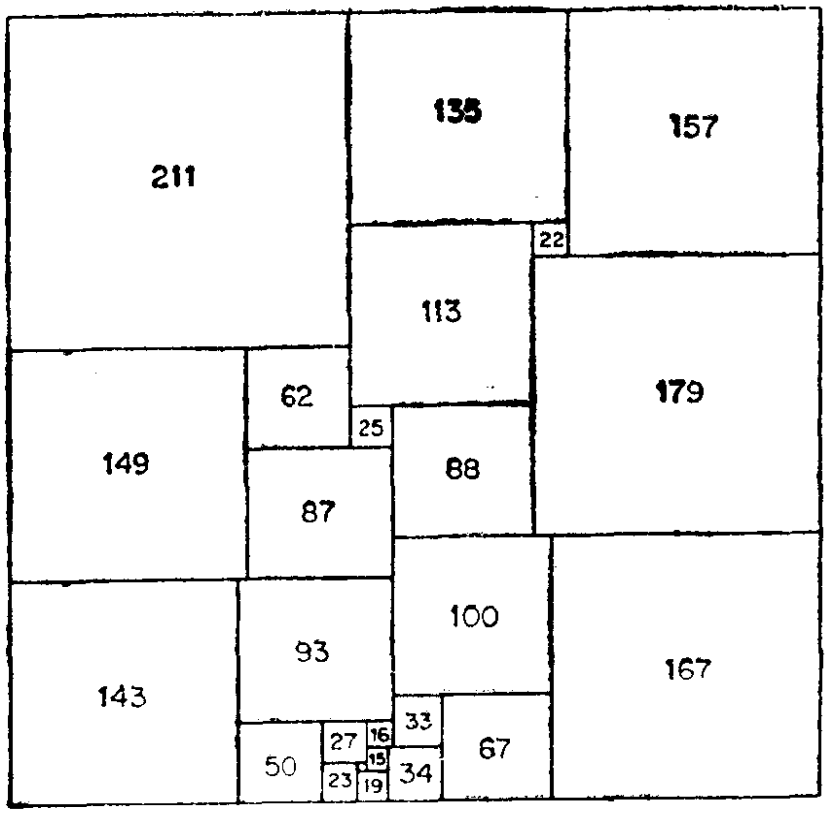


图12.10　阶为25的一个简单完美正方形

得到的矩形.

图 12.10 表示阶为 25 的简单完美正方形.它是 Wilson(1967)发现的,并且是目前所知的最小(阶最小)的这种正方形.

关于完美正方形的进一步结果可在 Tutte (1965a) 的综述文章中找到.

习　　题

12.3.1　证明: 在方化矩形中,组成矩形的各个正方形有可公度的边.

12.3.2　方化矩形 R 的垂直图是指把 R 旋转一个直角得到的方化矩形的水平图. 如果 R 中没有任何点是组成 R 的四个正方形的公共隅角, 试证: R 的水平图和垂直图互为对偶图.

12.3.3* 完美立方体是指一个可分割成有限个较小立方体而任意两个小立方体的大小均不相等. 证明: 不存在完美立方体.

参 考 文 献

Bouwkamp, C. J. Duijvestijn, A. J. W. and Medema, P. (1960). *Tables Relating to Simple Squared Rectangles of Orders Nine through Fifteen,* Technische Hogeschool, Eindhoven

Brooks, R. L. Smith, C. A. B., Stone, A. H. and Tutte, W. T. (1940). The dissection of rectangles into squares. *Duke Math. J.*, 7, 312—40

Hadley, G. (1961). *Linear Algebra,* Addison-Wesley, Reading Mass.

Kirchhoff, G. (1847). Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, *Ann. Phys. Chem.*, 72, 497—508

Sprague, R. (1939). Beispiel einer Zerlegung des Quadrats in lauter verschiedene Quadrate, *Math. Z.*, 45, 607—8

Tutte, W. T. (1961). A theory of 3-connected graphs. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, 23, 441—55

Tutte, W. T. 1965a). The quest of the perfect square, *Amer. Math. Monthly,* 72, 29—35

Tutte, W. T. (1965b). Lectures on matroids. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B,* 69, 1—47

Tutte, W. T. (1971). *Introduction to Matroid Theory,* Elsevier, New York

Wilson, J. C. (1967). *A Method for Finding Simple Perfect Square Squarings.* Ph. D. Thesis, University of Waterloo

附录 1　带星号习题的提示

1.2.9(b)　若 $G\cong T_{m,n}$，则 G 必有大小为 $n_1, n_2, \cdots, n_m$ 的 m 个部分，其中某个 i 和 j 适合 $n_i - n_j > 1$. 证明：具有大小为 $n_1, n_2, \cdots, n_i - 1, \cdots, n_j + 1, \cdots, n_m$ 的 m 个部分的完全 m 部图必定有比 G 更多的边.

1.3.3　用邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的术语来说，G 的自同构是使 $\boldsymbol{PAP}' = \boldsymbol{A}$，或者等价地，是使 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{AP}$（因为 $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}^{-1}$）成立的置换矩阵 $\boldsymbol{P}$. 证明：若 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量，则对于 G 的任一自同构 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Px}$ 也是 G 的自同构. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的各个特征值是相异的，并且 $\boldsymbol{P}$ 是正交的，所以对所有特征向量 $\boldsymbol{x}$ 均有 $\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

1.4.5　假设 G 的所有 n 个顶点的导出子图都有 m 条边. 证明：对于任意两个顶点 v_i 和 v_j，均有

$$\varepsilon(G) - d(v_i) = \varepsilon(G - v_i) = m \cdot \binom{v-1}{n} \Big/ \binom{v-3}{n-2},$$

$$\varepsilon(G) - d(v_i) - d(v_j) + a_{ij}$$

$$= \varepsilon(G - v_i - v_j) = m \cdot \binom{v-2}{n} \Big/ \binom{v-4}{n-2},$$

这里，$a_{ij} = 1$ 或 0 由 v_i 和 v_j 相邻或不相邻而定. 试证：a_{ij} 与 i 和 j 无关.

1.5.7(a)　为了证明必要性，首先证明：若 G 是简单图，并且 u_1v_1，$u_2v_2 \in E$ 而 u_1v_2，$u_2v_1 \notin E$，则 $G - \{u_1v_1, u_2v_2\} + \{u_1v_2, u_2v_1\}$ 具有和 G 相同的度序列. 再以此证明：若 $\boldsymbol{d}$ 是图的序列，则存在简单图 G，其 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 适合 (i) $d(v_i) = d_i$

对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 成立，(ii) v_1 与 $v_2, v_3, \cdots, v_{d_1+1}$ 均相连．于是图 $G - v_1$ 具有度序列 $\boldsymbol{d}'$.

1.5.8 证明：具有最大可能边数的偶子图有这个性质.

1.5.9 在 S 上定义一个图，其中 x_i 和 x_j 相邻当且仅当它们的距离为 1．证明：在这个图中各个顶点的度最多是 6.

1.7.3 考察一条最长路以及和这条路的起点相邻的各个顶点.

1.7.6(b) 用反证法．设 G 是一个最小的反例，证明：(i) G 的围长至少是 5，并且 (ii) $\delta \geqslant 3$．试证 $\nu \leqslant 8$ 并且证明不存在这样的图.

2.1.10 为了证明充分性，考察具有度序列 $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 并有尽可能少的分支的图 G．若 G 不连通，则证明：通过边的适当调换（和对习题 1.5.7(a) 的提示一样），存在以 $\boldsymbol{d}$ 为度序列而比 G 有更少分支的图.

2.2.12 定义一个标号图 G 如下：G 的顶点是子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，而且当 $A_i = A_j \cup \{a\}$ 或者 $A_i = A_j \cup \{a\}$ 时用标有 a 的边把 A_i 和 $A_j (i \neq j)$ 连接起来．对于 G 的任意子图 H，设 $L(H)$ 是 H 的各边的标号集．证明：若 F 是 G 的最大森林，则 $L(F) = L(G)$．在 $S \backslash L(F)$ 中的任何元素 x 都具有所需要的性质.

2.4.2 定理 2.8 的若干次应用产生递推关系式

$$w_n - 4w_{n-1} + 4w_{n-2} - w_{n-3} = 0^{1)},$$

这里，w_n 是有 n 根辐的轮中生成树的数目．解这个递推关系式.

3.2.6 添加两个顶点 x 和 y，并把 x 和 X 中的所有顶点以及 y 和 Y 中的所有顶点连接起来，构成新图 G'．证明 G' 是 2 连通的，并应用定理 3.2.

3.2.7(a) 对 ε 用归纳法．设 $e_1 \in E$．若 $G \cdot e_1$ 是临界块，则 $G \cdot e_1$ 有一个 2 度顶点，并且因此 G 也有 2 度顶点．若 $G \cdot e_1$

---

1) 原文是 $w_n - 4w_{n-1} + 4w_{n-2} - 1 = 0$，有误．——译者注

不是临界的，则存在边 $e_2 \in E\backslash\{e_1\}$，使 $(G \cdot e_1) - e_2$ 是块．利用 $(G \cdot e_1) - e_2 = (G - e_2) \cdot e_1$ 的事实，证明：e_1 和 e_2 在 G 中与一个 2 度顶点关联．

(b) 利用 (a) 以及对 v 的归纳法．

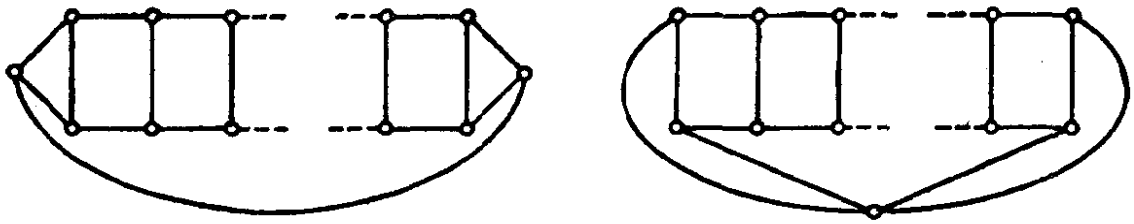
4.1.6 必要性：若 $G - v$ 包含圈 C，则考察 $G - E(C)$ 中包含 v 的那个分支的一条 Euler 环游(以 v 为起点)．充分性：设 Q 是 G 的 (v, w) 一迹，但不是 Euler 环游．证明：$G - E(Q)$ 恰有一个非平凡分支．

4.2.4 添加一个新顶点并把它和 G 的每个顶点都连接起来构成新图 G'．证明：G 有 Hamilton 路当且仅当 G' 有 Hamilton 圈，并且应用定理 4.5．

4.2.6 添加边以使 $G'[X]$ 为完全图，构成新图 G'．证明：G 为 Hamilton 图当且仅当 G' 为 Hamilton 图，并且应用定理 4.5．

4.2.9 设 P 是 G 中最长路．设 P 的长 $l < 2\delta$，则利用定理 4.3 的证明技巧来证明 G 有长为 $l + 1$ 的圈，然后再利用 G 连通的事实来得到矛盾．

4.2.11(b)



v 是偶数　　v 是奇数

4.2.13 利用 Petersen 图是超 Hamilton 图(习题 4.2.12)的事实．

4.4.1 考察重复 T 的各条边所构成的那个赋权图的 Euler 环游 Q．利用三角不等式以便从 Q 中得到 G 的一条权最多是 $w(Q)$ 的 Hamilton 圈．

5.1.5(a) 为了证明 K_{2n} 是 1 可因子分解的，把各个顶点安排成以一个顶点为中心的正 $(2n - 1)$ 边形．每条径向边连同垂直于它的各边是一个完美对集．

5.1.6　把各顶点记为 0，1，2，…，$2n$，并把顶点 1，2，…，$2n$ 安排在以 0 为中心的圆上．设 $C=(0,1,2,2n,3,2n-1,4,2n-2,\cdots,n+2,n+1,0)$，并考察 C 的各种旋转．

5.2.3(b)　设 G 是具有 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 的 $2k$ 正则图，不失一般性，假定 G 是连通的．设 C 是 G 的 Euler 环游．根据下述规则构作具有二分类 (X,Y) 的偶图 G'，这里 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，即：在 C 上每当 v_i 直接居于 v_j 之前，就把 x_i 和 y_j 连接起来．证明：G' 是 1 可因子分解的，并且因此而证得 G 是 2 可因子分解的．

5.2.8　构作一个具有二分类 (X,Y) 的偶图 G，其中 X 是 Q 的各行的集，Y 是 Q 的各列的集，并且行 i 和列 j 相连当且仅当元素 q_{ij} 是正数，证明 G 有完美对集，然后对 Q 的非零元素的数目用归纳法．

5.3.1　设 G 是具有二分类 (X,Y) 的偶图．假定 v 是偶数（v 是奇数的情形需要作一点修改）．在 G 中把 Y 中的所有顶点对连接起来得到图 H．G 有饱和 X 中的每个顶点的对集当且仅当 H 有完美对集．

5.3.4　设 G^* 是其最大对集的边数和 G 的最大对集的边数相同的 G 的最大生成母图．利用定理 5.4 的证明技巧来证明：若 U 是 G^* 中度为 $v-1$ 的顶点集，则 G^*-U 是完全图的不相交并图．

6.2.1　见习题 5.1.5(a) 的提示．

6.2.8　利用定理 6.2 的证明技巧．

7.1.3(b)　设 $v_1v_2\cdots v_n$ 是 G 的最长路．证明 $G-v_2$ 最多有一个非平凡的分支，并且对 ε 用归纳法．

7.2.6(b)　设 $p(m-1)=n-1$．每个部分均有 $m-1$ 个顶点的完全 $(p+1)$ 部图说明 $r(T,K_{1,n})>(p+1)(m-1)=m+n-2$．为了证明 $r(T,K_{1,n})\leqslant m+n-1$，可证明：$\delta\geqslant m-1$ 的任何简单图 G 都包含 m 个顶点的每一棵树 T．

(c) 每个部分均有 $m-1$ 个顶点的完全 $(n-1)$ 部图说明

$r(T, K_n) > (m-1)(n-1)$. 为了证明 $r(T, K_n) \leqslant (m-1)(n-1)+1$，利用关于 n 的归纳法以及 $\delta \geqslant m-1$ 的任何简单图都包含 m 个顶点的每一棵树 T 的事实.

7.3.3(c) 假定 G 不包含三角形. 在 G 中选择一条最短的奇圈 C. 证明: $V(G)\backslash V(C)$ 中的每个顶点最多能和 C 的两个顶点相连. 应用习题 7.3.3(a) 于 $G-V(C)$，得到矛盾.

7.3.4(a) G 包含 $K_{2,m}$ 当且仅当 G 中存在 m 个具有一对公共邻点的顶点. 任何顶点 v 有 $\binom{d(v)}{2}$ 对邻点. 所以，若 $\sum_{v \in V}\binom{d(v)}{2} > (m-1)\binom{v}{2}$，则 G 包含 $K_{2,m}$.

7.5.1 由 $V(G)=\{x_1, \cdots, x_n\}$ 和 $E(G)=\{x_ix_j \mid d(x_i, x_j)=1\}$ 来定义图 G，并证明: 若 G 的所有边都画成直线段，则 (i) G 的任何两条边或者相邻或者相交，以及 (ii) 若 G 的某一顶点的度大于 2，则它必相邻于一个 1 度顶点. 然后，对 n 用归纳法证 (a).

8.1.6 设 $\mathscr{C}=(V_1, V_2, \cdots, V_k)$ 是 G 的一个 k 着色，而 $\mathscr{C}'$ 是 G 的一个其每个颜色组至少包含两个顶点的着色. 若 $|V_i| \geqslant 2$ 对所有 i 成立，则无需证明就知道原命题是正确的，故假定 $V_1=\{v_1\}$. 设 $u_2 \in V_2$ 是 $\mathscr{C}'$ 中和 v_1 染有相同颜色的顶点. 显然 $|V_2| \geqslant 2$. 若 $|V_2| > 2$，则把 u_2 移给 V_1. 否则，设 v_2 是 V_2 中的另一顶点. 在 $\mathscr{C}'$ 中，v_1 和 v_2 必然被分配以不同的颜色. 设 $u_3 \in V_3$ 是 $\mathscr{C}'$ 中和 v_2 染有相同颜色的顶点. 和前面一样，$|V_3| \geqslant 2$. 以此方法进行下去，最后必然找到一个 $|V_i| > 2$ 的集 V_i. 于是 G 可以重新着色，以使更少的颜色组仅包含一个顶点.

8.1.13(a) 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 分别是 $G[X]$ 和 $G[Y]$ 的 n 着色. 根据下述规则构作一个具有二分类 $(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \{y_1, y_2, \cdots, y_n\})$ 的偶图 H: 连接 x_i 和 y_j 当且仅当 G 中边割 $[X_i, Y_j]$ 为空集. 利用习题 5.2.6(b) 证明 H 有完美对集. 若在完美对集之下 x_i 和 $y_{f(i)}$ 是配对的，

则设 $V_i = X_i \cup Y_{f(i)}$. 证明 $(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ 是 G 的 n 着色.

8.3.1 证明只要考察 2 连通图就够了. 在 G 中选择一条最长的圈 C, 并证明: 和定理 8.5 一样, 存在两条跨越 C 的路.

8.3.2(a) 若 $\delta \geqslant 3$, 则利用习题 8.3.1. 若存在度小于 3 的顶点, 则删去它并利用归纳法.

8.4.8 考察以完全图的色多项式的术语表达的 $\pi_k(G)$ 的展开式.

8.5.2(a) 容易验证 H 的围长至少为 6. 若 H 是 k 可着色的, 则存在 S 的 v 元子集, 它的所有元素都染有相同的颜色. 考察 G 的对应拷贝并获得矛盾.

9.2.8 对偶图 G^* 是 2 边连通和 3 正则的, 并且因此(推论 5.4)它有完美对集 M. $(G^* - M)^*$ 是 G 的偶子图.

10.2.2 根据下述规则在相同顶点集上构作一个新有向图: 若 D 中 v 从 u 出发可到达, 则把 u 连到 v, 并且应用推论 10.1.

10.2.5 设 D_1 和 D_2 是 D 的生成有向子图, 使得: 当 D 的弧 (u, v) 适合 $f(u) \leqslant f(v)$ 时, 则弧 (u, v) 属于 D_1, 当 D 的弧 (u, v) 适合 $f(u) > f(v)$ 时, 则弧 (u, v) 属于 D_2. 证明: 或者 $\chi(D_1) > m$, 或者 $\chi(D_2) > n$, 并且应用定理 10.1.

10.3.4 设 $v_1v_2\cdots v_{2n+1}v_1$ 是奇圈. 若 $(v_i, v_{i+1}) \in A$, 则置 $P_i = (v_i, v_{i+1})$; 若 $(v_i, v_{i+1}) \notin A$, 则设 P_i 是有向 (v_i, v_{i+1}) 路. 若某个 P_i 的长是偶数, 则 $P_i + (v_{i+1}, v_i)$ 是有向奇圈; 否则, $P_1P_2\cdots P_{2n+1}$ 是长为奇数的有向闭迹, 并且因而包含有向奇圈.

11.3.5 利用在定理 11.6 的证明中给出的构作方法, 并且给弧 (v', v'') 分配容量 $m(v)$.

11.4.4 利用关于 k 的归纳法和习题 11.4.3.

11.5.4 利用类似于习题 1.5.7 中的论证.

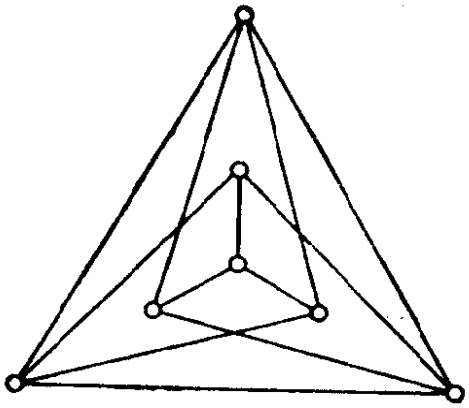
11.5.5(a) 把入度为 m 的顶点集取为 V_1, 把入度为 n 的顶点集取为 V_2, 即可推得必要性. 为了证明充分性, 构作一个网络 N 如下: 作 G 的伴随有向图, 给它的各条弧分配单位容量, 并把

V_1 的元素当作发点，而把 V_2 的元素当作收点．由定理 11.8，N 中存在流 f（可以假定它为整的），其中在各个发点上的供给和在各个收点上的需求均为 $|m-n|$．各 f 饱和弧导出 G 的子图 H 上的 (m, n) 定向图．现在给余留下来的边以 Euler 定向，就可以得到 G 的 (m, n) 定向图．

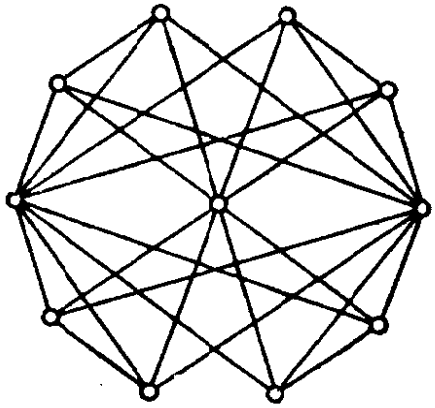
12.2.1(a) 对子矩阵的阶用归纳法．设 $\boldsymbol{P}$ 是一个子方阵．若 $\boldsymbol{P}$ 的各列含有两个非零元素，则 $\det \boldsymbol{P}=0$．否则，按只有一个非零元素的列展开 $\det \boldsymbol{P}$，并且应用归纳法假设．

12.3.3 首先证明：在任何完美矩形中，最小的组成正方形都不在这个完美矩形的周界上．然后假设存在一个完美立方体并考察基于这个立方体而由各组成立方体所导出的那个完美正方形．

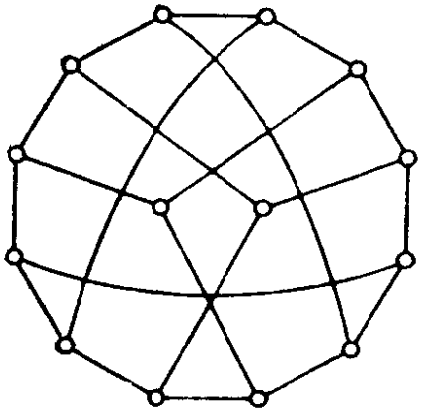
附录 II　四个图及其特性表



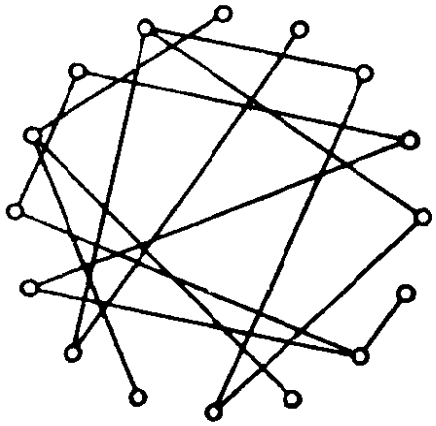
G_1



G_2



G_3



G_4

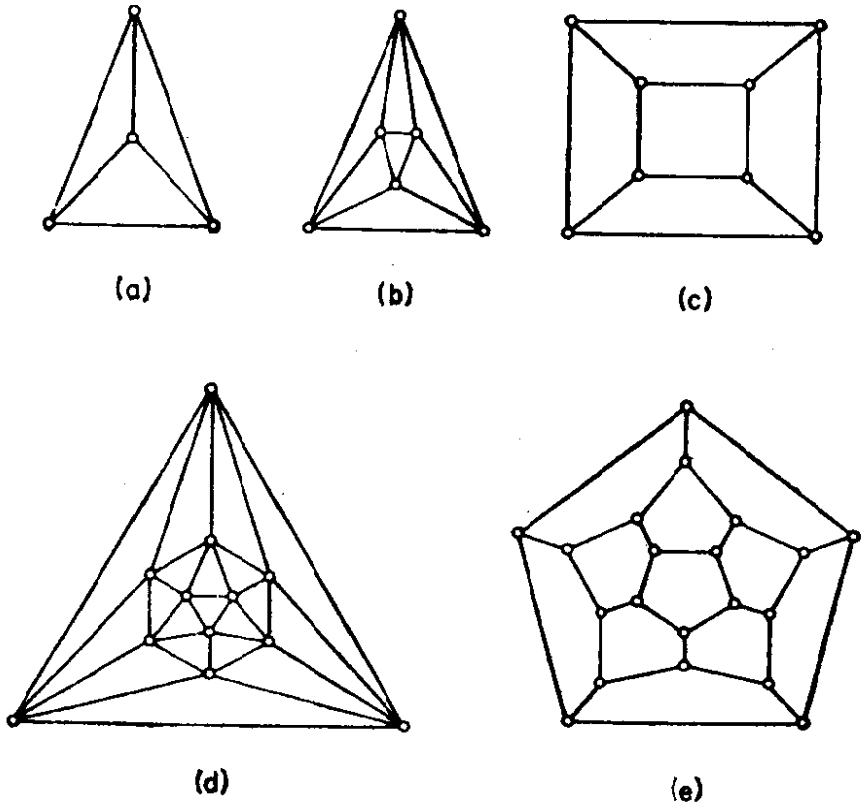
	ν	ε	δ	Δ	ω	κ	κ'	α	α'	β	β'	χ	χ'	直径	圈长	是偶图吗？	是 *Euler* 图吗？	是 *Hamilton* 图吗？	是临界图吗？	是平面图吗？
G_1	7	12	3	4	1	3	3	3	3	4	4	4	4	2	3	否	否	是	是	是
G_2	11	28	4	8	1	3	4	4	5	7	6	3	8	2	3	否	是	否	否	否
G_3	14	21	3	3	1	3	3	7	7	7	7	2	3	3	6	是	否	是	否	否
G_4	16	15	1	3	3	0	0	9	7	7	9	3	3	∞	4	否	否	否	否	是

附录 III　一些有趣的图

有一些由于结构特殊而很有趣的图．我们已经遇到过一些这样的图(例如 Grinberg 图，Grötzsch 图，Herschel 图和 Ramsey 图)．这里挑选了另外一些有趣的图和图族．

柏拉图图

这些图的顶点和边都是正多面体的顶点和边（见 Fréchet 和 Fan, 1967)．

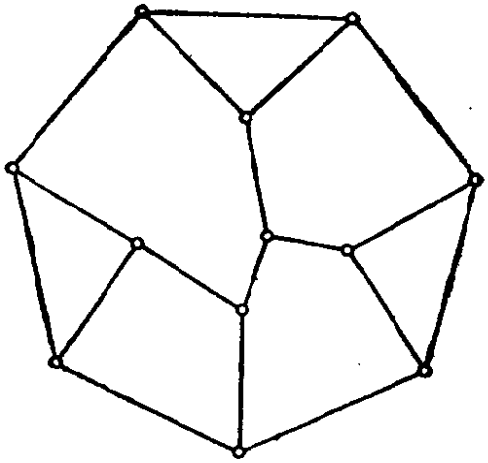


(a) 四面体；(b) 八面体；(c) 立方体；(d) 二十面体；(e) 十二面体．

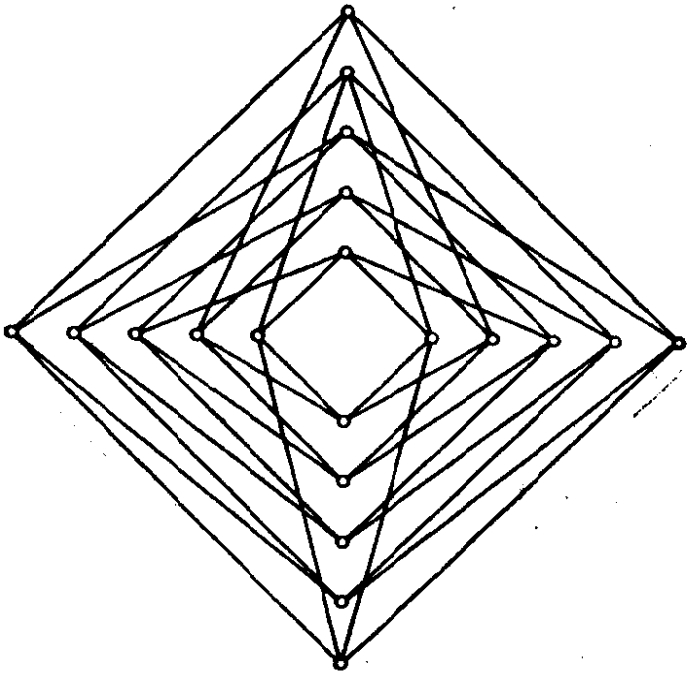
自同构群

(i) 正如已经指出过的那样（习题 1.2.12)，每一个群都同构

于某个图的自同构群．事实上，Frucht（1949）证明：对于任意一个群，均存在以它为自同构群的 3 正则图．其自同构群为单位元素群的最小 3 正则图如下：



（ii）Folkman（1967）证明：每个边可迁但不是顶点可迁的正则图至少有 20 个顶点．这个结果是最佳可能的．



Folkman 图

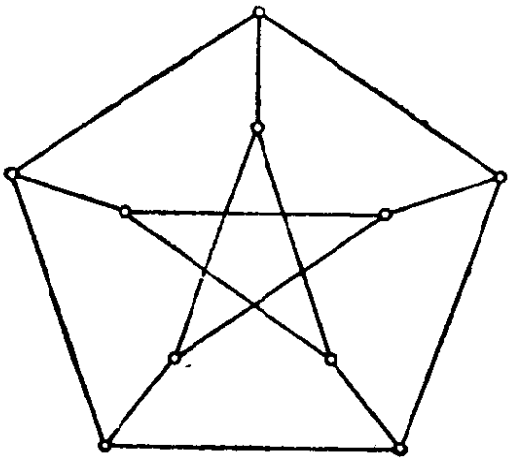
Gray 图（见 Bouwer，1972）是有 54 个顶点的 3 正则边可迁但不是顶点可迁的图，其作法如下：取 $K_{3,3}$ 的三个拷贝，对于一条特定边 e，在各个拷贝中剖分 e，并且把所得到的三个顶点与一个新顶点连接起来．对每条边重复这个作法．

笼

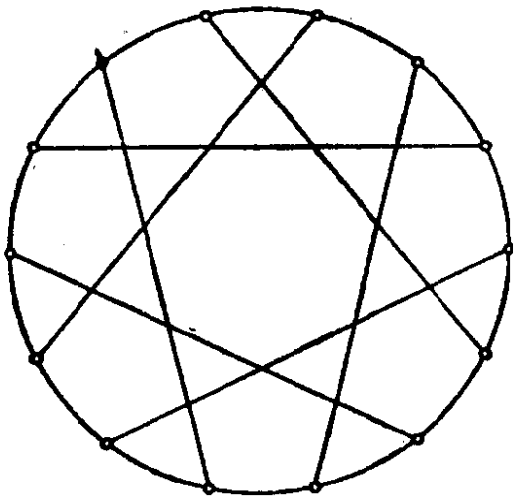
围长为 n 而具有尽可能少的顶点的 m 正则图称为 (m, n) 笼，若用 $f(m, n)$ 表示 (m, n) 笼的顶点数，则容易看出：$f(2, n) = n$，而对于 $m \geqslant 3$，有

$$f(m, n) \geqslant \begin{cases} \dfrac{m(m-1)^r - 2}{m-2}, & \text{若 } n = 2r+1 \\ \dfrac{2(m-1)^r - 2}{m-2}, & \text{若 } n = 2r \end{cases} \tag{III. 1}$$

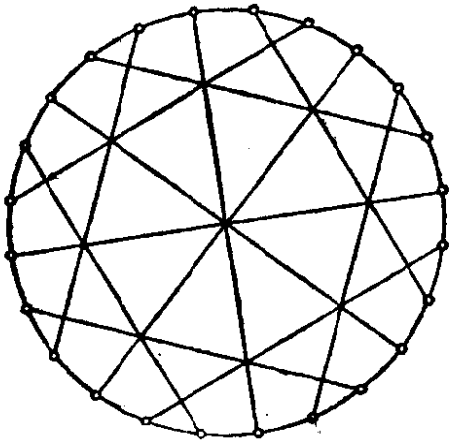
$(2, n)$ 笼是 n 圈，$(m, 3)$ 笼是 K_{m+1}，而 $(m, 4)$ 笼是 $K_{m,m}$。



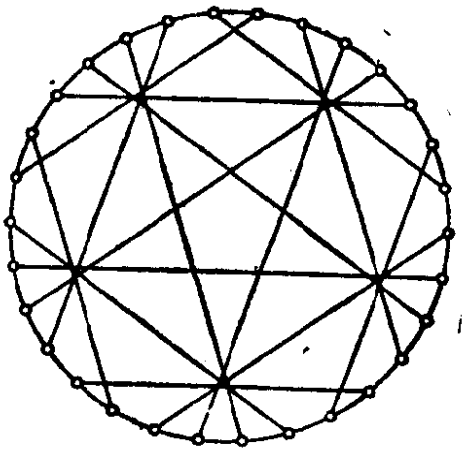
$(3, 5)$ 笼
Petersen 图



$(3, 6)$ 笼
Heawood 图

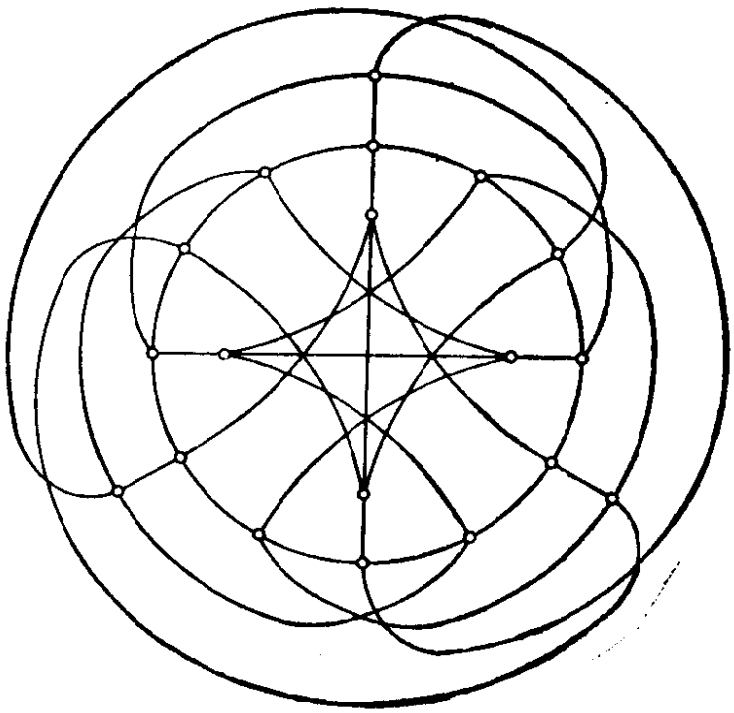


$(3, 7)$ 笼
MeGee 图



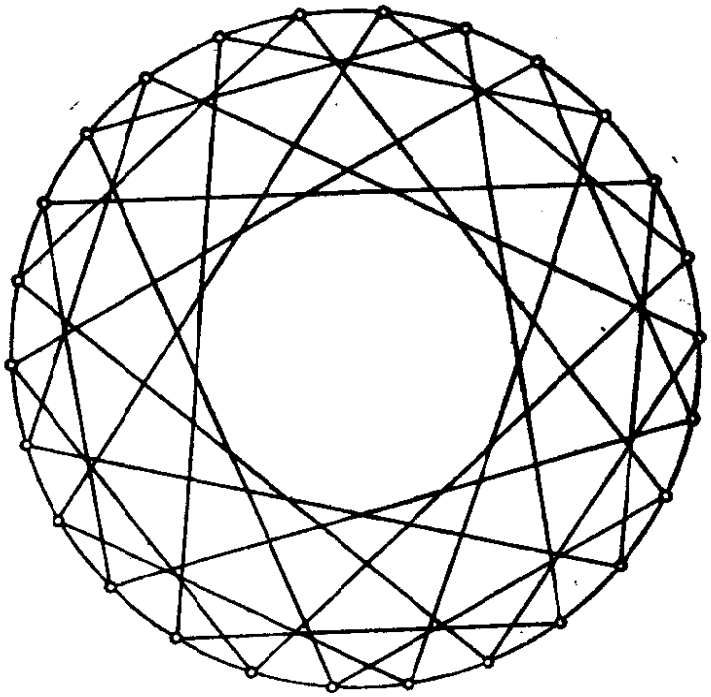
$(3, 8)$ 笼
Tutte-Coxeter 图

对于所有这些情形，(III. 1) 式中的等式均成立. Hoffman 和 Singleton (1960)已经证明：对于 $m \geqslant 3$ 和 $n \geqslant 5$ 的情形，仅当 $n=5$和$m=3$，7，或 57，或者当 $n=6$，8或 12 时，(III. 1) 式中的



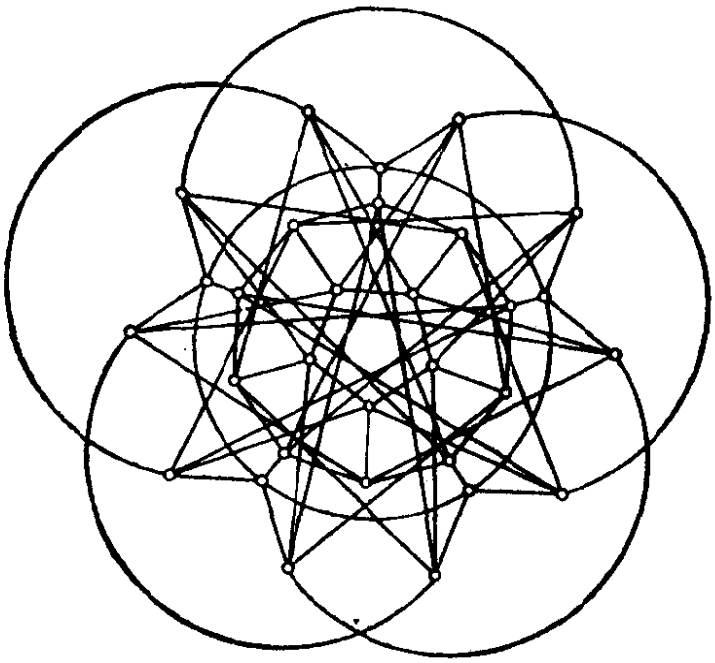
(4，5) 笼

Robertson 图



(4，6) 笼

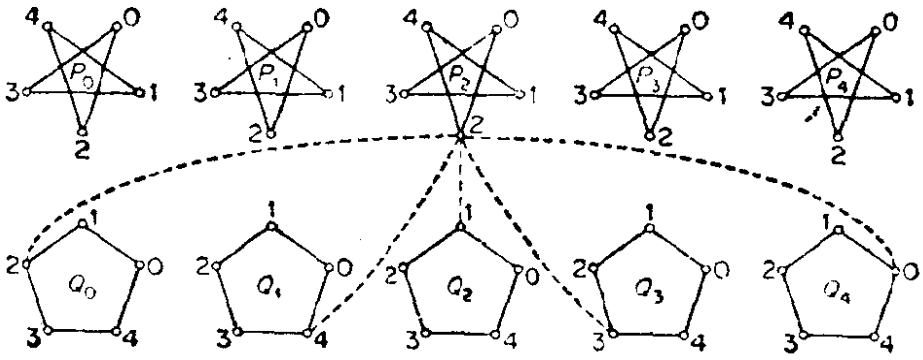
等式可以成立. 当 $m-1$ 是素数幂时，$(m, 6)$ 笼是 $m-1$ 阶射影平面的点线关联图；$(m, 8)$ 笼和 $(m, 12)$ 笼也可以从射影几何中得到(详见 Biggs，1974). 一些较小的 (m, n) 笼描绘如下：



(5, 5) 笼

Robertson-Wegner 图

(7, 5) 笼 (Hoffman-Singleton 图) 可以描述如下：它有 10 个如下标号的 5-圈 $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$，$P_i$ 的顶点 i 和 Q_k 的顶点 $i+j\cdot k \pmod 5$ 相连. (例如，P_2 的顶点 2 如图所示的那样连接着.)



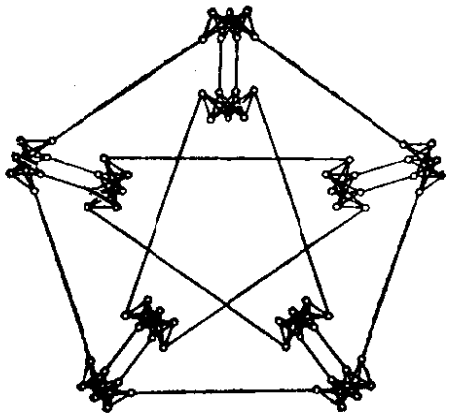
(7, 5) 笼

Hoffman-Singleton 图

非 Hamilton 图

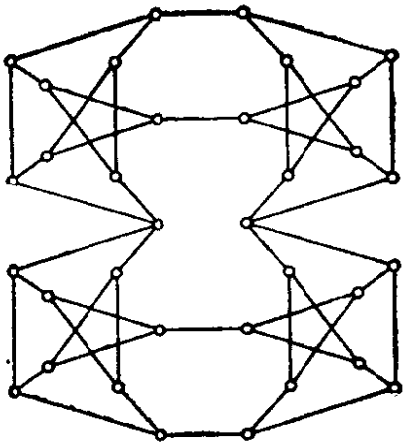
（i）自从 Tait 做出他的关于平面图的猜想以来，对于一个图是 Hamilton 图的条件一直在进行探索. 这里列出若干猜测结果的反例.

（a）每一个 4 正则 4 连通图是 Hamilton 图(C. St. J. A. Nash-Williams).



Meredith 图

(b) 不存在超可描画图 (T. Gallai).

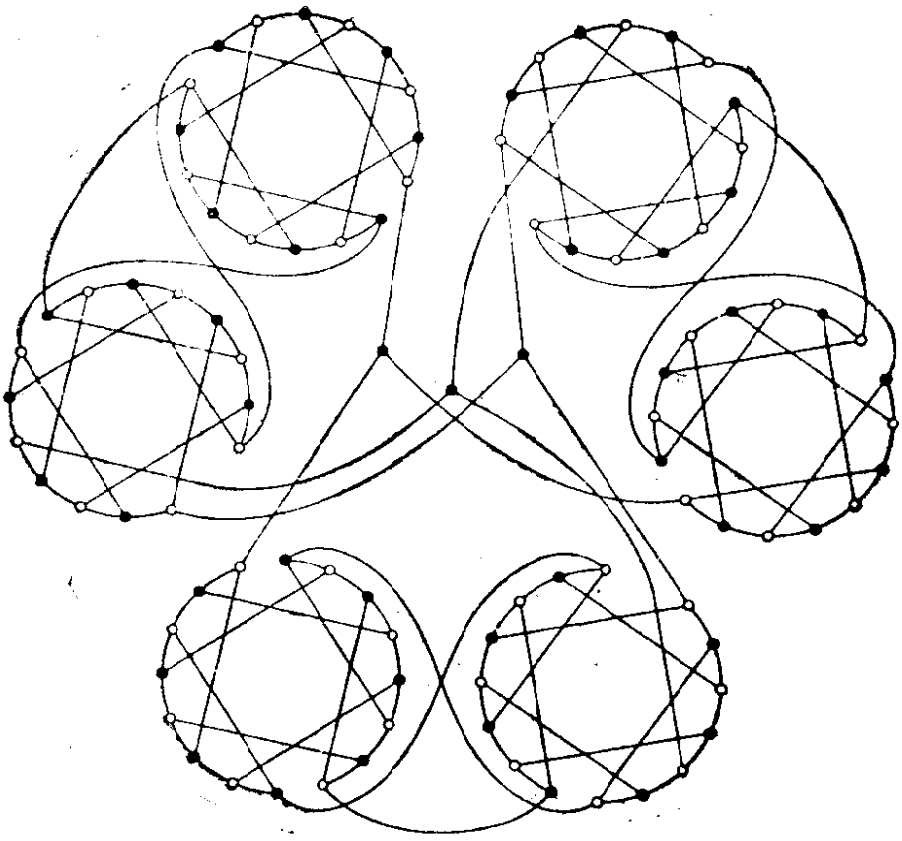


Thomassen 图

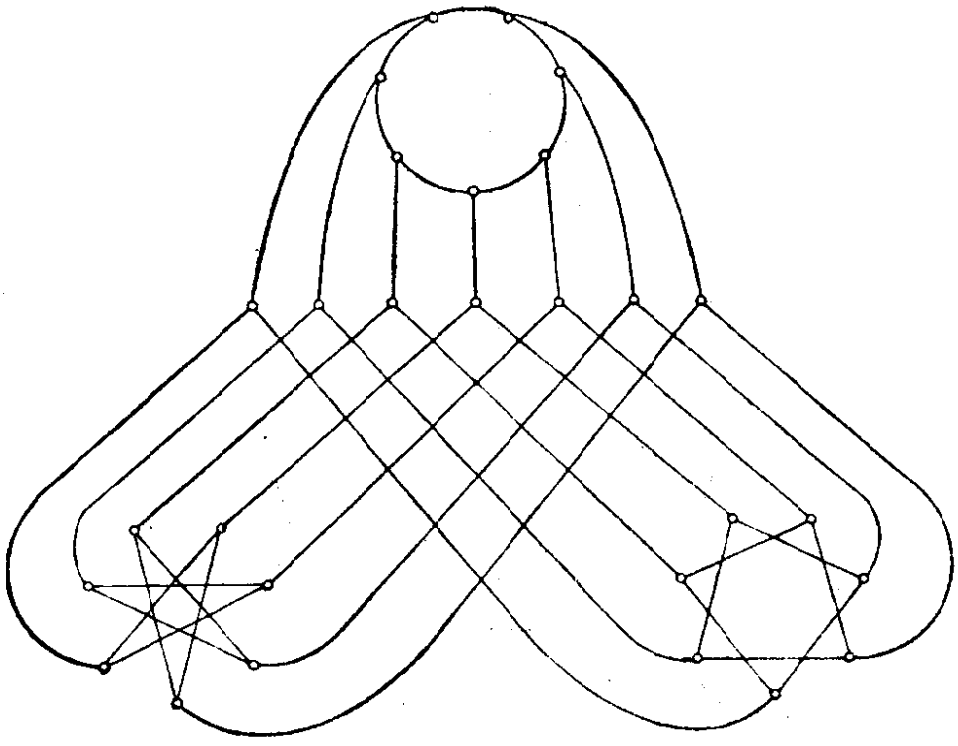
(第一个超可描画图由 J. D. Horton 发现.)

(c) 每一个 3 正则 3 连通偶图是 Hamilton 图 (W. T. Tutte).

(ii) 具有高度对称的非 Hamilton 图的例子——存在着从任



Horton 图

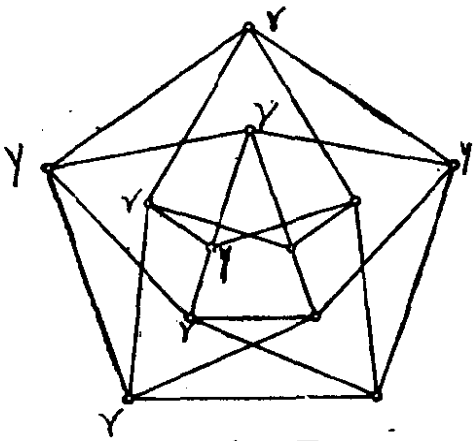


Coxeter 图

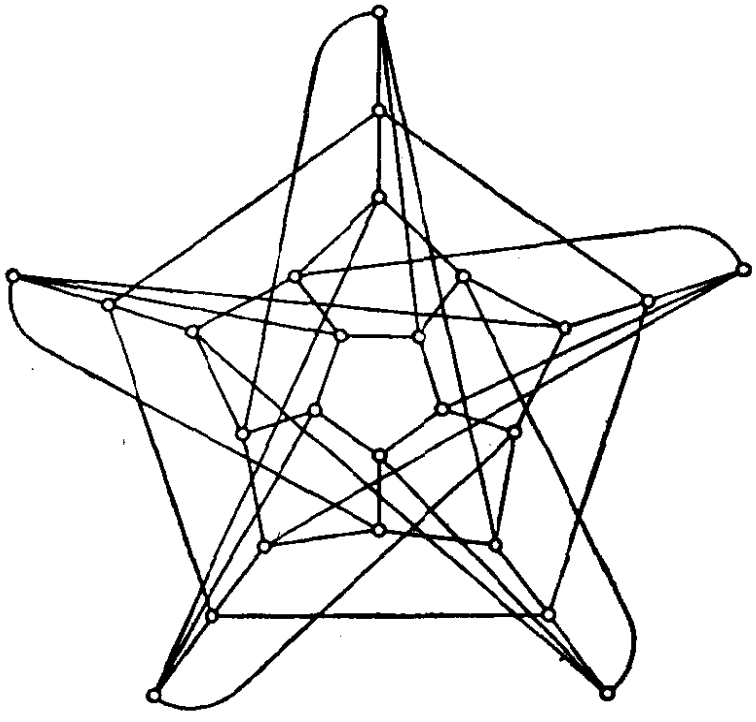
一长为 3 的路到另外任一路的自同构．（Petersen 图也有这个性质.）见 Tutte (1960).

色数

(i) Grünbaum (1970) 猜测：对于所有的 $m > 1$ 和 $n > 2$，均存在围长至少是 n 的 m 正则的 m 色图．对于 $n = 3$，这是平凡的，而对于 $m = 2$ 和 3，该猜想的正确性可以从笼的存在中推出．除此之外，目前仅有两个这样的图是已知的：

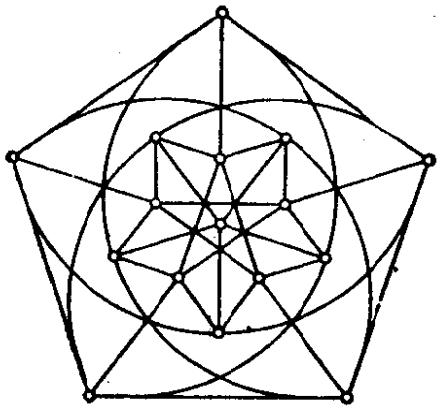


Chvátal 图



Grünbaum 图

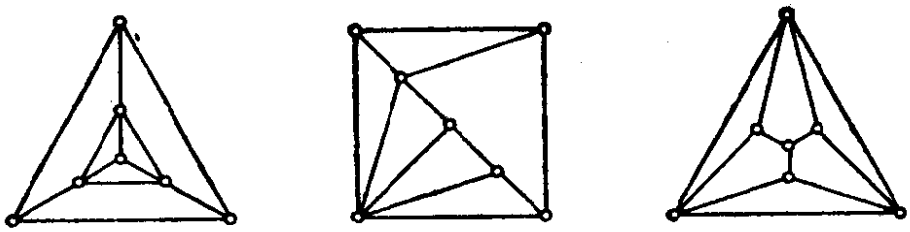
(ii) 由于 $r(3,3,3)=17$ (见习题 7.2.3),所以存在着不包含单色三角形的 K_{16} 的 3 边着色. Kalbfleisch 和 Stanton (1968) 证明: 在这种着色中, 由染有同一颜色的各边所导出的子图都同构于下述的图:



Greenwood-Gleason 图

嵌入

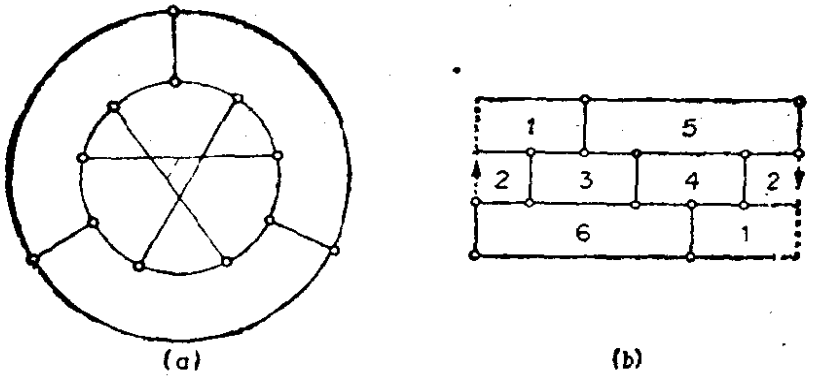
(i) 自对偶平图的简单例子是轮. 一些更有趣的自对偶平图列在下面(例如,见 Smith 和 Tutte, 1950).



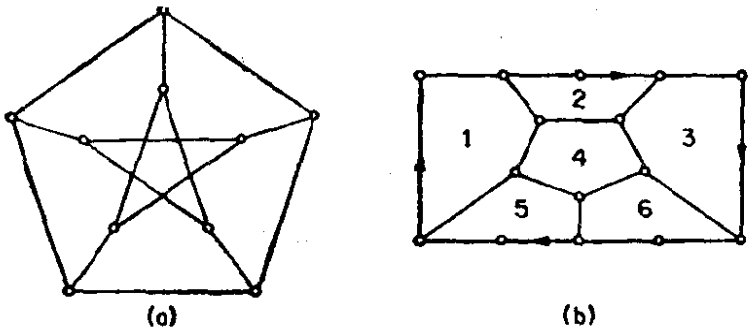
(ii) 曲面 S 的色数 $\chi(S)$ 是指给 S 上的任何地图的各面正常着色所需要的颜色的最大数目. (四色猜想声称球面是 4 色的.) Heawood (1890) 证明: 若 S 有特征数 $n<2$, 则

$$\chi(S)\leqslant\left[\frac{1}{2}(7+\sqrt{49-24n})\right] \qquad \text{(III. 2)}$$

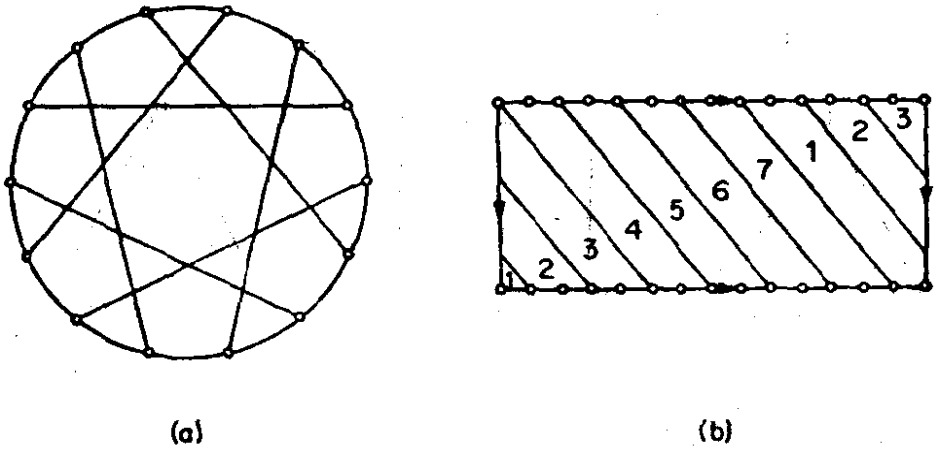
对于射影平面和 Möbius 带(特征数 1)以及对于环面(特征数 0), (III. 2) 式中给出的上界被达到, 正如由下述图和它们的嵌入所说明的那样:



(a) Tietze 图； (b) 在 Möbius 带上的嵌入



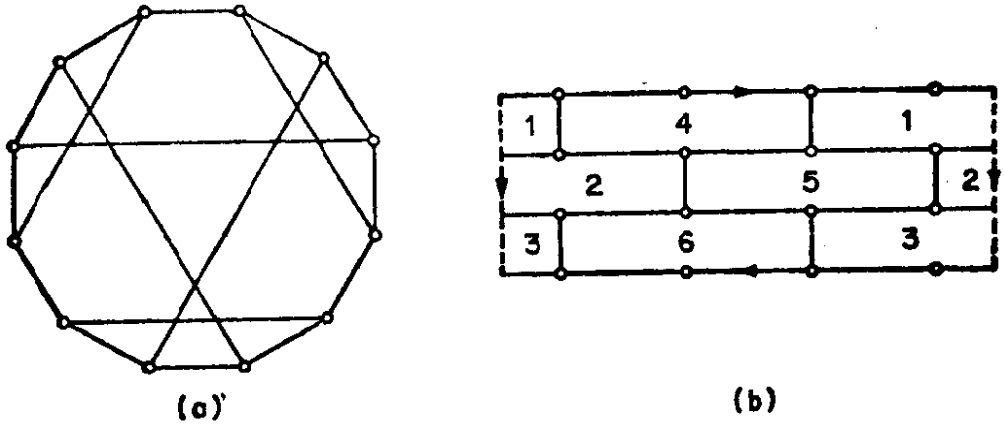
(a) Petersen 图； (b) 在射影平面上的嵌入



(a) Heawood 图； (b) 在环面上的嵌入

尽管 Klein 瓶有特征数 0，Franklin (1934) 证得它仅仅是 6 色的，并且找到了在 Klein 瓶上的下述 6 色地图：

已经证明：除去 Klein 瓶以外，对于特征数 $n < 2$ 的每一个曲面 S，(III. 2) 式中等式都成立. 这个结果名为地图着色定理 (见 Ringel, 1974)。



(a) Franklin 图; (b) 在 Klein 瓶上的嵌入

参 考 文 献

Biggs, N. (1974). *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press

Bouwer, I. Z. (1972). On edge but not vertex transitive regular graphs. *J. Combinatorial Theory* B, **12**, 32—40

Coxeter, H. S. M. (1950). Self-dual configurations and regular graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56**, 413—55

Folkman, J. (1967). Regular line-symmetric graphs. *J. Combinatorial Theory*, **3**, 215—32

Franklin, P. (1934). A six color problem. *J. Math. Phys.*, **13**, 363—69

Fréchet, M. and Ky Fan (1967). *Initiation to Combinatorial Topology*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston

Frucht, R. (1949). Graphs of degree three with a given abstract group. *Canad. J. Math.*, **1**, 365—78

Grünbaum, B. (1970). A problem in graph coloring. *Amer. Math. Monthly*, **77**, 1088—1092

Heawood, P. J. (1890). Map colour theorem. *Quart. J. Math.*, **24**, 332—38

Hoffman, A. J. and Singleton, R. R. (1960). On Moore graphs with diameters 2 and 3, *IBM J. Res. Develop.*, **4**, 497—504

Horton, J. D. (1974) to be published

Kalbflesich, J. and Stanton, R. (1968). On the maximal triangle-free edge-chromatic graphs in three colors. *J. Combinatorial Theory*, **5**, 9—20

Meredith, G. H. J. (1973). Regular n-valent n-connected nonhamiltonian non-n-edge-colorable graphs. *J. Combinatorial Theory B.* **14**, 55—60

Ringel, G. (1974). *Map Color Theorem*, Springer-Verlag, Berlin

Smith, C. A. B. and Tutte, W. T. (1950). A class of self-dual maps. *Canad. J. Math.*, **2**, 179—96

Thomassen, C. (1974). Hypohamiltonian and hypotraceable graphs. *Discrete Math.*, **9**, 91—96

Tutte, W. T. (1960). A non-Hamiltonian graph. *Canad. Math. Bull.*, **3**, 1—5

Wegner,G. (1973). A smallest graph of girth 5 and valency 5. *J. Combinatorial Theory* B, **14**, 203—208

附录 IV　尚未解决的问题

这里收集的是若干难度不同而尚未解决的问题，包括提出者，日期和有关书目．有关猜想用着重号注明．

1. 两个图 G 和 H 称为超同构的（记为 $G \approx H$），如果存在一一映射 $\sigma: V(G) \to V(H)$，使得 $G - v \cong H - \sigma(v)$ 对所有 $v \in V(G)$ 均成立．若 $G \approx H$ 推得 $G \cong H$，则称 G 是可重构的．重构猜想声称：$v > 2$ 的每个图 G 都是可重构的（S. M. Ulam，1929）．对于不连通图．树和少数其他类型的图，这一猜想已经被证实（见 Harary，1974）．

相应地，存在着边重构猜想：$\varepsilon > 3$ 的每个图 G 都是边可重构的．Lovász（1972）证明：每个满足 $\varepsilon > \binom{v}{2}\Big/2$ 的简单图 G 都是边可重构的．

对于有向图的类似的重构猜想，P. K. Stockmeyer 找到了一族（无穷多个）反例．

Harary, F. (1974). A survey of the reconstruction conjecture. in *Graphs and Combinatorics* (eds. R. A. Bari and F. Harary). Springer-Verlag, New York, pp. 18—28

Lovász, L. (1972). A note on the line reconstruction problem. *J. Combinatorial Theory* B, **13**, 309—10

2. 称图 G 在图 H 中是可嵌入的，如果 G 同构于 H 的子图．表征在 k 方体中可嵌入的图（V. V. Firsov，1965）．

Garey, M. R. and Graham, R. L. (1975). On cubical graphs. *J. Combinatorial Theory* (B), **18**, 84—95

3. 每个 4 正则简单图都包含 3 正则子图（C. Berge，1973）．

4. 若 $k > 2$，则不存在每对顶点均由唯一的长为 k 的路连

接起来的图 (A. Kotzig, 1974). Kotzig 对于 $k<9$ 证实了这个猜想.

5. 每个连通图 G 均为最多 $[(v+1)/2]$ 条边不重路的并图 (T. Gallai, 1962). Lovasz (1968) 证明: 每个图 G 均为最多 $[v/2]$ 条边不重路或圈的并图.

Lovasz, L. (1968). On coverings of graphs, *in Theory of Graphs* (eds. P. Erdös and G. Katona), Academic Press, New York, pp. 231—36

6. 每个 2 边连通的简单图 G 均为 $v-1$ 个圈的并图 (P. Erdös, A. W. Goodman 和 L. Pósa, 1966).

Erdös, P., Goodman, A. W. and Pósa, L. (1966). The representation of a graph by set intersections. *Canad. J. Math.*, **18**, 106—12

7. 若 G 是简单块, 且至少有 $v/2+k$ 个度不小于 k 的顶点, 则 G 有长至少为 $2k$ 的圈(D. R. Woodall, 1975).

8. 设 $f(m,n)$ 是有 n 个顶点的不包含 m 圈的简单图的最大可能的边数. 已经知道

$$f(m,n)=\begin{cases}[n^2/4], \text{若 } m \text{ 是奇数}, & m\leqslant\frac{1}{2}(n+3)\\ \binom{n-m+2}{2}+\binom{m-1}{2}, \text{若} & m\geqslant\frac{1}{2}(n+3)\end{cases}$$

对其余情形确定 $f(m,n)$ (P. Erdös, 1963).

Bondy, J.A. and Simonovits, M. (1974). Cycles of even length in graphs. *J. Combinatorial Theory* (B), **16**, 97—105

Woodall, D. R. (1972). Sufficient conditions for circuits in graphs. *Proc. London Math. Soc.*, **24**, 739—55

9. 设 $f(n)$ 是有 n 个顶点的不含有 3 正则子图的简单图的最大可能边数, 确定 $f(n)$ (P. Erdös 和 N. Sauer, 1974). 由于存在常数 c, 使得适合 $\varepsilon\geqslant cv^{8/5}$ 的每个简单图 G 都包含 3 方体 (Erdös 和 Simonovits, 1970), 显然有 $f(n)<cn^{8/5}$.

Erdös, P and Simonovits, M. (1970). Some extremal problems in graph theory, in *Combinatorial Theory and its Applications* I (eds. P. Erdös, A. Rényi and V. T. Sós), North-Holland, Amsterdam, pp. 378—92

10. 确定简单图 G，使得对应于 $3 \leqslant l \leqslant \nu$ 中的每一个 l 恰有一个长为 l 的圈 (R. C. Entringer, 1973).

11. 设 $f(n)$ 是有 n 个顶点的任何两个圈的长均不相等的图的最大可能边数. 确定 $f(n)$ (P. Erdos, 1975).

12. 若 G 是简单图，并且 $\varepsilon > \nu(k-1)/2$，则 G 包含具有 k 条边的所有树 (P. Erdös 和 V. T. Sós, 1963). 已经知道每个这样的图都包含长为 k 的路 (Erdös 和 Gallai, 1959).

Erdös, P. and Gallai, T. (1959). On maximal paths and circuits of graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **10**, 337—56

13. 找 (6, 5) 笼 (见附录 III).

14. G 的带宽定义为:

$$\min_{l} \max_{uv \in E} |l(u) - l(v)|$$

这里最小值是对 ν 的所有不同整数标号 l 而取的. 求图的带宽的界限 (L. H. Harper, 1964). k 方体的带宽已由 Harper 确定 (1966).

Chvátalová, J. (1975). Optimal labelling of a product of two paths. *Discrete Math.*, **11**, 249—53

Harper, L. H. (1966). Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs. *J. Combinatorial Theory*, **1**, 385—93

15. 简单图 G 称为优美的，如果存在着用集 $\{0, 1, \cdots, \varepsilon\}$ 中的不同整数分配给它的顶点的一个标号 l，使得由

$$l'(uv) = |l(u) - l(v)|$$

定义的导出边标号 l' 分配给各条边以不同的标号. 表征优美图 (S. Golomb, 1972). 特别地，有一个猜测：每棵树都是优美图 (A. Rosa, 1966).

Golomb, S. (1972). How to number a graph, in *Graph Theory and Computing* (ed. R. C. Read), Academic Press, New York, pp. 23—37

16. n 个顶点的具有尽可能小的生成树数目的 3 连通图是有 $n-1$ 根辐的轮 (W. T. Tutte, 1940).

Kelmans, A. K. and Chelnokov, V. M. (1974). A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees. *J. Combinatorial Theory* (B), **16**, 197—214

17. 设 u 和 v 是图 G 的两个顶点. 用 a_n 表示删去它们就破坏了所有最长为 n 的 (u, v) 路的顶点的最小数目,而用 b_n 表示最长为 n 的内部不相交 (u, v) 路的最大数目. 设 $f(n)$ 表示 a_n/b_n 的最大可能值. 确定 $f(n)$ (V. Neumann, 1974). L. Lovász 猜测: $f(n) \leqslant \sqrt{n}$. 已经知道 $\sqrt{n/2} \leqslant f(n) \leqslant [n/2]$.

18. 每个 3 正则 3 连通偶平面图都是 Hamilton 图(D. Barnette, 1970). Goody 对于面的度是 4 或 6 的所有平图证实了这个猜想. 注意: 若舍弃平面性条件,则猜想不再成立 (见附录 III).

19. 图的序列 $\boldsymbol{d}$ 称为强制 Hamilton 序列,如果以 $\boldsymbol{d}$ 为度序列的每个简单图都是 Hamilton 图. 表征强制 Hamilton 序列 (C. St. J. A. Nash-Williams, 1970). (定理 4.5 给出部分解.)

Nash-Williams, C. St. J. A. (1970). Valency sequences which force graphs to have Hamiltonian circuits: interim report, University of Waterloo preprint.

20. 每个连通的顶点可迁图都有 Hamilton 路 (L. Lovász, 1968). L.Babai 对于素数个顶点的图证实了这个猜想.

21. 称图 G 是 t 坚韧的,如果对于每个顶点割 S, 均有 $\omega(G-S) \leqslant |S|/t$. (定理 4.2 表明每个 Hamilton 图都是 1 坚韧的.)

(a) 若 G 是 2 坚韧的,则 G 是 Hamilton 图 (V. Chvátal, 1971). C. Thomassen 得到一个 $t > 3/2$ 的非 Hamilton t 坚韧图的例子.

(b) 若 G 是3/2坚韧的,则 G 有 2 因子 (V. Chvátal, 1971).

Chvátal, V. (1973). Tough graphs and hamiltonian circuits.

Discrete Math., **5**, 215—28

22. G 的结合数定义为：$\text{bind}\, G = \min\limits_{\substack{\phi \neq S \subseteq V \\ N(S) \neq V}} |N(S)|/|S|$

(a) 若 $\text{bind}\, G \geqslant 3/2$，则 G 包含三角形 (D. R. Woodall, 1973).

(b) 若 $\text{bind}\, G \geqslant 3/2$，则 G 是泛圈的(含有所有长为 $l(3 \leqslant l \leqslant \nu)$ 的圈) (D. R. Woodall, 1973).

Woodall (1973) 证明：若 $\text{bind}\, G \geqslant 3/2$，则 G 是 Hamilton 图；若 $\text{bind}\, G \geqslant \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，则 G 包含三角形.

Woodall, D. H. (1973). The binding number of a graph and its Anderson number. *J. Combinatorial Theory*(B), **15**, 225—55

23. 每个非空正则简单图都包含两个不相交的最大独立集 (C. Berge, 1973).

24. 求 Ramsey 数 $r(3, 3, 3, 3)$. 已经知道

$$51 \leqslant r(3, 3, 3, 3) \leqslant 65$$

Chung, F. R. K. (1973). On the Ramsey numbers $N(3, 3, \cdots, 3; 2)$, *Discrete Math.*, **5**, 317—21

Folkman, J. (1974). Notes on the Ramsey number $N(3, 3, 3, 3)$. *J. Combinatorial Theory* (A), **16**, 371—79

25. 对于 $m < n$，设 $f(m, n)$ 表示不包含 K_n 但在每个 2 边着色中都有单色 K_m 的图的最少可能的顶点数. (Folkman, 1970 年建立了这种图的存在性.)确定 $f(m, n)$ 的界限. 已经知道:

$$f(3, n) = 6, \quad \text{对于 } n \geqslant 7$$

$$f(3, 6) = 8 \quad \text{(见习题 7.2.5)}$$

$$10 \leqslant f(3, 5) \leqslant 18$$

Folkman, J. (1970). Graphs with monochromatic Complete subgraphs in every edge coloring. *SIAM J. Appl. Math.*, **18**, 19—24

Irving, R. W. (1973). On a bound of Graham and Spencer for a graph-colouring constant. *J. Combinatorial Theory* (B), **15**,

200—203

Lin, S. On Ramsey numbers and K_r-colouring of graphs. *J. Combinatorial Theory* (B), **12**, 82—92

26. 若 G 是 n 色的，则 $r(G, G) \geqslant r(n, n)$ (P. Erdös, 1973) ($r(G, G)$ 的定义见习题 7.2.6)

27. 可以画在平面上使每条边都是单位长的直线段的图的最大可能的色数是多少？(L. Moser, 1958).

Erdös, P., Harary, F. and Tutte, W. T. (1965). On the dimension of a graph. *Mathematika*, **12**, 118—22

28. 任何色多项式系数的绝对值都构成单峰序列（即不存在两侧都是有较大值的项）(R. C. Read, 1968).

Chvátal, V. (1970). A note on coefficients of chromatic polynomials. *J. Combinatorial Theory*, **9**, 95—96

29. 若 G 不是完全图，并且 $\chi = m + n - 1$，这里 $m \geqslant 2$ 以及 $n \geqslant 2$，则存在 G 的不相交子图 G_1 和 G_2，使得 $\chi(G_1) = m$ 和 $\chi(G_2) = n$ (L. Lovász, 1968).

30. 称简单图 G 是完美的，如果对于 G 的每个导出子图 H，其最大团的顶点数都是 $\chi(H)$. G 是完美图当且仅当 G 或 G^c 的任何导出子图都没有长大于 3 的奇圈 (C. Berge, 1961). 这就是强完美图猜想. Lovász (1972) 证明：任何完美图的补图是完美的.

Lovász, L. (1972). Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Math.*, **2**, 253—67

Parthasarathy, K. R. and Ravindra, G. (1976) The strong perfect-graph conjecture is true for $K_{1,3}$-free graphs. *J. Combinatorial Theory* (B). **21**, 212—223

31. 若 G 是 3 正则简单块，而 H 是重复 G 中的各条边得到的图，则 $\chi'(H) = 6$ (D. R. Fulkerson, 1971).

32. 若 G 是简单图，v 是偶数，并且 $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$，则对某个 $v \in V$，$\chi'(G - v) = \chi'(G)$ 成立 (I. T. Jakobsen, L. W. Beineke 和 R. J. Wilson, 1973). 对于 $v \leqslant 10$ 的所有图 G 和 $v =$

12的所有 3 正则图 G，这个猜想已经得到证实.

Beineke, L. W. and Wilson, R. J. (1973). On the edge-chromatic number of a graph. *Discrete Math.*, **5**, 15—20

33. 对于任意简单图 G，$V \cup E$ 的元素都可以用 $\Delta + 2$ 种颜色着色，使得任何两个相邻的或关联的元素都染有不同的颜色 (M. Behzad, 1965). 这名为全着色猜想. M. Rosenfeld 和 N. Vijayaditya 对于所有 $\Delta \leqslant 3$ 的图已经证实了这个猜想.

Vijayaditya, N. (1971). On total chromatic number of a graph. *J. London Math. Soc.*, **3**, 405—408

34. 若 G 是简单图并且 $\varepsilon > 3\nu - 6$，则 G 包含 K_5 的一个剖分图 (G. A. Dirac, 1964). Thomassen (1974) 证明：若 $\varepsilon > 4\nu - 10$，则 G 包含 K_5 的一个剖分图.

Dirac, G. A. (1964). Homeomorphism theorems for graphs. *Math. Ann.*, **153**, 69—80

Thomassen, C. (1974). Some homeomorphism properties of graphs, *Math. Nachr.*, **64**, 119—33

35. 非负整数序列 $\boldsymbol{d}$ 称为潜在平面的，如果存在以 $\boldsymbol{d}$ 为度序列的简单平面图. 表征潜在平面序列 (S. L. Hakimi, 1963).

Owens, A. B. (1971). On the planarity of regular incidence sequences. *J. Combinatorial Theory*(B), **11**, 201—12

36. 若 G 是无环平面图，则 $\alpha \geqslant \nu/4$ (P. Erdös, 1968). Albertson (1974) 证明：每个这样的图都满足 $\alpha > 2\nu/9$.

Albertson, M. O. (1974). Finding an independent set in a planar graph, in *Graphs and Combinatorics* (eds. R. A. Bari and F. Harary), Springer-Verlag, New York, pp. 173—79

37. 每个平面图都是 4 可着色的 (F. Guthrie, 1852)[1].

Ore, O. (1969). *The Four-Color Problem*, Academic Press, New York

38. 每个 k 色图都包含可收缩成 K_k 的子图 (H. Hadwiger,

1) 见第九章. ——译者注

1943). Dirac (1963) 证明：每个 6 色图都包含可收缩成比 K_6 少两条边的子图.

Dirac, G. A. (1963). Generalizations of the five colour theorem, in *Theory of Graphs and its Applications* (ed. M. Fiedler), Academic Press, New York, pp. 21—27

39. 每个 k 色图都包含 K_k 的一个剖分图 (G. Hajós, 1961). Pelikán (1969) 证明：每个 5 色图都包含比 K_5 少一条边的图的剖分图.

Pelikán, J. (1969). Valency conditions for the existence of certain subgraphs, in *Theory of Graphs* (eds. P. Erdös and G. Katona), Academic Press, New York, pp. 251—58

40. 每个没有 Tait 着色的 2 边连通 3 正则简单图都包含可收缩成 Petersen 图的子图 (W. T. Tutte, 1966).

Isaacs, R. (1975). Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colourable. *Amer. Math. Monthly*, **82**, 221—39

Tutte, W. T. (1966). On the algebraic theory of graph colourings. *J. Combinatorial Theory*, **1**, 15—50

41. 对于每个曲面 S，存在有限个图，它们的最小度至少是 3，并且它们是最低限度地不可嵌入 S 的.

42. 若 D 是双向连通的，则 D 有长至少为 χ 的有向圈 (M. Las Vergnas, 1974).

43. 若 D 是 v 为奇数的竞赛图，并且每个入度和出度都等于 $(v-1)/2$，则 D 是 $(v-1)/2$ 条弧不重的有向 Hamilton 圈的并图 (P. Kelly, 1966).

44. 若 D 是 v 为偶数的竞赛图，则 D 是 $\sum_{v \in V} \max\{0, d^+(v) - d^-(v)\}$ 条弧不重的有向路的并图 (R. O'Brien, 1974). 由此可推出猜想 43 的真实性.

45. 表征所有子竞赛图 $D - v$ 都同构的竞赛图 D(A. Kotzig; 1973).

46. 若D是包含有向圈的有向图，则存在某弧，把它反向之后将减少D中有向圈的数目 (A. Adám, 1963).

47. 给定正整数n，则存在最小整数$f(n)$，使得在任何最多有n条弧不重的有向圈的有向图中，都存在$f(n)$条弧，删去这些弧将破坏所有的有向圈(T. Gallai, 1964; D. H. Younger, 1968).

Erdös, P. and Pósa, L. (1962). On the maximal number of disjoint circuits of a graph. *Publ. Math. Debrecen*, **9**, 3—12

Younger, D. H. (1973). Graphs with interlinked directed circuits, in *Proceedings of Midwest Symposium on Circuit Theory*

48. $(m+n)$正则图称为(m, n)可定向的，如果它可以这样定向，使得各个入度或是m或是n. 每个没有1边割或3边割的5正则简单图都是$(4, 1)$可定向的 (W. T. Tutte, 1972). Tutte证明：由此可推出 Grötzsch 定理.

49. 求一个算法，以便在有两个发点x_1和x_2、两个收点y_1和y_2和两种商品的网络中，求出把商品1从x_1运送到y_1而把商品2从x_2运送到y_2的最大流 (L. R. Ford 和 D. R. Fulkerson, 1962).

Rothschild, B. and Whinston, A. (1966). On two commodity network flows. *Operations Res.*, **14**, 377—87

50. 每个2边连通的有向图D都有在整数模5的域上的环流f，使得对所有弧a，均有$f(a)\neq 0$ (W. T. Tutte, 1949). Tutte证明：由此可推出五色定理.

译者注：据原著1981年第4次重印本记载，问题**16**, **36**, **37**, **42**已经解决. 参考文献如下：

16. Göbel, F. and Jagers, A. A. (1976). On a conjecture of Tutte concerning minimal tree numbers, *J. Combinatorial Theory* (B), to be published

36. 和 **37.** Appel, K. and Haken, W. (1976). Every planar map is four colorable. Bull. *Amer. Math. Soc.*, **82**, 711—2

42. Bondy, J. A. (1976). Diconnected orientations and a conjecture of Las Vergnas. *J. London Math. Soc.*, (2), **14**, 277—282

附录V　进一步阅读的建议

一般性著作，按照论述的深度排列

Ore, O. (1963). *Graphs and Their Uses,* Random House, New York

Rouse Ball, W. W. and Coxeter, H. S. M. (1974). *Mathematical Recreations and Essays,* University of Toronto Press, Toronto

Liu, C. L. (1968). *Introduction to Combinatorial Mathematics,* McGraw-Hill, New York

Wilson, R. J. (1972). *Introduction to Graph Theory,* Oliver and Boyd, Edinburgh

Deo, N. (1974). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

Behzad, M. and Chartrand, G. (1971). *Introduction to the Theory of Graphs,* Allyn and Bacon, Boston

Harary, F. (ed.) (1967). *A Seminar on Graph Theory,* Holt, Rinehart and Winston, New York

Ore, O. (1962). *Theory of Graphs,* American Mathematical Society, Providence, R. I.

Kŏnig, D. (1950). *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen,* Chelsea, New York

Sachs, H. (1970). *Einführung in die Theorie der Endlichen Graphen,* Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

Harary, F. (1969). *Graph Theory,* Addison-Wesley, Reading, Mass.

Berge, C. (1973). *Graphs and Hypergraphs,* North Holland, Amsterdam

专门著作

Biggs, N. (1974). *Algebraic. Graph Theory,* Cambridge University Press, Cambridge

Tutte, W. T. (1966). *Connectivity in Graphs,* University of Toronto Press, Toronto

Ore, O. (1967). *The Four-Color Problem,* Academic Press, New York

Ringel, G. (1974). *Map Color Theorem,* Springer-Verlag, Berlin

Moon, J. W. (1968). *Topics on Tournaments,* Holt, Rinehart and Winston, New York

Ford, L. R. Jr. and Fulkerson, D. R. (1962). *Flows in Networks,* Princeton University Press, Princeton

Berge, C. and Ghouila-Houri, A. (1965). *Programming, Games, and Transportation Networks,* John Wiley, New York

Seshu, S. and Reed, M. B. (1961). *Linear Graphs and Electrical Networks,* Addison-Wesley, Reading, Mass.

Tutte, W. T. (1971). *Introduction to the Theory of Matroids,* American Elsevier, New York

Harary, F. and Palmer, E. (1973). *Graphical Enumeration,* Academic Press, New York

Aho, A. V., Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D. (1974). *The Design and Analysis of Computer Algorithms,* Addison-Wesley, Reading, Mass.

Biggs, N., Lloyd, E. K. and Wilson, R. J. (1976), Graph Theory 1736—1936, Clarendon Press, Oxford

符 号 汇 编

一般数学符号

$\cup$	并集
$\cap$	交集
$\subseteq$	子集
$\subset$	真子集
$\setminus$	集论差
$\triangle$	对称差
$[x]$	$\leqslant x$ 的最大整数
$\{x\}$	$\geqslant x$ 的最小整数
$\|\|f\|\|$	f 的支集
$\boldsymbol{R}\|S$	$\boldsymbol{R}$ 在 S 中的限制
$\boldsymbol{R}'$	$\boldsymbol{R}$ 的转置

图论符号

A	弧集
$\boldsymbol{A}$	图的邻接矩阵
$\boldsymbol{A}$	有向图的邻接矩阵
$b(f)$	f 的周界
$\mathscr{B}$	键空间
$c(G)$	G 的闭包
cap K	割 K 的容量
$\mathscr{C}$	圈空间
$d_G(v)$	G 中顶点 v 的度
$d_G(f)$	G 中面 f 的度
$d_D^-(v)$	D 中顶点 v 的入度
$d_D^+(v)$	D 中顶点 v 的出度
$d_G(u, v)$	G 中顶点 u 和 v 之间的距离
D	有向图
$D(G)$	G 的伴随有向图
ext J	J 的外部
Ext J	ext J 的闭包
E	边集
$f^-(S)$	进入 S 的流量
$f^+(S)$	流出 S 的流量
F	面集
$F(B, \tilde{H})$	B 在其中可画出的 $\tilde{H}$ 的面集
G	图
$G[S]$	由 S 导出的 G 的子图
int J	J 的内部
Int J	int J 的闭包
K_n	完全图
$K_{m,n}$	完全偶图
$\boldsymbol{M}$	图的关联矩阵
$\boldsymbol{M}$	有向图的关联矩阵
N	网络
$N_G(S)$	G 中 S 的邻集

$N_D^-(v)$	D中顶点v的内邻集
$N_D^+(v)$	D中顶点v的外邻集
$r(k, l)$	Ramsey 数
$r(k_1, k_2, \cdots k_m)$	Ramsey 数
r_n	$r(\underbrace{3, 3, \cdots, 3}_{n个})$
val f	流 f 的值
V	顶点集
$V(B, H)$	B对于H的接触顶点的集
α	独立数
α'	边独立数
β	覆盖数
β'	边覆盖数
δ	最小度
δ^-	最小入度
δ^+	最小出度
Δ	最大度
Δ^-	最大入度
Δ^+	最大出度
ε	边数
κ	连通度
κ'	边连通度
ν	顶点数
o	奇分支数
π_k	色多项式
τ	生成树数
ϕ	面数
χ	色数
χ'	边色数
χ^*	面色数
ω	分支数
$\bar{D}$	D的逆图
$\hat{D}$	D的凝聚图
G^c	G的补图
G^*	G的对偶图
$\tilde{G}$	G的平面嵌入
W^{-1}	途径W的反转
$G \cdot e$	收缩边 e
$G - e$	删去边 e
$G + e$	添加边 e
$G - v$	删去顶点 v
$G + E'$	添加边集 E'
$G - S$	删去顶点集 S
$G \cong H$	同构
$H \subseteq G$	子图
$H \subset G$	真子图
$G \cup H$	并图
$G \cap H$	交图
$G + H$	不相交图的并图
$G \times H$	积图
$G \vee H$	联图
$H(G)$	G中H的补图
$[S, T]$	S和T之间的边的集
(S, T)	从S到T的弧的集
WW'	途径的衔接

译名对照表

本表严格按照第一个字的字母表次序排序。据此，“edge connectivity”（边连通度）排在*E*内，“*k*-Chromatic graph”（*k*色图）排在*C*内。名词后面的数字表示给出定义的页码或首次出现的页码.

Acyclic graph 无圈图 27
Adjacency matrix
of a digraph 有向图的邻接矩阵 184
of a graph 图的邻接矩阵 7
Adjacent vertices, edges 相邻顶点，相邻边 3
M-alternating path *M*交错路 74
M-alternating tree *M*交错树 86
Arc 弧 181
k-arc-connected digraph *k*弧连通有向图 190
Associated digraph 伴随有向图 191
M-augmenting path *M*可扩路 74
Automorphism 自同构 7
Automorphism group 自同构群 7
Avoiding bridges 回避的桥 157

Bandwidth 带宽 264
Basis matrix 基矩阵 229
Basis matrix corresponding to a tree 对应于树的基矩阵 231
Berge's theorem Berge 定理 74
Binding number 结合数 266
Bipartite graph 偶图 5
Bipartition 二分类 5
Block 块 47
Block of a graph 图的块 47
Bond 键 31
Bond space 键空间 228
Breakthrough 突破 212
Bridge 桥 156
k-Bridge *k*桥 156
Brooks' theorem Brooks 定理 131
Brouwer's fixed-point theorem Brouwer 不动点定理 23

Cage 笼 252
Capacity
of a cut 割的容量 206
of an arc 弧的容量 203
Capacity function 容量函数 203
Cayley's formula Cayley 公式 37
Centre 中心 29
Chinese postman problem 中国邮递员问题 66
k-chromatic graph k色图 126
Chromatic number 色数 126
Chromatic number of a surface 曲面的色数 258
Chromatic polynomial 色多项式 136
Chvátal graph Chvátal 图 257
Circulation 环流 226
Clique 团 110
Closed walk 闭途径 15
Closure 闭包 60
k-colourable graph k可着色图 126
k-colouring k着色 126
Complement
of a graph 图的补图 7
of a subgraph 子图的补图 31
Complete bipartite graph 完全偶图 5
Complete graph 完全图 5
Complete k-partite graph 完全k部图 6
Component 分支 14
S-component S分支 127
Composition of two graphs 两个图的合成 116
Condensation 凝聚图 184
Conductance matrix 传导矩阵 234
Connected graph 连通图 14
k-connected graph k连通图 45
Connected vertices 连通的顶点 13
Connectivity 连通度 45
Connector problem 连线问题 39
Conservation condition 守恒条件 204
Contraction of an edge 边的收缩 35
Converse 逆图 183
Cotree 余树 31

Covering 覆盖 78
Covering number 覆盖数 108
Coxeter graph Coxeter 图 256
Critical graph 临界图 127
k-critical graph k临界图 127
α-critical graph α临界图 110
β-critical graph β临界图 110
κ-critical graph κ临界图 51
Cube 立方体 5
k-Cube k方体 6
Cut 割 206
Cut edge 割边 29
Cut vertex 割点 33
Cycle 圈 15
k-cycle k圈 15
Cycle space 圈空间 227

Degree
of a face 面的度 150
of a vertex 顶点的度 11
Degree-majorised 度弱于 62
Degree sequence 度序列 12
Demand 需求 219
Diameter 直径 15
Diameter of a plane set 平面点集的直径 121
Dicomponent 双向分支 182
Diconnected digraph 双向连通图 182
Digraph 有向图 181
Dijkstra's algorithm Dijkstra 算法 20
Dirac's theorem Dirac 定理 59, 129
Directed cycle 有向圈 182
Directed diameter 有向直径 198
Directed Euler tour 有向 Euler 环游 190
Directed graph 有方向的图 181
Directed Hamilton cycle 有向 Hamilton 圈 189
Directed Hamilton path 有向 Hamilton 路 185
Directed path 有向路 182
Directed tour 有向环游 182
Directed trail 有向迹 182

Directed walk 有向途径 182
Disconnected graph 不连通图 14
Disjoint subgraphs 不相交子图 9
Distance
in a digraph 有向图的距离 198
in a graph 图的距离 15
in a weighted graph 赋权图的距离 17
Dodecahedron 十二面体 57
Dual 对偶图 151
Duplication of anedge 边的重复 68

Edge 边 1
Edge chromatic number 边色数 97
k-edge-chromatic graph k边色图 97
k-edge-colourable graph k边可着色图 97
k-edge colouring k边着色 97
k-edge-connected graph k边连通图 46
Edge connectivty 边连通度 46
Edge covering 边覆盖 109
Edge covering number 边覆盖数 109
Edge cut 边割 31
k-edge cut k边割 45
Edge-disjoint subgraphs 边不重子图 9
Edge graph 边图 12
Edge independence number 边独立数 109
Edge-induced subgraph 边导出子图 9
Edge-transitive graph 边可迁图 7
Embeddable on a surface 可嵌入曲面的 147
Embedding 嵌入 147
Empty graph 空图 5
End 端点 1
Equivalent k-bridges 等价k桥 157
Eulerian graph Euler 图 55
Euler's formula Euler 公式 153
Euler's theorem Euler 定理 55
Euler tour Euler 环游 55
Euler trail Euler 迹 55
Even component 偶分支 81
Even cycle 偶圈 15

Exterior of a Jordan curve Jordan 曲线的外部 146
Exterior face 外部面 149
Extremal graph theory 极图理论 117

Face 面 149
Face chromatic number 面色数 168
k-face-colourable plane graph k面可着色平图 168
k-face colouring k面着色 168
k-factor k因子 75
k-factorable graph k可因子分解图 76
Fáry's theorem Fáry 定理 149
Feasible flow 可行流 219
Finite graph 有限图 3
Five-colour theorem 五色定理 166
Fleury's algorithm Fleury 算法 67
Flow 流 203
Folkman graph Folkmam 图 251
Forcibly hamiltonian sequence 强制 Hamilton 序列 265
Forest 森林 28
Four-colour conjecture 四色猜想 168
Four-colour problem 四色问题 168
Franklin graph Franklin 图 260
Frucht's theorem Frucht 定理 251

Generalised Ramsey numbers 广义 Ramsey 数 116
Girth 围长 16
Good algorithm 好算法 21
Graceful graph 优美图 264
Graph 图 1
Graphic sequence 图序列 12
Gray graph Gray 图 251
Greenwood-Gleason graph Greenwood-Gleason 图 258
Grinberg graph Grinbery 图 172
Grötzsch graph Grötzsch 图 126
Grötzsch's theorem Grötzsch 定理 170
Grünbaum graph Grùnbaum 图 257

Hadwiger's conjecture Hadwiger 猜想 134
Hajos' conjecture Hajos 猜想 132
Hall's theorem Hall 定理 76

Hamilton cycle Hamilton 圈 57
Hamilton path Hamilton 路 57
Hamilton-connected graph Hamilton 连通图 65
Hamiltonian graph Hamilton 图 57
Head 头 181
Heawood graph Heawood 图 252
Herschel graph Herschel 图 57
Hoffman-Singleton graph Hoffman-Singleton 图 254
Horton graph Horton 图 256
Hungarian method 匈牙利方法 87
Hypohamiltonian graph 超 Hamilton 图 65
Hypotraceable graph 超可描画图 66

Icosahedron 二十面体 250
Identical graphs 恒等的图 4
Improvement of an edge colouring 边着色的改进 101
Incidence function
of a digraph 有向图的关联函数 181
of a graph 图的关联函数 1
Incidence matrix
of a digraph 有向图的关联矩阵 228
of a graph 图的关联矩阵 7
Incident
edge with vertex 顶点的关联边 3
face with edge or vertex 边或顶点的关联面 150
f-incrementing path *f* 可增路 209
Indegree 入度 183
Independence number 独立数 108
Independent set 独立集 108
Induced subgraph 导出子图 9
In-neighbour 内邻点 186
Inner bridge 内桥 159
Interior of a Jordan curve Jordan 曲线的内部 146
Intermediate vertices 中间点 203
Internal vertices 内部顶点 13
Internally-disjoint paths 内部不相交的路 47
Intersection of graphs 图的交图 10
Isomorphic graphs 同构图 4
Isomorphism 同构 4

Join of two graphs 两个图的联图 62
Joined vertices
in a digraph 有向图的连接顶点 181
in a graph 图的连接顶点 1
Jordan curve Jordan 曲线 145
Jordan curve theorem Jordan 曲线定理 146
Kirchhoff's current law Kirchhoff 电流定律 237
König's theorem König 定理 80
Kruskal's algorithm Kruskal 算法 39
Kuhn-Munkres algorithm Kuhn-Munkres 算法 93
Kuratowski's theorem Kuratowski 定理 161

Labelling method 标号法 211
Labelling procedure 标号程序 211
Length of walk 途径的长 13
Link 连杆 3
Loop 环 3

Map colour theorem 地图着色定理 259
Marriage theorem 婚姻定理 78
Matching 对集 74
Matrix-tree theorem 矩阵-树定理 234
Max-flow min-cut theorem 最大流最小割定理 211
Maximal independent set 极大独立集 141
Maximum flow 最大流 205
Maximum independent set 最大独立集 108
Maximum matching 最大对集 74
McGee graph McGee 图 252
Menger's theorems Menger 定理 50
Meredith graph Meredith 图 255
Minimal covering 极小覆盖 141
Minimum covering 最小覆盖 78
Minimum cut 最小割 208
Multiplicity 重数 101

Neighbour set 邻集 76
Network 网络 203
Nontrivial graph 非平凡图 3

Octahedron 八面体 250

Odd component 奇分支 81
Odd cycle 奇圈 15
Optimal assignment problem 最优分派问题 91
Optimal cycle 最优圈 70
Optimal k-edge colouring 最优 k 边着色 98
Optimal matching 最优对集 91
Optimal tour 最优环游 67
Optimal tree 最优树 39
Order of a squared rectangle 方化矩形的阶 235
Order of magnitude of a function 函数的数量级 22
Orientation 定向图 182
Origin of a walk 途径的起点 13
Outdegree 出度 183
Outer bridge 外桥 159
Out-neighbour 外邻点 186
Overlapping bridges 交叠的桥 157

k-partite graph k 部图 6
path 路 13
Perfect graph 完美图 267
Perfect matching 完美对集 74
Perfect rectangle 完美矩形 235
Personnel assignment problem 人员分派问题 85
Petersen graph Petersen 图 58
Petersen's theorem Petersen 定理 83
Planar embedding 平面嵌入 145
Planar graph 平面图 3
Plane graph 平图 145
Plane triangulation 平面三角剖分图 153
Platonic graphs 柏拉图图 250
f-positive arc, f 正的弧 207
Potential difference 势差 227
Potentially planar sequence 潜在平面序列 268
Probabilistic method 概率方法 114
Product of graphs 积图 103
Proper colouring 正常着色 126
Proper edge colouring 正常边着色 97
Proper face colouring 正常面着色 168
Proper subgraph 真子图 8

Ramsey graphs Ramsey 图 113
Ramsey numbers Ramsey 数 111
Ramsey theorem Ramsey 定理 110
Reachable vertex 可到达的顶点
Reconstruction conjecture 重构猜想 262
Rédei's theorem Redei 定理
Regular graph 正则图 11
k-regular graph k正则图 11
Represented (colour at a vertex) (颜色在顶点上的)表现
Resultant flow 合成流量 204
Revised flow 修改流 210
Robbins' theorem Robbins 定理 196
Robertson graph Robertson 图 253
Robertson-Wegner graph Robertson-Wegner 图 254

Saturated (vertex by a matching) (被一个对集)饱和的(顶点) 74
f-saturated arc f饱和弧 207
f-saturated path f饱和路 209
M-saturated vertex M饱和顶点 74
Schur's theorem Schur 定理 120
Section of a walk 途径的节 13
Self-complementary graph 自补图 7
Self-dual plane graph 自对偶的平图 153
Separated (faces by an edge) (被一条边)分隔的(面)
Shortest path problem 最短路问题 17
Simple graph 简单图 4
Simple squared rectangle 简单方化矩形 235
Sink 收点 203
Skew bridges 偏斜的桥 157
Source 发点 203
Spanning subgraph 生成子图 8
Spanning Supergraph 生成母图 8
Spanning tree 生成树 30
Sperner's lemma Sperner 引理 23
Squared rectangle 方化矩形 234
Stereographic projection 球极平面射影 148
Strict digraph 严格有向图 183
Strong perfect graph conjecture 强完美图猜想 267
Subdigraph 有向子图

Subdivision
of a graph 图的剖分图 132
of an edge 边的剖分 49
Subgraph 子图 8
Supergraph 母图 8
Supply 供给 219
Surface 曲面 147

Tail 尾 181
Tait colouring Tait 着色 170
Tait's conjecture Tait 猜想 170
Terminus of a walk 途径的终点 13
Tetrahedron 四面体 250
Thickness 厚度 156
Thomassen graph Thomassen 图 255
Tietze graph Tietze 图 259
Timetabling problem 排课表问题 103
Total colouring conjeiture 全着色猜想 268
Totally unimodular matrix 全幺模矩阵 234
t-tough graph t 坚韧图 265
Tour 环游 55
Tournament 竞赛图 185
Trail 迹 13
Transfer of a bridge 桥的移动 160
Travelling salesman problem 旅行售货员问题 70
Tree 树 20, 27
Tree graph 树图 44
Triangle 三角形 15
Trivial graph 平凡图 3
Turan's theorem Turan 定理 117
Tutte-Coxeter graph Tutte-Coxeter 图 252
Tutte graph Tutte 图 171
Tutte's theorem Tutte 定理 80
Type 1 $\{u, v\}$-component 1 型 $\{u, v\}$ 分支 128
Type 2 $\{u, v\}$-component 2 型 $\{u, v\}$ 分支 128

Underlying digraph 基础有向图 203
Underlying graph 基础图 181
Underlying simple graph 基础简单图 9
Unilateral digraph 单连有向图 186

Unimodular matrix 幺模矩阵 232
Union of graphs 并图 9
Uniquely k-colourable graph 唯一k可着色图 130
Uniquely k-edge-colourable graph 唯一k边可着色图 103
f-unsaturated arc f非饱和弧 207
f-unsaturated path f非饱和路 209
f-unsaturated tree f非饱和树 211
M-unsaturated vertex M非饱和顶点 74

Value of a flow 流值 205
Vertex 顶点 1
k-vertex-colourable graph k顶点可着色图 126
k-vertex colouring k顶点着色 126
Vertex cut 顶点割 45
k-Vertex cut k顶点割 45
Vertex-transitive graph 顶点可迁图 7
Vertices of attachment 接触顶点 156
Vizing's theorem Vizing 定理 100

Walk 途径 13
Weight
    of a subgraph 子图的权 17
    of an edge 边的权 17
Weighted graph 赋权图 17
Wheel 轮 38

f-zero arc f零弧 207
Zero flow 零流 204