设$(X,\|\cdot\|_X)$与$(Y,\|\cdot\|_Y)$均为赋范线性空间，X^*与Y^*分别为其对偶空间.

(1) 在$X\times Y$上定义：

$$\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2)=(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2),\qquad \forall(x_i,y_i)\in X\times Y,\alpha,\beta\in\mathbb{C}$$

$$\|(x,y)\|=\|x\|_X+\|y\|_Y,\qquad \forall(x,y)\in X\times Y.$$

证明：$(X\times Y,\|(\cdot,\cdot)\|)$为赋范线性空间.

(2) 在$X^*\times Y^*$上定义：

$$\|(f,g)\|_*=\max\{\|f\|_{X^*},\|g\|_{Y^*}\},\qquad \forall(f,g)\in X^*\times Y^*.$$

证明：$(X^*\times Y^*,\|(\cdot,\cdot)\|_*)$为赋范线性空间.

(3) 证明：$(X\times Y)^*$等距同构于$X^*\times Y^*$.

(1) 证明赋范空间$(\boldsymbol{C[0,1]},\|\cdot\|)$是可分的，其中$\|\boldsymbol{f}\|=\boldsymbol{\sup_{x\in[0,1]}}|\boldsymbol{f(x)}|$.

(2) 证明$\left(\boldsymbol{C^1[0,1]},\|\cdot\|_{\boldsymbol{1}}\right)$中有界集在$(\boldsymbol{C[0,1]},\|\cdot\|)$中是列紧的，其中

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{1}}=\boldsymbol{\max\left(\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|,\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\right)}.$$

(3) 举例说明$\boldsymbol{l^2}$中存在不列紧的有界集.

设X为赋范线性空间，M为X的有限维子空间。证明：

(1) M是X的闭子空间且完备；

(2) 若$\dim X = \infty$，则M在X中无处稠密；

(3) 若X为无限维**Banach**空间，则X没有可数的**Hamel**基。

设X为Banach空间， Y_n是一列赋范线性空间，$T_n \in L(X, Y_n)$是一列有界线性算子.

证明X中的子集

$$B = \{x \in X: \limsup_{n\to\infty} \|T_n x\| < \infty\}$$

或者是X中第一纲集合, 或者等于X.

(1) 给出自反空间的定义，证明每一个有限维赋范数性空间是自反的；

(2) 给出一个不自反空间的例子，并简要说明理由 .

设X是Banach空间，$T \in L(X)$是下有界的：存在常数$c > 0$使得

$$\|Tx\| \geq c\|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

证明对任意的$F \in X'$，均存在$f \in X'$使得

$$F(x) = f(Tx), \qquad \forall x \in X.$$

(1) 设X为赋范线性空间，f为X上任意非零线性泛函，$N(f)=\{x; f(x)=0\}$. 设$x_0 \in X \backslash N(f)$，证明：任意$x \in X$都可唯一表示为

$$x = kx_0 + y，\ y \in N(f).$$

(2) 设M为Hilbert空间H的闭子空间，证明M是H上某个连续线性泛函的零空间的充要条件是$M^{\perp}$至多为一维空间.

设X是Banach空间，$(Y，\|\cdot\|_1)$是赋范线性空间. $\|\cdot\|_2$是Y上第二个范数，使得$(Y，\|\cdot\|_2)$成为Banach空间。如果范数$\|\cdot\|_2$强于$\|\cdot\|_1$，即存在常数$C\geq 0$使得

$$\|y\|_1 \leq C\|y\|_2, \qquad \forall y \in Y,$$

证明任何从X到$(Y，\|\cdot\|_1)$的有界线性算子T也必是从X到$(Y，\|\cdot\|_2)$的有界线性算子.

设X是自反空间，M是X的闭子空间，证明商空间X/M也是自反的。

设X是Banach空间，T是X上有界线性算子. 证明集合

$$\{\lambda \in \sigma(A): \lambda I - A\text{是单射}, R(\lambda I - A)\text{是闭集但}R(\lambda I - A) \neq X\}$$

是复平面上的开集.

设X是Banach空间，$T \in L(X)$.

(1) 假设T是紧算子. 证明: T是有限秩算子 (即$R(T)$是有限维的) 当且仅当$R(T)$是闭的.

(2) 假设T与X上所有的紧算子可交换，即当S为紧算子时，$ST = TS$. 证明: 存在常数c使得$T = cI$.

设H为Hilbert空间，$P_n \in L(H)$是正交射影算子且单调：

$$P_1 \leq P_2 \leq P_3 \leq \cdots \leq P_n \leq \cdots$$

(1) 证明：P_n强收敛于某正交射影算子P;

(2) 求$R(P)$和$N(P)$.

设H是Hilbert空间，A是H上的有界自伴算子.

(1) 证明：$\sigma_r(A)=\emptyset$.

(2) 若H可分，证明:$\sigma_p(A)$至多可数.

(3) 举出一个自伴算子的例子，使得其谱恰为

$$\left\{0,\ \frac{1}{2025},\ \frac{1}{2026},\ \frac{1}{2027},\ \frac{1}{2028},\ \cdots\right\}.$$

设H是复Hilbert空间，A是H上的正算子. 证明下述条件等价：

(1) $R(A)$稠于H;

(2) $N(A)=\{0\}$;

(3) A是正定的，即若$x\neq 0$，则$(Ax,x)>0$.

设X是Banach空间，$A \in L(X), A$满足以下条件:

(a) $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|, \ \forall \lambda > 0, \forall x \in X$;

(b) 存在$\lambda_0 > 0, R(\lambda_0 I - A) = X$.

证明：$(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$.