– 图论及其应用–

匹配与独立集

侯新民

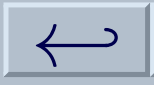
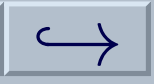
计算与应用数学系
xmhou@ustc.edu.cn



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





目　录

1 匹配 **4**

二部图有完美匹配条件-Hall定理 6

一般图有完美匹配条件-Tutte定理 16

König定理 27

应用举例 33

作业 38

2 独立集 **40**

作业 54

3 人员安排问题-完美匹配算法 **55**

匈牙利算法 66

作业 68



4 最优安排问题-最大权匹配算法 69

5 货郎担问题（TSP） 70

作业 83















1 匹配

- 一个舞会上，有x 位女生和y 位男生，假设每位女生都有至少k 位心仪的男舞伴（排名不分先后）。问每位女生是否都能够找到心仪的舞伴？该问题可以转化为图的匹配问题来解决。

- 设G 是无环非空图, M 是$E(G)$ 的非空子集. 若M 中任何两条边在G 中均不相邻, 则称M 为G 的匹配 (matching). 例如, 在图 1 所示图中, 粗边所示的边集是该图的一个匹配.

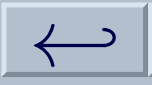
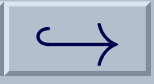
- G 中与M 中边关联的顶点称为M饱和点 (saturated vertex). 反之, 称为M 非饱和点 (unsaturated vertex).



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





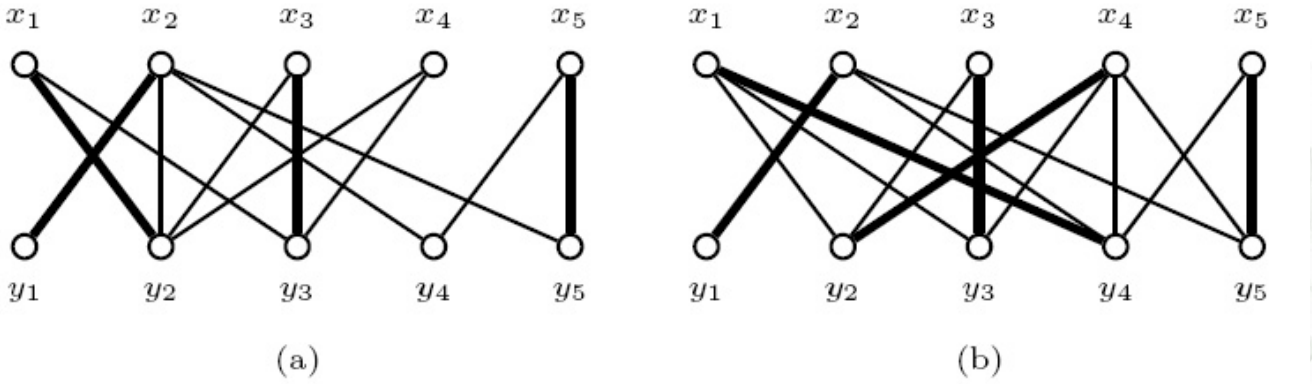


Figure 1: (a) 最大匹配; (b) 完美匹配

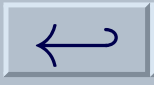
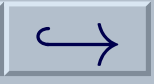
- 设$X \subseteq V(G)$. 若X 中每点都是M 饱和点, 则称M**饱和**X.
- 若M 饱和$V(G)$, 则称M 为G 的完美匹配 (perfect matching).
- 从子图观点看, 匹配是图G 的1-正则子图 (1-regular subgraph), 完美匹配是图G的支撑1-正



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





则子图(spanning 1-regular subgraph), 也称为1因子(1-factor)。

- 若对G 的任何匹配M' 均有$|M'| \leqslant |M|$, 则称M为G 的最大匹配 (maximum matching).
- 显然, 每个完美匹配都是最大匹配, 反之不真.
- 图 1 中粗边所示的匹配分别是该图的最大匹配和完美匹配.
- 由于这些概念均与边的方向无关, 所以只需讨论无向图G 中的匹配问题. 图G 应满足什么条件才有完美匹配呢? 这是本节中关心的主要问题.

二部图有完美匹配条件-Hall定理

下面我们给出舞会问题的理论解答: 构造2部图G,其顶点划分为女生集合和男生集合，两个顶点连一条边当



且仅当该男生是该女生的心仪舞伴。则舞伴问题就转化为判定2 部图G是否有饱和女生集合的匹配问题？ 该问题被英国数学家Hall 完全解决，其结果称为Hall定理，是组合数学与图论中最基本的定理之一. 它有各种表达形式，其图论表达形式为:

定理 5.1.1 (Hall定理, P. Hall, 1935) 设G 是2 部划分为$\{X,Y\}$ 的2部分图，则: G 有饱和X 的匹配$\Leftrightarrow$

$$|S| \leqslant |N_G(S)| \quad \forall\, S \subseteq X \quad (\text{称为Hall条件}). \qquad (1)$$

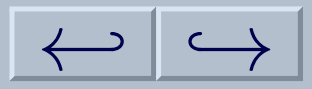
证明 ($\Rightarrow$)

- 设M 是G 中饱和X 的匹配,则该匹配自然给出一个从X到Y的单射，记为$M(x), x \in X$。









- 设 $S \subseteq X$, 则 $M(S) \subseteq N_G(S)$.

  所以 $|S| = |M(S)| \leq |N_G(S)|$.

($\Leftarrow$)

- 令 M 是 G 中最大匹配. 只需证明 $|M| \geqslant |X|$.
- 令 H 是由 G 的每条边给定从 X 到 Y 的方向后所得到的定向图.
- 构作有向图 D (参见图 2):

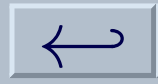
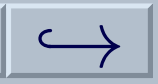
$$V(D) = V(H) \cup \{x, y\},$$
$$E(D) = E(H) \cup \{(x, x') : x' \in X\} \cup \{(y', y) : y' \in Y\}.$$

- 断言: D 中内部点不交的 (x, y) 路的最大条数为 $|M|$. (证明: 设 $\{P_1, \cdots, P_\ell\}$ 为 D 中连接 x, y 的







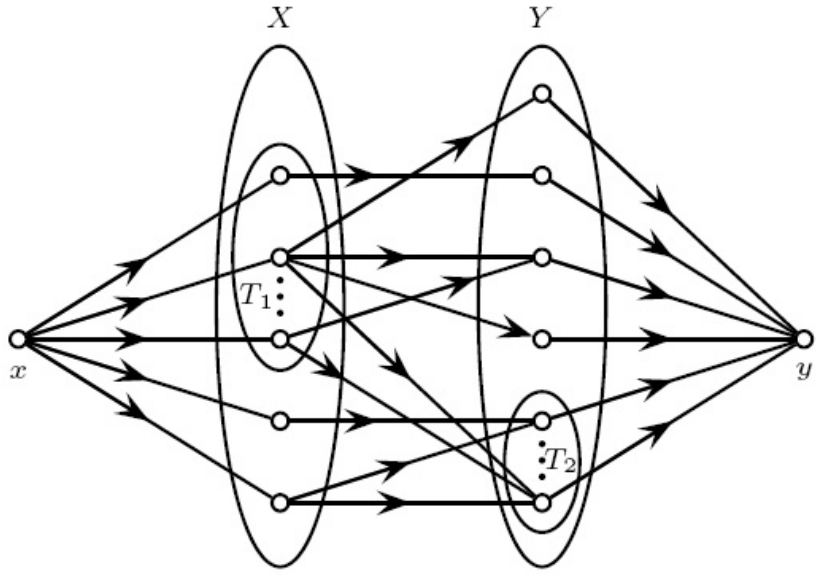


Figure 2: 定理5.1.1证明辅助图

点不交的最大路集，则$|E_D^+(P_i) \cap E_D^+(X,Y)| = 1$. 设$E_D(P_i) \cap E_D^+(X,Y) = \{e_i\}$，则$\{e_1, e_2, \cdots, e_\ell\}$是$D$的匹配，故$\ell \leq |M|$. 设$M = \{e_1, \cdots, e_m\}$. 则过每



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）








条边e_i都可以构造一条(x,y)-路且两两内点不交，即$|M| \leq \ell$. 得证)

- 令T 是D 中最小(x,y) 分离集. 由Menger定理(4.3), 有

$$|M| = \zeta_D(x,y) = \kappa_D(x,y) = |T|.$$

- 令$T_1 = T \cap X$, $T_2 = T \cap Y$. 则$N_D^+(X \setminus T_1) \subseteq T_2$.
- 所以

$$\begin{aligned} |M| = & \quad |T| = |T_1| + |T_2| \geq |T_1| + |N_D^+(X \setminus T_1)| \\ = & \quad |T_1| + |N_G(X \setminus T_1)| \geqslant |T_1| + |X \setminus T_1| = |X|. \end{aligned}$$

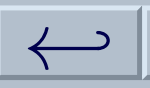
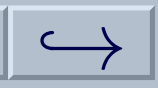
定理得证. ∎

我们已从Menger定理导出Hall定理, 但也可以从Hall定理导出Menger定理, 其证明留给读者(习题5.1.11).







Hall 定理 (5.1.1) 有许多个直接证明. 下面给出一个归纳法证明。

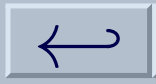
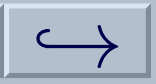
证法 1 (P. R. Halmos, H. E. Vaughan, 1950)

- 对 $|X| \geqslant 1$ 用归纳法.
- 当 $|X| = 1$ 时, 条件 (5.1.1) 显然是充分的, 以下进行归纳步骤.
- 若对任何 $\emptyset \neq S \subset X$ 均有 $|N_G(S)| \geqslant |S| + 1$.
- 取 $x \in S$, $y \in N_G(x)$. 则 $G' = G - \{x, y\}$ 是 2 部图且满足Hall条件.
- 于是由归纳假设,G' 中有饱和 $(X \setminus \{x\})$ 的匹配 M'.
- 因此, $M = M' \cup \{xy\}$ 是 G 中饱和 X 的匹配.
- 故必存在 $\emptyset \neq S \subset X$ 使 $|N_G(S)| = |S|$.







- 令 $G_1 = G[S \cup N_G(S)]$, $G_2 = G - (S \cup N_G(S))$. 则 G_1 和 G_2 都是 2 部图, 而且 G_1 显然满足Hall条件.
- 任取 $\emptyset \neq S' \subseteq X \setminus S$, 则

$$\begin{aligned} |N_{G_2}(S')| &\geqslant |N_G(S \cup S')| - |N_G(S)| \\ &\geqslant |S \cup S'| - |S| = |S'|. \end{aligned}$$

- 所以 G_2 也满足Hall条件.
- 由归纳假设, G_1 中存在饱和 S 的匹配 M_1, G_2 中存在饱和 $(X \setminus S)$ 的匹配 M_2.
- 因此 $M = M_1 \cup M_2$ 是 G 中饱和 X 的匹配. ∎

由 Hall 定理, 立即得到判别 2 部图是否有完美匹配的下列准则.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）







全 屏

搜 索

关 闭

推论 5.1.1.1 (婚姻定理, G. Frobenius, 1917) 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部图 G 有完美匹配 $\Leftrightarrow |X|=|Y|$, 并且对任何 $S\subseteq X$ (或 Y) 均有 $|N_G(S)|\geqslant |S|$.

推论 5.1.1.2 (D. König, 1916) 设 G 是 $k(>0)$ 正则 2 部图, 则 G 有完美匹配.

证明

- 设 G 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 k 正则 2 部图, 则

$$k|X| = |E(G)| = k|Y|.$$

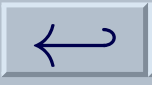
- 由于 $k\neq 0$, 所以 $|X|=|Y|$.
- 任取 $S\subseteq X$, 并用 E_1 和 E_2 分别表示 G 中与 S 和 $N_G(S)$ 中点关联的边集, 则 $E_1\subseteq E_2$.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）








- 因而
$$k|N_G(S)| = |E_2| \geqslant |E_1| = k|S|,$$
- 即
$$|N_G(S)| \geqslant |S|, \quad \forall\, S \subseteq X.$$
- 由 Hall 定理 (5.1) 知 G 有饱和 X 的匹配 M.
- 由于 $|X| = |Y|$, 所以 M 是完美匹配. ∎

注 推论 5.1.1.2 中条件 "G 是 2 部图" 不可少. 事实上, 对任何 $k(\geqslant 2)$, 存在 k 正则简单图使其不含完美匹配 (习题 5.1.2 (c)).

推论 5.1.1.3 设 G 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的简单 2 部图, 而且 $|X| = |Y| = n$. 若 $\delta(G) \geqslant \frac{n}{2}$, 则 G 有完美匹配.

证明



- 任取 $S \subseteq X$.
- 若 $|N(S)| < |S|$, 则由于 G 是简单 2 部图且 $\delta(G) \geqslant \frac{n}{2}$, 所以 $|S| > |N(S)| \geqslant \delta(G) \geqslant \frac{n}{2}$, 而且 $Y \setminus N(S) \neq \emptyset$.
- 令 $u \in Y \setminus N(S)$, 则 $N(u) \subseteq X \setminus S$, 即

$$\delta(G) \leqslant d_G(u) = |N(u)| \leqslant |X| - |S| < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2},$$

矛盾于 $\delta(G) \geqslant \frac{n}{2}$.

- 故有

$$|N(S)| \geqslant |S|, \quad \forall\, S \subseteq X.$$

由 Hall 定理和 $|X| = |Y|$ 知 G 有完美匹配. ∎

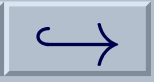
注 条件 "$\delta(G) \geqslant \frac{n}{2}$" 不能修改为 "$\delta(G) \geqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$". 例如, $G = K_{2,3} + K_{3,2}$ 中不含完美匹配.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





一般图有完美匹配条件-Tutte定理

对于一般的图有完美匹配的一个充要条件由W. T. Tutte (1947)获得. 下面的定理有许多证明, 这里给出W. Mader (1973)的证明.

定理5.1.2 (Tutte定理) G 有完美匹配 $\Leftrightarrow$

$$o(G-S) \leqslant |S| \quad \forall\, S \subset V(G), \text{ (称为Tutte条件)}, \qquad (2)$$

其中 $o(G-S)$ 是 $G-S$ 的奇阶连通分支数目.

证明 显然, 只需对简单图证明定理就行了.

($\Rightarrow$)

- 设 M 是 G 的完美匹配, $S \subset V(G), G_1, G_2, \cdots, G_t$ 是 $G-S$ 的奇阶连通分支.



- 所以存在 $u_i \in V(G_i)$ 和 $w_i \in S$ 使 $\{u_i w_i : i = 1,2,\cdots,t\} \subseteq M$.
- 于是

$$o(G-S) = t = |\{w_1, w_2, \cdots, w_t\}| \leqslant |S|.$$

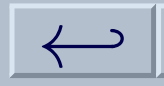
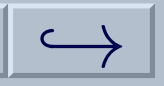
($\Leftarrow$)

- 令 $S = \emptyset$, 由式(5.1.2)有 $o(G-S) = 0$, 所以 $n = |V(G)|$ 为偶数. 不妨设G是连通的.
- 对偶数 $n \geqslant 2$ 用归纳法.
- 当 $n = 2$, 结论显然成立.
- 假设结论对任何 $< n$ (偶)阶且满足Tutte条件的图成立, 并设 G 是满足Tutte条件的 $n(\geqslant 4$,偶)阶图.







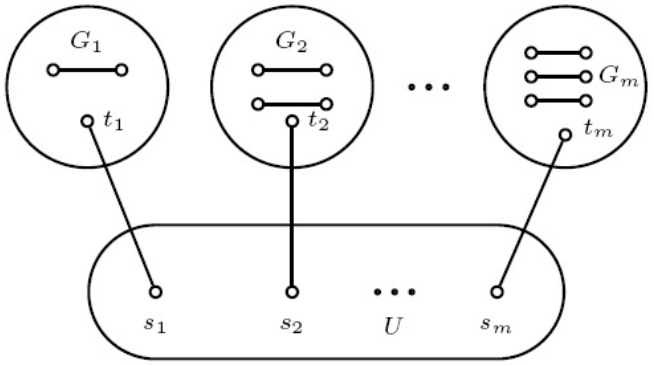


Figure 3: 定理5.1.2证明辅助图

- 设U 是$V(G)$ 中使Tutte条件等号成立的最大非空子集. 令$|U| = m$, 并令$G_1, G_2, \cdots, G_m$ 是$G-U$ 的奇分支, 则有下列三个结论成立:

(i) $G-U$ 无偶分支.

事实上, 设H 是$G-U$ 的偶分支, $u \in V(H)$, 则

$$m+1 \leqslant o(G-(U \cup \{u\})) \leqslant |U \cup \{u\}| = m+1,$$



即 $o(G-(U\cup\{u\}))=|U\cup\{u\}|$. 矛盾于 U 的选取.

(ii) 任取 $x\in G_i$, 则 G_i-x 有完美匹配.

若不然, 由归纳假设存在 $S\subset V(G_i-x)$ 使得 $o((G_i-x)-S)>|S|$. 由于 $o((G_i-x)-S)$ 与 $|S|$ 有相同的奇偶性. 所以 $o((G_i-x)-S)\geqslant|S|+2$. 于是

$$\begin{aligned}|U|+1+|S| &= |U\cup S\cup\{x\}|\geqslant o(G-(U\cup S\cup\{x\}))\\ &= o(G-U)-1+o((G_i-x)-S)\\ &\geqslant |U|+1+|S|.\end{aligned}$$

即

$$o(G-(U\cup S\cup\{x\}))=|U\cup S\cup\{x\}|>|U|,$$

矛盾于 U 的选取.

(iii) G 含匹配 $M=\{s_it_i:\ s_i\in U,t_i\in V(G_i),\ i=1,\cdots,m\}$.



事实上, 考虑2 部划分为 $\{V_1, V_2\}$ 的2 部图 H, 其中 $V_1 = \{G_1, \cdots, G_m\}$, $V_2 = U$, G_i 与 U 中点 s 在 H 中相邻 $\Leftrightarrow$ G 含从 s 到 G_i 中点的边. 于是, (iii) 成立 $\Leftrightarrow$ H 有饱和 V_1 的匹配. 任取 $A \subseteq V_1$, 并令 $B = N_H(A) \subseteq V_2$. 则由于 A 中元素都是 $G - B$ 的奇分支和式 (5.1.2), 有

$$|A| \leqslant o(G - B) \leqslant |B| = |N_H(A)|,$$

即 A 满足 Hall 定理中Hall条件. 于是, H 有饱和 V_1 的匹配, 即 (iii) 成立.

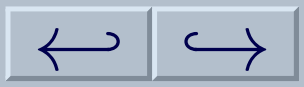
- 综合 (i), (ii), (iii) (参见图 3), 定理得证. ∎

定理5.1.2* [Berge公式, C. Berge, 1958] 用 $\nu(G)$ 表示 G 的









最大匹配中边的数目, 则

$$\begin{aligned}\nu(G) &= \frac{1}{2}\{|V(G)| - \max_{S\subset V(G)}\{o(G-S)-|S|\}\} \\ &= \min_{S\subset V(G)}\left\{\frac{|V(G)|+|S|-o(G-S)}{2}\right\}.\end{aligned}$$

证明： 作业。

推论 5.1.2.1 偶阶 $(k-1)$ 边连通 $k(\geqslant 1)$ 正则图有完美匹配.

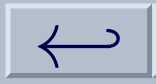
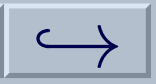
证明

- 当 $k=1$ 时, 结论显然成立.
- 以下假定 $k \geqslant 2$. 证明Tutte条件成立, 即对任意 $S \subseteq V(G)$, $o(G-S) \leq |S|$.







- 若 $S=\emptyset$ 时，由于 $n(G)$ 为偶数，所以 $o(G-S)=o(G)=0=|\emptyset|$.
- 设 $S\neq\emptyset$，$G_1,G_2,\cdots,G_t$ 是 $G-S$ 的奇分支，$m_i=|E_G(V(G_i),S)|$，$n_i=n(G_i)$.
- 由于 $\lambda(G)\geqslant k-1$，所以 $m_i\geqslant k-1\,(i=1,2,\cdots,t)$.
- 若存在某个 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 使 $m_i=k-1$，则

$$e(G_i)=\frac{1}{2}(kn_i-k+1)=\frac{1}{2}k(n_i-1)+\frac{1}{2},$$

上式右端不为整数，矛盾。

- 所以 $m_i\geqslant k$，$i=1,2,\cdots,t$. 于是

$$o(G-S)=t\leqslant\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{t}m_i\leqslant\frac{1}{k}\sum_{u\in S}d_G(u)=|S|.$$



- 因此,

$$o(G-S) \leqslant |S|, \quad \forall\, S \subset V(G).$$

所以, S 满足式(5.1.2). 由Tutte定理知 G 有完美匹配. ∎

推论 5.1.2.2 (J. Petersen, 1891) 2边连通3正则图有完美匹配.

证明 因为 G 是3正则图, 所以由推论1.3.2知 G 是偶阶. 再由推论5.1.2.1, 立即可知该结论成立. ∎

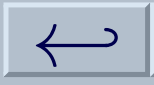
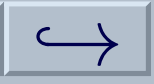
注 推论5.1.2.2中条件“2边连通”是不可缺少的. 一个著名的例子见图 4 所示. 因为 $o(G-x)=3$, 所以由Tutte定理知其不含完美匹配.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





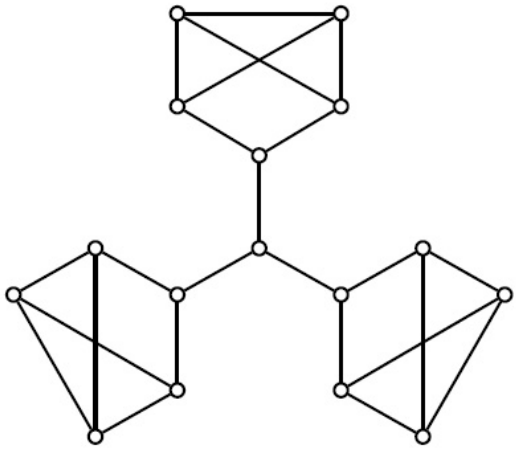


Figure 4: 无完美匹配的3正则图

由推论5.1.2.1知, $K_{2n}\,(n \geqslant 1)$ 有完美匹配. 事实上, 可以直接构造出 K_{2n} 的 $(2n-1)$ 个互不相交的完美匹配. 作为推论5.2的推论叙述如下.

推论 5.1.2.3 完全图 K_{2n} 有 $(2n-1)$ 个互不相交的完



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）








美匹配.

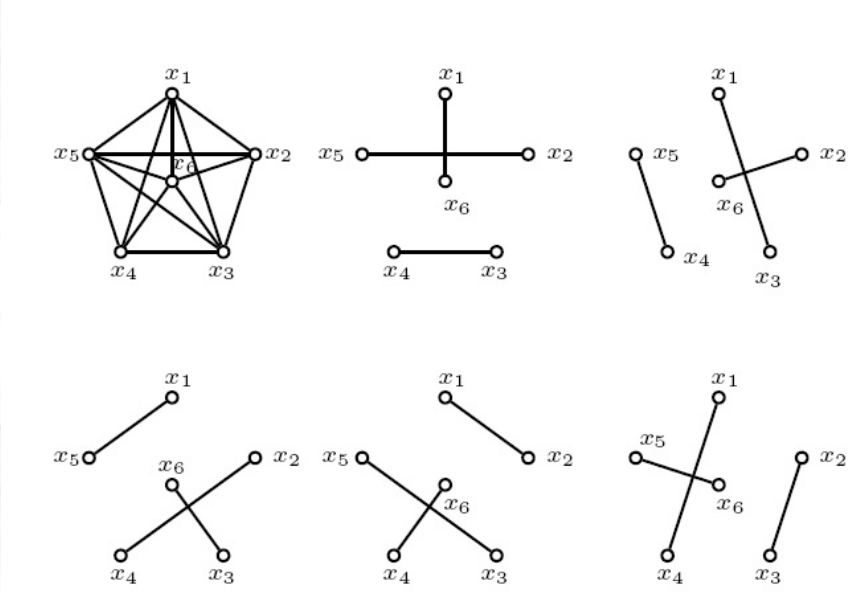


Figure 5: K_6 的5个互不相交的完美匹配

证明



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





全　屏

搜　索

关　闭

- 当 $n=1$ 时, 结论显然成立.
- 下设 $n \geqslant 2$. 令 $V(K_{2n})=\{x_1, x_2, \cdots, x_{2n}\}$, 并对每个 $i=1,2,\cdots,2n-1$, 令 $E(K_{2n})$ 的子集

$$M_i=\{x_i x_{2n}\} \cup \{x_{i-j} x_{i+j}: \ j=1,2,\cdots,n-1\},$$

其中 $(i-j)$ 和 $(i+j)$ 都是 $(\mathrm{mod}\ (2n-1))$ 的.

- 也可以按下列方法得到 M_i: 将平面上正 $(2n-1)$ 边形的点代表 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1}$, 而该正 $(2n-1)$ 边形的中心代表 x_{2n}, 并用直线段连接每对顶点. 于是, M_i 的边即为 $x_i x_{2n}$ 和所有与 $x_i x_{2n}$ 垂直的边. 例如, 当 $n=3$ 时, M_i 如图 5 所示.
- 如此得到的 $M_i\,(i=1,2,\cdots,2n-1)$ 为 K_{2n} 的 $(2n-1)$ 个互不相交的完美匹配. ∎



König定理

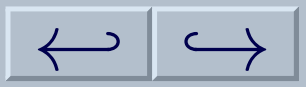
在组合数学中，还有一个与Hall定理等价的结果，这就是König定理. 为叙述König (匈牙利数学家) 定理，需要下述概念.

- 设G是无环非空图，S是$V(G)$的非空子集. 若$E(G)$中每条边都与S中某点关联，则称S为G的点覆盖 (vertex covering).
- 如果G中任何异于S的点覆盖S'均有$|S'| \geqslant |S|$，则称S为最小点覆盖 (minimum vertex covering).
- 点覆盖S称为极小的 (minimal)，若对任何$x \in S$, $S \setminus \{x\}$都不是点覆盖.
- 显然，最小点覆盖一定是极小点覆盖，反之不真. 例如，图 6 中所示的3个图. 图中实顶点构成的集是该图的一个极小点覆盖，其中 (b) 和 (c) 中点覆盖都是最小点覆盖.









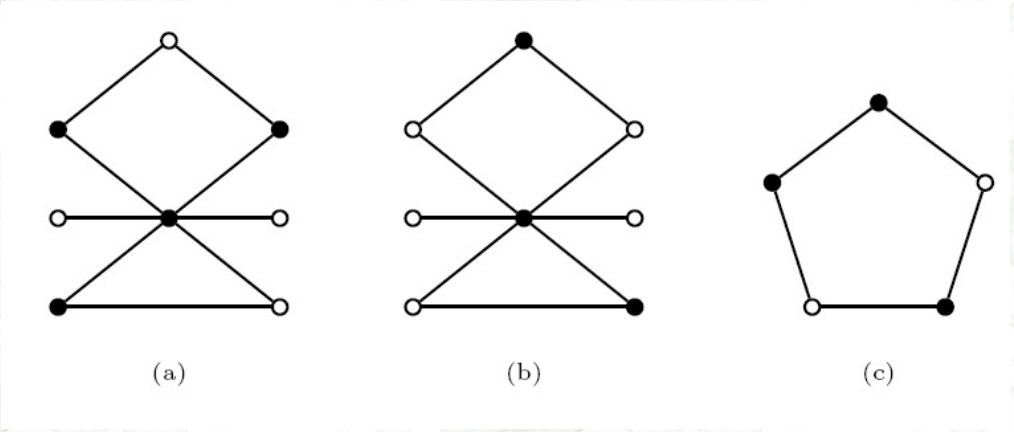


Figure 6: 极小和最小点覆盖

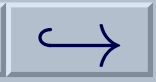
- G 中最小点覆盖中的顶点数称为点覆盖数 (vertex covering number), 记为 $\beta(G)$.
- G 中最大匹配中的边数称为匹配数 (matching number), 记为 $\nu(G)$.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





- 易知,

$$\beta(K_n) = n-1,\ \nu(K_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor;$$
$$\beta(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\ \nu(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$
$$\beta(K_{m,n}) = \min\{m,n\} = \nu(K_{m,n}).$$

- 设 G 是任意无环图, S 是 G 中任意点覆盖, M 是 G 中任意匹配. 由于 M 中任何边 e 的两端点至少有一个属于 S, 因此

$$\nu(G) \leqslant \beta(G). \tag{3}$$

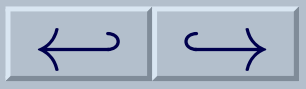
由上述例子看出, 式(3)中的等号对一般图不成立. 然而, 式(3)中等号对2 部图恒成立. 这就是下列著名的König定理.

定理 5.1.3 (König 定理, D. König, 1931) 对任何2 部图 G 有 $\nu(G) = \beta(G)$, 即匹配数等于点覆盖数.









证明

- 利用 Menger 定理 (4.3) 作类似于 Hall 定理 5.1.1 的证明立即可得, 其中 $\nu(G)=|M|, \beta(G)=|T|$ (参见图 2).
- 下面利用 Hall 定理来给出证明. 由式 (3), 只需证明 $\beta(G) \leqslant \nu(G)$.
- 设 G 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部图, Z 是 G 的最小点覆盖, 并令

$$S=Z\cap X, \quad T=Z\cap Y, \quad S'=X\setminus S, \quad T'=Y\setminus T.$$

- 由点覆盖的定义知 S' 与 T' 之间无边相连.
- 考虑 G 的 2 部子图 $H=G[S\cup T']$.



- 因为 Z 是 G 的最小点覆盖, 所以对 S 的任何子集 R 均有 $|N_H(R)| \geqslant |R|$ （否则 $(S \setminus R) \cup N_H(R) \cup T$ 是一个更小的点覆盖集，和Z最小矛盾）.
- 由 Hall 定理知 H 中存在饱和 S 的匹配, 记为 M_1.
- 同样, $G[S' \cup T]$ 中存在饱和 T 的匹配, 设为 M_2.
- 由于 $M_1 \cup M_2$ 是 G 的匹配, 而且 $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, 所以,

$$\beta(G) = |Z| = |S| + |T| = |M_1| + |M_2| \leqslant \nu(G).$$

定理得证. ∎

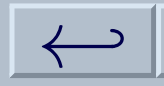
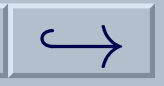
推论 5.1.3 设 G 是 2 部划分为 $\{X, Y\}$ 的 2 部简单图, $k \geqslant 1$. 若 $|X| = |Y| = n$, 且 $e(G) > (k-1)n$, 则 $\nu(G) \geqslant k$.

证明







- 因为G 是2 部简单图, 并且$|X| = |Y| = n$, 所以$\Delta(G) \leqslant n$. 于是, G 的每个顶点最多覆盖n 条边.
- 由于$e(G) > (k-1)n$, 所以断定 $\beta(G) \geqslant k$.

  若不然, 设$\beta(G) \leqslant k-1$, 则$e(G) \leqslant \beta(G)n \leqslant (k-1)n$, 矛盾于$\varepsilon > (k-1)n$ 的假定.
- 由 König 定理 (5.3) 立即有$\nu(G) = \beta(G) \geqslant k$. ∎

Remark: Define

$ex_b(m,n,H) = \max\{e(G) : G$ is H-free bipartite graph with vertex partitions of

The above results implies that

$$ex_b(n,n,M_k) = (k-1)n.$$



应用举例

匹配理论有许多很有趣的应用, 例举几个如下.

例 5.1.1 图 7 (a) 所示的图形是由 14 个大小相同的正方形组成的图形. 试证明: 不论如何用剪刀沿着图形中所画的直线对它进行裁剪, 总剪不出 7 个由相邻的两个小正方形组成的矩形来 (中国科学技术大学 1977 年招收少年班试题第 2 题).

证明

- 将图形中方格从 1 到 14编号. 以方格为顶点集作简单无向图 $G=(V,E)$, $ij\in E(G)\Leftrightarrow i$ 和 j 所在的方格在图形中相邻. 这样得到的图 G 如图 7 (b) 所示.



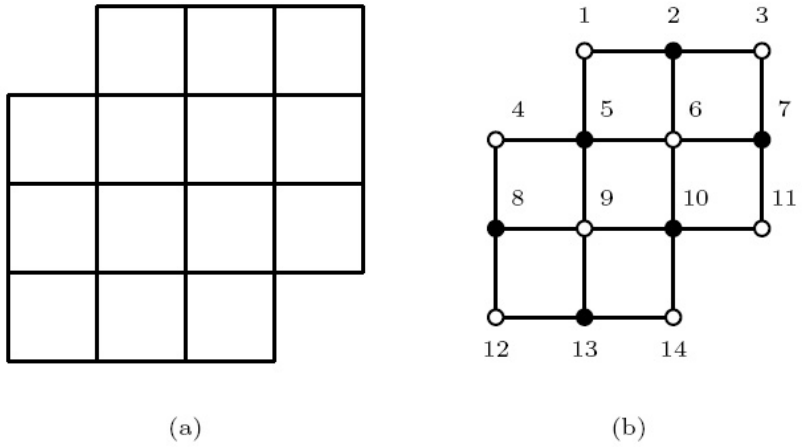


Figure 7: 例5.1.1的辅助图

- 若能剪出7个由相邻的两个小正方形组成的矩形来, 这7个矩形代表G中的7条边是G中一个完美匹配.
- 但这是不可能的. 因为G中无奇圈, 所以由推论1.4.2知G是2部划分为$\{X,Y\}$的2部图, 其中$X = \{1,3,4,6,9,11,12,14\}, Y =$

$\{2,5,7,8,10,13\}$, $|X| = 8 > 6 = |Y|$.

- 由推论 5.1.1.1 知 G 中不存在完美匹配. ∎

例 5.1.2 (P. Hall, 1935) 设 H 是有限群, K 是 H 的子群. 证明: 存在元素 $h_1, h_2, \cdots, h_n \in H$ 使得 $h_1K, h_2K, \cdots, h_nK$ 是 K 的左陪集, $Kh_1, Kh_2, \cdots, Kh_n$ 是 K 的右陪集.

证明

- 因为 H 中任何两个左陪集 aK 和 bK 或者恒等或者不相交.
- 所以 H 可按左陪集划分成 n 个左陪集之并, 其中 n 等于商集 H/K 的元素个数.
- 作 2 部划分为 $\{X, Y\}$ 的 2 部无向图 G, 其中 $X = \{hK : h \in H\}$, $Y = \{Kh : h \in H\}$; $x \in X$, $y \in Y$, x



与 y 之间有 ℓ 条平行边相连 $\Leftrightarrow$ hK 与 Kh' 有 ℓ 个公共元素.

- 易知 G 是 $|K|$ 正则的.
- 由推论 5.1.1.2 知 G 有完美匹配 M.
- 设 $|M| = n$, 并设与 M 中边 e_i 对应的左, 右陪集公共元素为 h_i. 于是 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 即为所求. ∎

例 5.1.3 (G. Birkhoff, 1946 & J. von. Neuman, 1953) 设 $\mathbf{Q}$ 是行元素之和与列元素之和均为 1 的 $m \times n$ 非负实矩阵 (这样的矩阵称为**双随机矩阵** (doubly stochastic matrix)), 则

(i) $\mathbf{Q}$ 是方阵;

(ii) $\mathbf{Q}$ 中存在不同行不同列的 n 个非零元素;










(iii) $\mathbf{Q}$ 能表示成置换方阵的凸线性组合，即存在实数 $c_i \geq 0$ 使

$$\mathbf{Q} = c_1\mathbf{P}_1 + c_2\mathbf{P}_2 + \cdots + c_k\mathbf{P}_k,$$

其中 $\mathbf{P}_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 为置换方阵，并且 $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$.

证明：作业!



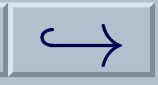












作业

5.1.7 证明: 设 M 是 2 部图 $G=(X\cup Y,E)$ 的最大匹配, 则 (O. Ore, 1955)

$$|M|=|X|-\max\{|S|-|N(S)|:\ \forall\ S\subseteq X\}.$$

5.1.8 证明: 设 M 是 G 的最大匹配, $r=\max\{o(G-S)-|S|:\ \forall\ S\subset V(G)\}$, 则 $|M|=\frac{1}{2}(|V(G)|-r)$. (C. Berge, 1958)

5.1.10 G 的 k 正则支撑子图称为 G 的 k 因子 (k-factor). 若 G 存在边不交的 k 因子 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 使得 $G=G_1\oplus G_2\oplus\cdots\oplus G_n$, 则称 G 是 k 因子可分解的 (k-factorable). 证明:

(a) G 含 1 因子 $\Leftrightarrow$ G 有完美匹配;

(b) K_{2n} 和 $k_{n,n}$ 是 1 因子可分解的;

(c) K_{2n+1} 是 2 因子可分解的;



(d) 简单图 G 是2因子可分解的 $\Leftrightarrow$ G 是 $2k(k \geqslant 1)$ 正则的;

(e) Petersen 图是非1因子可分解的;

(f) 每个 $2k(k \geqslant 1)$ 正则图有2因子分解 $\Leftrightarrow$ 每个 $k(\geqslant 1)$ 正则2部图有1因子分解.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）








2 独立集

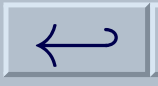
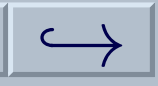
- 设D是无环图，S是$V(D)$的非空子集. 若S中任何两顶点在D中均不相邻，则称S为D的独立集(independent set).
- D的独立集S称为最大的(maximum)，如果对D中任何异于S的独立集S'均有$|S'| \leqslant |S|$.
- 独立集S称为极大的(maximal)，如果对任何$x \in V \setminus S$，$S \cup \{x\}$都不是独立集. 图8给出了这些例子.
- 因为独立集概念与图中边的方向无关，只与顶点之间是否相邻有关，所以只需讨论简单无向图的情形.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





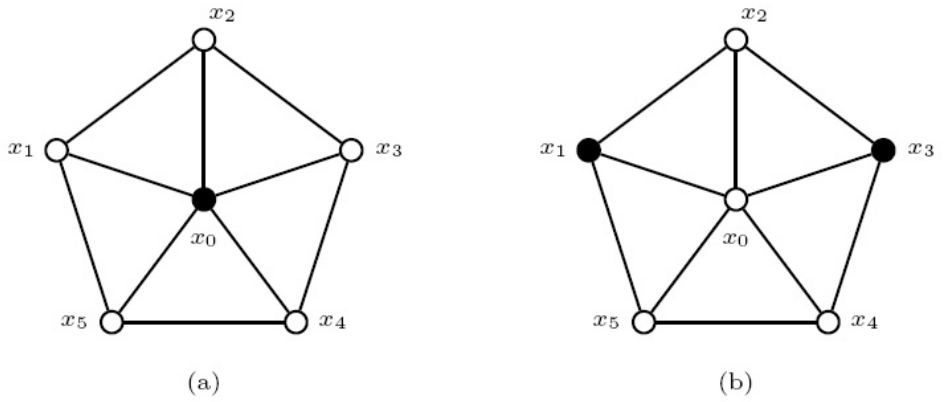


Figure 8: (a) 极大独立集 $S' = \{x_0\}$ (b) 最大独立集 $S = \{x_1, x_3\}$

- G 中最大独立集中的点数称为 G 的独立数 (independent number), 记为 $\alpha(G)$.
- 易知

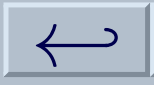
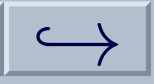
$$\alpha(G) = 1 \Leftrightarrow G \text{ 含完全支撑子图 } K_n,$$
$$\alpha(K_{m,n}) = \max\{m, n\},$$
$$\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





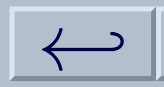
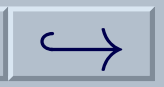
- 对于一般的图，确定$\alpha(G)$是个极其困难的问题(NPC).
- 设L是$E(G)$的非空子集. 若G的每个顶点都与L中某条边关联，则称L为G的边覆盖(edge covering).
- 易知，G有边覆盖$\Leftrightarrow \delta(G) > 0$.
- 最小边覆盖中的边数称为G的边覆盖数(edge covering number)，记为$\rho(G)$.
- 由定义，边覆盖L的导出子图必为G的一个支撑子图且$\delta(L) > 0$；因为一条边至多饱和两个顶点，所以$\rho(G) \geq \frac{n}{2}$.
- 又匹配数$\nu(G) \leq \frac{n}{2}$，所以:

$\nu(G) \leqslant \rho(G)$，　等号成立$\Leftrightarrow G$中存在完美匹配.







- RECALL:

$$\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ is an indepdent set of } G\}$$

$$\nu(G) = \max\{|M| : M \text{ is a matching } G\}$$

$$\beta(G) = \min\{|C| : C \text{ is a vertex cover of } G\}$$

$$\rho(G) = \min\{|L| : L \text{ is an edge cover of } G\}.$$

- König Theorem: For bipartite graph,

$$\nu(G) = \beta(G).$$

- Problem: For bipartite graph,

$$\alpha(G) = \rho(G)?$$



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）








独立集与点覆盖满足下列关系:

定理 5.2.1 (T. Gallai, 1959) 设 $S \subseteq V(G)$. 则 S 是 G 的独立集 $\Leftrightarrow V(G) \setminus S$ 是 G 的点覆盖.

证明 由定义, S是 G 的独立集 $\Leftrightarrow G$ 中每条边在S中至多有一个端点 $\Leftrightarrow G$ 的每条边至少有一端点在 $V \setminus S$ 中, $\Leftrightarrow V \setminus S$ 是 G 的点覆盖. ∎

推论 5.2.1.1 S 是 G 的极大独立集 $\Leftrightarrow V(G) \setminus S$ 是 G 的极小点覆盖. ∎

推论 5.2.1.2 [Gallai-Type equality] $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$.

证明 由推论5.2.1.1立得。 ∎



匹配与边覆盖之间也有类似于推论5.2.1.2的关系(称为Gallai型等式（Gallai-Type equality）).

定理 5.2.2 (T. Gallai, 1959) 设G是任意图，且$\delta(G)>0$. 则$\nu(G)+\rho(G)=n(G)$.

证明

- 设M是G的最大匹配，U是M非饱和点集，则$G[U]$是空图.
- 由于$\delta(G)>0$, 所以G中存在$|U|$条边的边集E'使得$U\subseteq V(E')$.
- 显然, $M\cup E'$是G的边覆盖, 因而

$$\rho\leqslant|M\cup E'|=\nu+(n-2\nu)=n-\nu.$$



即得, $\nu+\rho \leqslant n$.

- 另一方面, 设 L 是 G 的最小边覆盖.
- 令 $H=G[L]$, 则 $V(H)=V(G)$.
- 设 M 是 H 的最大匹配, U 为 H 中 M 非饱和点集.
- 则 $H[U]$ 是空图, 从而

$$|L|-|M|=|L\backslash M| \geqslant |U|=n-2|M|,$$

即, $|L|+|M| \geqslant n$.

- 又因为 H 是 G 的支撑子图, 所以 M 也是 G 的匹配.
- 故 $\nu+\rho \geqslant |M|+|L| \geqslant n$. ∎

下述结果在形式上与 König 定理极为相似.









定理 5.2.3[König 定理] 设 G 是 2 部图. 若 $\delta(G) > 0$, 则 $\alpha(G) = \rho(G)$.

证明

- 设 G 是 2 部图, 并且 $\delta(G) > 0$. 由推论 5.2.1.2 和定理 5.2.2 有 $\alpha + \beta = \nu + \rho$.
- 再由定理 5.1.3 推知 $\nu = \beta$.
- 于是, $\alpha = \rho$. ∎

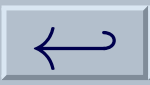
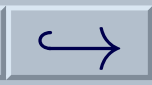
虽然独立集的概念类似于匹配的概念, 但却不存在与前节匹配理论相仿的独立集理论, 特别是目前还不知道求图最大独立集的有效算法. 这两个概念可以通过线图把它们联系起来, 并且不难证明 (习题 5.2.3):

$$\nu(G) = \alpha(L(G)),$$







其中 $L(G)$ 是 G 的线图.

下面的结果给出了独立集与连通度之间的关系.

定理 5.2.4 (J. A. Bondy, 1978) 设 G 是 $n(\geqslant 2)$ 阶简单无向图, 且对 G 中任何不相邻顶点 x 和 y, 均有 $d_G(x)+d_G(y)\geqslant n$ (Ore 条件), 则 $\alpha(G)\leqslant\kappa(G)$.

证明

- 由已知条件易证 G 是连通的.
- 若 G 为完全图 K_n,则 $\alpha(K_n)=1\leqslant n-1=\kappa(K_n)$, 结论成立.
- 下设 G 是非完全图. 用反证法.
- 设 $\alpha(G)\geqslant\kappa(G)+1$, 并设 I 和 S 分别是 G 中最大独立集和最小分离集.



- 则 $|I| = \alpha(G) = \alpha \geqslant 2,\ |S| = \kappa(G) = k.$
- 设 $G_1, G_2, \cdots, G_l$ 是 $G - S$ 的连通分支, $l \geqslant 2$.
- 因为

$$|N_G(x) \cup N_G(y)| \leqslant n - \alpha, \quad \forall\ x, y \in I. \qquad (4)$$

- 于是, 由假定和式 (4), 对 $x, y \in I$, 有

$$\begin{aligned} |N_G(x) \cap N_G(y)| = & \quad |N_G(x)| + |N_G(y)| - |N_G(x) \cup N_G(y)| \\ \geqslant & \quad n - (n - \alpha) = \alpha \geqslant \kappa + 1 > |S|. \end{aligned}$$

- 这表明在 $G - S$ 中仅有一个连通分支含 I 中点(否则, 若存在x和y属于不同连通分支, 则x和y至多有$|S| = \kappa$个公共邻点). 不妨设 $I \subseteq V(G_1) \cup S$.
- 因为 $\alpha \geqslant k + 1$, 所以存在 $x \in I \cap V(G_1)$.



- 令 $z \in V(G_2)$, 则

$$\begin{aligned} |N_G(x) \cup N_G(z)| &\leqslant n-2-|I \cap V(G_1)|+1 \\ &= n-\alpha+|I \cap S|-1. \end{aligned} \tag{5}$$

- 又因为 $N_G(x) \cap N_G(z) \subseteq S \setminus I$, 所以

$$|N_G(x) \cap N_G(z)| \leqslant \kappa - |I \cap S|. \tag{6}$$

- 于是由式 (5) 和 (6), 得

$$\begin{aligned} n \leqslant\ & d_G(x)+d_G(z) = |N_G(x) \cup N_G(z)| + |N_G(x) \cap N_G(z)| \\ \leqslant\ & (n-\alpha)+|I \cap S|-1+(\kappa-|I \cap S|) \\ =\ & n-\alpha+\kappa-1 \leqslant n-2, \end{aligned}$$

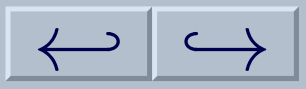
矛盾.

- 所以, $\alpha(G) \leqslant \kappa(G)$. ∎









推论 5.2.4 设 G 是 $v(\geqslant 2)$ 阶简单无向图, $\delta(G) \geqslant \frac{n}{2}$, 则 $\alpha(G) \leqslant \kappa(G)$. ∎

下面的结果给出了独立集, 连通度与 Hamilton 图之间的关系.

定理 5.2.5 (V. Chvátal & P. Erdős, 1972) 设 G 是 $n(\geqslant 3)$ 阶简单图. 若 $\kappa(G) \geqslant \alpha(G)$, 则 G 是 Hamilton 图.

证明

- 若 $\alpha(G) = 1$, 则 G 是 $n(\geqslant 3)$ 阶完全图, 因而是 Hamilton 图.
- 下设 $\alpha(G) \geqslant 2$.
- 由于 $\kappa(G) \geqslant \alpha(G) \geqslant 2$, 所以 G 含圈. 设 C 是 G 中最长圈.



- 若C 不含G 中所有顶点, 则$V(G)\setminus V(C)$ 非空.
- 令H 是$G-V(C)$ 的任何一个连通分支, 并令$\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$ 是C 中与H 相邻的顶点集.
- 由于$\kappa(G)\geqslant 2$, 所以$s\geqslant 2$.
- 由C 的最大性和H 的连通性知, $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 在C 上互不相邻.
- 因此, $|V(C)|>s$ 且 $\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$ 是G 的分离集. 所以$\kappa(G)\leqslant s$.
- 给圈C 一个确定的方向得有向圈$\mathbf{C}$. 令

$$Y=\{y_i:(x_i,y_i)\in E(\mathbf{C}),\ i=1,2,\cdots,s\}.$$

则由x_i 在C 上的不相邻性知, $|Y|=s\geqslant 2$.

- 断言: Y 是G 的一个独立集.



(反证) 若 Y 不是 G 的独立集, 则存在 $y_iy_j \in E(G)$. 令通过 H 中顶点连接 x_i 和 x_j 的 x_ix_j 路为 P_{ij}, 则

$$C - x_iy_i - x_jy_j + y_iy_j + P_{ij}$$

是 G 中一条比 C 更长的圈, 矛盾于 C 是 G 中最长圈的假设. 于是 Y 是 G 的独立集.

- 由于 y_i 与 x_i 相邻, 所以 y_i 不与 H 中任何顶点相邻.
- 任取 $y_0 \in V(H)$, 则 $S = \{y_0, y_1, y_2, \cdots, y_s\}$ 是 G 的独立集, 且

$$\alpha(G) \geqslant |S| = s + 1 \geqslant \kappa(G) + 1,$$

矛盾于假定.

- 所以 C 是含 G 中所有顶点的圈, 即 G 是 Hamilton 图. ∎



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）








作业

5.2.4 (a) 举例说明:

(i) 定理5.2.4中条件“$d_G(x)+d_G(y)\geqslant n$”不能改为“$d_G(x)+d_G(y)\geqslant n-1$”;

(ii) 推论5.2.4中条件“$\delta(G)\geqslant \frac{n}{2}$”不能改为“$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$”;

(iii) 定理5.2.5中的条件“$\kappa(G)\geqslant \alpha(G)$”不能改为“$\kappa(G)\geqslant \alpha(G)-1$”.

(b) 利用定理5.2.4证明推论5.2.4; 利用定理5.2.5证明定理1.7.2.

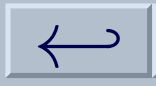
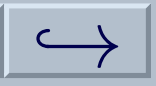
5.2.6 设G是$n(\geqslant 3)$阶简单无向图. 令$T=\{x\in V(G): d_G(x)=n-1\}$. 证明: 若$|T|\geqslant \alpha(G)$, 则$G$是Hamilton图.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





3 人员安排问题-完美匹配算法

- 某公司准备安排 n 个职员 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 从事 n 项工作 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 已知每个职员能胜任其中一项或几项工作. 试问: 能否给所有职员都安排一项他所胜任的工作? 这个问题称为人员安排问题 (personnel assignment problem).

- 构作 2 部划分为 $\{X, Y\}$ 的简单 2 部图 G, 其中 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$, 并且 $x_i y_j \in E(G) \Leftrightarrow$ 职员 x_i 胜任工作 y_j. 于是问题转化为判定给定的 2 部图 G 中是否有完美匹配问题.

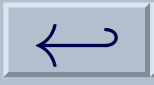
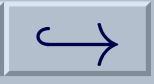
- 本节给出一个有效算法, 它是由匈牙利数学家 Egerváry (1931) 首先提出来的, 故通常称为**匈牙利算法**. 这里给出的是 Edmonds (1965) 的叙述, 它基于 Hall 定理 (5.1.1) 及下述概念和结果.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





- 设M 和M' 是$E(G)$ 的两个不交的非空真子集. (M,M') 交错路(alternating path) 是指其边在M 和M' 中交错出现的路.
- $(M,\overline{M})$ 交错路简称为M交错路, 其中$\overline{M}=E(G)\setminus M$.
- 设M 是G 的匹配, 两端点都是M 非饱和的M 交错路称为M增广路 (augmenting path).

引理5.3.1 设M 和M^* 是G 的两个不同的非空匹配, $H=M\Delta M^*$, 则H 的每个连通分支必是下列三种类型之一:

(i) 孤立点;

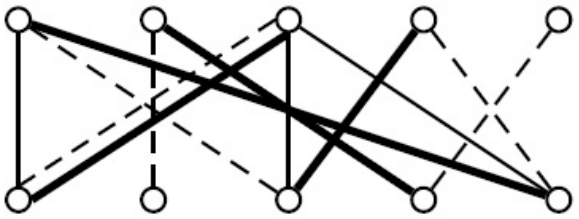
(ii) $(M,\ M^*)$ 交错偶圈;

(iii) $(M,\ M^*)$ 交错路.

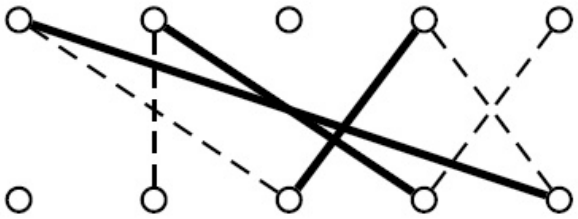


证明

- 由于H 中每个顶点至多与M 和M^* 中一条边关联, 所以$0 \leqslant \Delta(H) \leqslant 2$.
- 而且对H 中顶点x, 若$d_H(x) = 2 \Leftrightarrow x$ 既与M 中一条边关联, 又与M^* 中一条边关联(参见图 9).



(a)



(b)

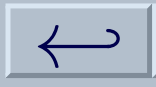
Figure 9: (a) G 的匹配M(粗边)和M^*(虚边) (b) $H = M\Delta M'$



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）







全 屏

搜 索

关 闭

- 设 P 是 H 中任意一个连通分支.
- 若 P 是一个孤立点, 则 (i) 成立. 下设 $1 \leqslant \Delta(P) \leqslant 2$.
- 若 P 中顶点全是 2 度点, 则由上述说明知 P 中每个顶点既与 M 中一条边关联, 又要与 M^* 中一条边关联, 所以 P 是一条 (M, M^*) 交错偶圈, 故 (ii) 成立.
- 若 P 中含 1 度点,设为 x. 则由推论 1.3.2 知 P 中必含另一个 1 度点, 设为 y. 由于 $\Delta(P) \leqslant 2$, 所以 P 是一条以 x 和 y 为端点的路, P 中内部点(若存在的话) 都是 2 度点. 因而 P 是 (M, M^*) 交错路, (iii)成立. ∎

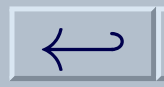
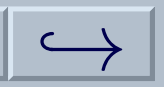
定理 5.3.1 (C. Berge, 1957) 设 M 是 G 的匹配. 则 M 是最大匹配 $\Leftrightarrow$ G 中不含 M 增广路.

证明 ($\Rightarrow$) (反证法)







- 设M是G的最大匹配, 并设$P = x_0e_1x_1\ e_2\cdots e_mx_m$是$G$中$M$增广路.
- 则m为奇数, 并且$e_1, e_3, \cdots, e_m \notin M$, 而$e_2, e_4, \cdots, e_{m-1} \in M$.
- 令

$$M' = M\Delta E(P) = (M \setminus \{e_2, e_4, \cdots e_{m-1}\}) \cup \{e_1, e_3, \cdots, e_m\}.$$

- 则M'是G的匹配, 并且$|M'| = |M| + 1$. 矛盾于M的最大性.

($\Leftarrow$) (反证法)

- 假设M不是G的最大匹配, M^*是G的最大匹配, 则$|M^*| > |M|$.
- 令$H = M\Delta M^*$.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）

- 由引理5.3.1知H的每个连通分支或是孤立点，或是(M,M^*)交错路或是(M,M^*)交错偶圈.
- 由于$|M^*|>|M|$，所以$|E(H)\cap M^*|>|E(H)\cap M|$. 因而$H$必有一个连通分支$P$，它是一条开始于$M^*$中边并且终止于$M^*$中边的$(M^*,M)$交错路.
- 于是P是M增广路(参见图9). 矛盾于假定. ∎

定理5.3.2 设M是2部划分为$\{X,Y\}$的2部图G的匹配，$x\in X$是M非饱和点，Z是G中由起点为x的M交错路所能连接的顶点集，$S=Z\cap X$，$T=Z\cap Y$，则

(a) $T\subseteq N_G(S)$；

(b) 下述三条等价:

(i) G中不存在以x为端点的M增广路;

(ii) x是Z中唯一的M非饱和点;



(iii) $T = N_G(S)$ 且 $|T| = |S| - 1$.

证明 (a) 任取 $y \in T$, 则 G 中存在以 x 和 y 为端点的 M 交错路 P. 令 $z \in N_P(y)$. 由于 G 是 2 部图且 $y \in T \subseteq Y$, 所以 $z \in Z \cap X = S$, 即 $y \in N_G(S)$. 因而有 $T \subseteq N_G(S)$.

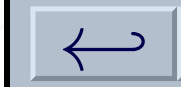
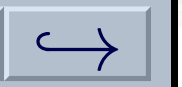
(b)

- (i) $\Rightarrow$ (ii) (反证法) 设 y 是 Z 中异于 x 的 M 非饱和点, 则 G 中存在以 x 和 y 为端点的 M 交错路 P. P 是 G 中以 x 为端点的 M 增广路, 与 (i) 的假定矛盾. 所以 (ii) 成立.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii) (反证) 由(a), $T \subseteq N_G(S)$. 假设存在 $y \in N_G(S)$ 且 $y \notin T$, 于是存在 $u \in S = Z \cap X$ 和 $e \in E(G)$ 使 $e = uy$.
- 若 $u = x$, 则显然有 $y \in T$, 矛盾.







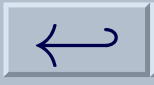
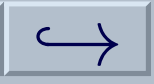
- 故 $u \neq x$. 于是, G 中存在以 x 和 u 为端点的 M 交错路 P.
- 由于 x 是 Z 中唯一 M 非饱和点, 所以 u 为 M 饱和点, 则 $e \notin M$.
- 若 P 含 y, 因为 M 交错路的子路任然是交错路, 由 Z 的定义知, $y \in T$, 矛盾!
- 故 P 不含 y.
- 则 $P+e$ 是连接 x 和 y 的交错路。由 Z 的定义知, $y \in Z \cap Y = T$, 矛盾.
- 所以 $T = N_G(S)$.
- 下证 $|T| = |S| - 1$.
- 由于 x 是 Z 中唯一的 M 非饱和点, 所以 T 中点全是 M 饱和点.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





- 又由于X 中通过M 与T 中点配对的点全在S 中，且$T = N_G(S)$，所以$S \setminus \{x\}$ 中点与T 中点由M 配对. 故有$|T| = |S| - 1$.

- (iii) $\Rightarrow$ (i) 反证：假设G中存在以x为起点的M增广路P,其另一端点记为y,则$y \in T$ 且y为M非饱和点.

- 断言: $S \setminus \{x\}$ 中每一点都是M饱和点。

  任取$z \in S \setminus \{x\}$. 设P 是G 中以x 和z 为端点的M交错路.

  由于G 是2 部图，并且$x, z \in X$，所以P 的长为偶数.

  又由于x 是M 非饱和点，所以z 是M 饱和点.

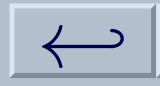
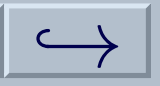
  由$z \in S \setminus \{x\}$ 的任意性知，$S \setminus \{x\}$ 中点全是M 饱和点，它们与$N_G(S)$ 中点由M 配成对.

- 由于$N_G(S) = T$ 且$|T| = |S| - 1$，所以T 中点全是M饱和点，和$y \in T$ 矛盾. ∎







定理 5.3.3 非空 2 部图必有饱和所有最大度点的最大匹配.

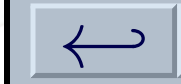
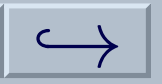
证明

- 设 G 是 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的 2 部图, 并设 M 是 G 中最大匹配并尽可能多地饱和最大度点.
- (反证法) 设存在最大度点 x 是 M 非饱和的.
- 令 Z 是 G 中以 x 为起点的 M 交错路所能连通的顶点集. 不妨设 $x \in X$, 并令 $S = Z \cap X$, $T = Z \cap Y$.
- 由于 M 是 G 中最大匹配, 所以由定理 5.3.1 知 G 中不存在以 x 为起点的 M 增广路.
- 再由定理 5.3.2 知 $|T| = |S| - 1$, 且 $N_G(S) = T$.







- 若 S 中点全是最大度点, 则

$$\Delta|S| = \sum_{u\in S} d_G(u) = |E(S,T)| = \sum_{u\in T} d_G(u) \leqslant \Delta|T|,$$

即有 $|S| \leqslant |T| = |S| - 1$, 矛盾.

- 于是, S 中存在非最大度点, 设为 z, 则 $z \neq x$.

- 令 $P = xe_1x_1e_2\cdots e_{m-1}x_{m-1}e_mz$ 是 G 中 M 交错路, 其中, $e_1, e_3, \cdots, e_{m-1} \notin M$, 而 $e_2, e_4, \cdots, e_m \in M$, 则 z 是 M 饱和点.

- 由于 $x, z \in X$, 所以 m 为偶数. 于是, 令

$$M' = M\Delta E(P) = (M \setminus \{e_2, e_4, \cdots, e_m\}) \cup \{e_1, e_3, \cdots, e_{m-1}\}.$$

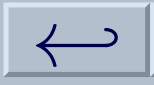
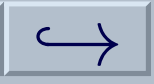
则 $|M'| = |M|$, 即 M' 是 G 中最大匹配. 但 M' 饱和最大度点的数目比 M 饱和最大度点的数目至少多 1 个 (即 x), 矛盾于 M 的选取. ∎



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





推论 5.3.3 (König, 1916) 任何2 部图 G 的边集 $E(G)$ 可以划分成 $\Delta(G)$ 个边不交匹配. ∎

匈牙利算法

匈牙利算法的基本思想是: 从 G 的任何匹配 M 开始. 若 M 饱和 X, 则 M 是 G 的完美匹配. 若 M 不能饱和 X, 则在 X 中选择一个 M 非饱和点 x. 若 G 中存在以 x 为起点的 M 增广路 P, 则由定理5.3.1 知 M 不是 G 的最大匹配, 而且 $\hat{M} = M\Delta E(P)$ 是比 M 更大的匹配, 因而饱和 X 中更多的点. 然后用 $\hat{M}$ 替代 M 并重复上述程序. 若 G 中不存在以 x 为起点的 M 增广路, 则令 Z 是根在 x 的 M 交错子图的顶点集, 并令 $S = Z \cap X, T = Z \cap Y$. 则由定理5.3.2 知 x 是 Z 中唯一的 M 非饱和点, 而且

$$N_G(S) = T, \qquad |N_G(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|.$$

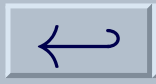
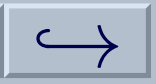
由 Hall 定理 (5.1.1) 知 G 没有完美匹配.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





匈牙利算法:

1 任取 G 的匹配 M. 若 M 饱和 X, 则停止. 若 M 不能饱和 X, 则取 X 的 M 非饱和点 x. 令 $S=\{x\}$, $T=\emptyset$.

2 (2.1) 若 $N(S)=T$, 则停止,此时 G 中无完美匹配.

(2.2) 若 $N(S)\neq T$, 则取 $y\in N(S)\setminus T$.

3 (3.1) 若 y 是 M 饱和的, 则存在 $z\in X\setminus S$ 使 $yz\in M$. 用 $S\cup\{z\}$ 替代 S, $T\cup\{y\}$ 替代 T, 并转入第 2 步.

(3.2) 若 y 是 M 非饱和的, 则 G 中存在以 x 为起点且以 y 为终点的 M 增广路 P. 用 $\hat{M}=M\Delta E(P)$ 替代 M 并转入第 1 步.



匈牙利算法的复杂度是$O(ne^2)$ (习题5.3.3), 因而是有效的. 把匈牙利算法中的程序稍加修改就可以获得求2部图的最大匹配算法(习题5.3.4).

作业

5.3.3 设G是2部图且整数$p \geqslant \Delta$, 则G中存在p个不交匹配$M_1, M_2, \ldots, M_p$使得$E(G) = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_p$, 并且有

$$\left\lfloor \frac{e(G)}{p} \right\rfloor \leq |M_i| \leq \left\lceil \frac{e(G)}{p} \right\rceil \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

5.3.4 (a) 证明匈牙利算法是$O(ne^2)$算法.

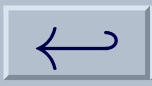
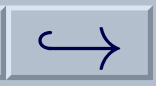
(b) 叙述怎样用匈牙利算法求2部图的最大匹配.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





4 最优安排问题-最大权匹配算法

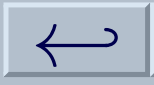
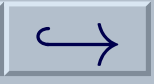
自学。



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大...
货郎担问题（TSP）





5 货郎担问题（TSP）

- 一个货郎担着商品去他所在的区域内所有村镇进行推销. 他应怎样选择一条总路程最短的行走路线使每个村镇恰好去一次或者至少去一次, 然后回到出发点? 这个问题称为货郎担问题 (traveling salesman problem).
- 这个问题与中国投递员问题 (4.6 节) 颇为相似, 但其求解却与中国投递员问题相反. 目前还没有一个有效算法. 现已证明它是属于一类 NPC 问题.
- 经过 G 中每个顶点至少一次的闭链称为货郎链 (salesman route).
- 用图论语言, 说得更广义些, 货郎担问题就是在给定的连通加权无向图 $(G, \mathbf{w})$ 中 (其中 $\mathbf{w}$ 可以是距离函数, 也可以是其他函数, 如费用函数等) 找出一条权最小的 Hamilton 圈或者找出一条最小权



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）

货郎链. 前者称为最优圈 (optimal cycle), 后者称为最优链 (optimal route).

- 一般说来, 货郎担问题这两种定义, 会产生不同的解. 例如, 图 10 (a) 所示的加权图 $(G, \mathbf{w})$ 中有权为 5 的最优圈 (x, y, z, x), 也有权为 4 的最优链 (x, y, x, z, x). 明智的货郎当然会放弃前者而选择后者.

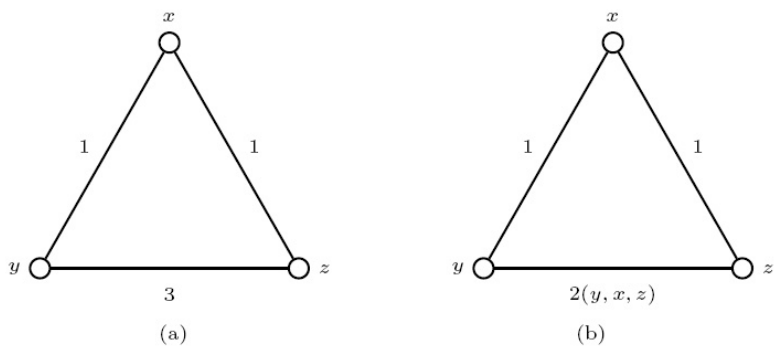


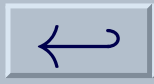
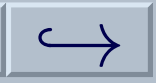
Figure 10: (a) 最优圈 (b) 最优链



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





- 一般的连通加权图中，并不一定存在最优圈. 然而最优链总是存在的.
- 故在本节的讨论中，我们采用货郎担问题的第二种定义，即在给定的连通加权图 $(G,\mathbf{w})$ 中找出一条最优链.
- 设 $(G,\mathbf{w})$ 是连通加权图. 若对 G 的任何两个不同顶点 x 和 y 均有

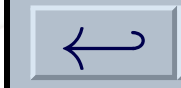
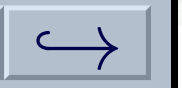
$$\mathbf{w}(x,y) \leqslant \mathbf{w}(x,z)+\mathbf{w}(z,y),\ \forall\, z \in V(G)\setminus\{x,y\},$$

其中 $\mathbf{w}(x,y)$ 为 x 和 y 之间的(加权)距离，则称 $(G,\mathbf{w})$ 满足三角不等式(triangle inequality).
- 值得注意的是，若 $\mathbf{w}$ 是距离函数，则在实际问题中的加权图 $(G,\mathbf{w})$ 几乎都满足三角不等式. 这是因







为在现实中，某两地之间已有一条经过第三地的最短路P，人们一般不会再去修一条比P更长的路. 但若$\mathbf{w}$是其他函数，例如费用函数，则$(G,\mathbf{w})$不一定满足三角不等式. 例如图10(a)所示的加权图不满足三角不等式.

- 对于连通加权图$(G,\mathbf{w})$，构造加权完全图$(K_n,\mathbf{w}')$，其中$V(K_n)=V(G)$，K_n中边xy的权$\mathbf{w}'(xy)$定义为G中x和y的(加权)距离$\mathbf{w}(x,y)$.

- $(K_n,\mathbf{w}')$满足三角不等式，且K_n中边xy或者对应G中边xy使$\mathbf{w}'(xy)=\mathbf{w}(xy)$或者对应$G$中$xy$路$P$使$\mathbf{w}'(xy)=\mathbf{w}(P)$.

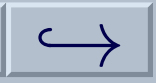
- 例如，图10(b)所示的$(K_3,\mathbf{w}')$就是由(a)所示的加权图$(G,\mathbf{w})$构造出来的，其中$yz\in E(K_3)$对应G中路$P=(y,x,z)$，$\mathbf{w}'(yz)=\mathbf{w}(P)=2$. 因此，$(G,\mathbf{w})$中最优链$(x,y,x,z,x)$对应$(K_3,\mathbf{w}')$中最优圈$(x,y,z,x)$且权都为4. 反之亦然.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





一般地, 有下列结果.

引理 5.5.1 (i) 对于 $(K_n, \mathbf{w}')$ 中任何 Hamilton 圈C, $(G, \mathbf{w})$ 中存在货郎链 R 使得 $\mathbf{w}(R) = \mathbf{w}'(C)$;

(ii) 对于 $(G, \mathbf{w})$ 中最优链 R, $(K_n, \mathbf{w}')$ 中存在 Hamilton 圈 C 使得 $\mathbf{w}(R) = \mathbf{w}'(C)$.

证明 (i) $(G, \mathbf{w})$ 货郎链 R 能被构造如下: 对于 $xy \in E(C)$, 如果 $xy \in E(G)$, 那么 $\mathbf{w}(xy) = \mathbf{w}'(xy)$, 并且令$xy \in R$; 如果 $xy \notin E(G)$, 那么 G 包含 xy 路 P 使得 $\mathbf{w}(P) = \mathbf{w}'(xy)$. 于是, 令 $P \subseteq R$.

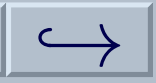
(ii) K_n 中 Hamilton 圈能被构造如下: 从顶点 x 开始, 沿着 R 依次删去已经访问过的顶点. 剩下的顶点按 R 中原来的顺序就得到 $(K_n, \mathbf{w}')$ 中 Hamilton 圈 C 满足 $\mathbf{w}'(C) = \mathbf{w}(R)$. ∎



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





定理 5.5.1 连通加权图 $(G,\mathbf{w})$ 中最优链对应 $(K_n,\mathbf{w}')$ 中最优圈且权相等. 反之, $(K_n,\mathbf{w}')$ 中最优圈对应 $(G,\mathbf{w})$ 中最优链且权相等.

证明

- 假定 R 是 $(G,\mathbf{w})$ 中最优链. 由引理 5.5.1 (ii), $(K_n,\mathbf{w}')$ 中存在 Hamilton 圈 C 使得 $\mathbf{w}'(C)=\mathbf{w}(R)$.
- 如果 C 不是最优的, 而 C^* 是 $(K_n,\mathbf{w}')$ 中最优圈, 那么, $\mathbf{w}'(C^*)<\mathbf{w}'(C)$.
- 由引理 5.5.1 (i), $(G,\mathbf{w})$ 中存在货郎链 R' 使得 $\mathbf{w}(R')=\mathbf{w}'(C^*)$.
- 于是,

$$\mathbf{w}(R)\leqslant\mathbf{w}(R')=\mathbf{w}'(C^*)<\mathbf{w}'(C)=\mathbf{w}(R).$$

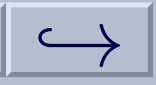
这个矛盾意味着 C 是 $(K_n,\mathbf{w}')$ 中最优圈.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





- 反之，假定C是$(K_n, \mathbf{w}')$中最优圈. 那么由引理5.5.1(i)，$(G, \mathbf{w})$中存在货郎链R使得$\mathbf{w}(R) = \mathbf{w}'(C)$.
- 如果R不是最优的，而R'是$(G, \mathbf{w})$中最优链，那么由引理5.5.1 (ii)，$(K_n, \mathbf{w}')$中存在Hamilton圈C'使得$\mathbf{w}'(C') = \mathbf{w}(R')$.
- 于是，

$$\mathbf{w}'(C') = \mathbf{w}(R') < \mathbf{w}(R) = \mathbf{w}'(C) \leqslant \mathbf{w}'(C').$$

这个矛盾说明R是$(G, \mathbf{w})$中最优链. ∎

定理5.5.1告诉我们:

- 求一般加权图$(G, \mathbf{w})$中最优链可以归结为求满足三角不等式的加权图$(K_n, \mathbf{w}')$中最优圈.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）

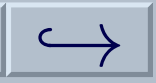
- 若$(G,\mathbf{w})$满足三角不等式, 则G是K_n的支撑子图, $\mathbf{w}=\mathbf{w}'|E(G)$.
- 因此, 若$(G,\mathbf{w})$满足三角不等式且有最优圈C, 则C必是$(K_n,\mathbf{w}')$中 Hamilton 圈, 且$\mathbf{w}(C)\geqslant \mathbf{w}'(C)=\mathbf{w}(C'')$, 其中$C''$是$(G,\mathbf{w})$中最优链.
- 反之, 设C'是$(K_n,\mathbf{w}')$中最优圈.
- 若$C'\subseteq G$, 则C'也是$(G,\mathbf{w})$中最优圈;
- 若$C'\not\subseteq G$, 则与之对应的C''是$(G,\mathbf{w})$中最优链, 而且$\mathbf{w}(C'')=\mathbf{w}'(C')$.
- 因此,当$(G,\mathbf{w})$满足三角不等式, 则与$(K_n,\mathbf{w}')$中最优圈对应的可能是$(G,\mathbf{w})$中最优链, 也可能是$(G,\mathbf{w})$中最优圈.
- 但是, 当$(G,\mathbf{w})$不满足三角不等式, 则与$(K_n,\mathbf{w}')$中最优圈对应的是$(G,\mathbf{w})$中最优链.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





- 由定理5.5.1, 只需讨论求满足三角不等式加权完全图 $(K_n, \mathbf{w})$ 中最优圈.
- 一个很自然的方法是枚举 K_n 中所有 Hamilton 圈, 然后比较它们的权, 权最小的圈即为所求.
- 但 K_n 有 $\frac{1}{2}(n-1)!$ 个不同的 Hamilton 圈. 当 n 较大时, 它会带来人们难以接受的计算量.
- 事实上, 现已被证明, 货郎担问题属于一类 NPC 问题. 因此, 希望有一个有效算法以获得比较好的近似解. 这种算法称为近似算法 (approximation algorithm).
- 设 L_0 是由近似算法获得 Hamilton 圈的权值, 而 L 是最优圈的权值. 比值 L_0/L 称为该近似算法的性能比 (performance ratio). 显然,

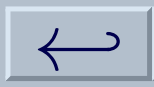
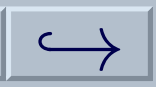
$$1 \leqslant \frac{L_0}{L} \leqslant \alpha.$$



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





- 人们希望获得一个近似算法使α为尽可能接近于1的常数. 一个近似算法称为α近似算法, 如果它的性能比不超过常数α.

下面介绍一个解货郎担问题的$\frac{3}{2}$近似算法, 它属于N. Christofides (1976).

Christofides 近似算法:

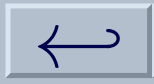
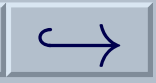
1. 求$(G, \mathbf{w})$的加权距离矩阵$\mathbf{w}'$, 并构造$(K_n, \mathbf{w}')$.
2. 求$(K_n, \mathbf{w}')$中最小树T.
3. 找出T中奇度点集V'并求出$G' = K_n[V']$中最小权完美匹配M.
4. 在$G^* = T \oplus M$中求Euler回$C_0 = (x, y, z, \cdots, x)$.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）





5. 从x开始，沿C_0依次删去C_0中重复出现的顶点(最后一个x除外)后，剩余的顶点(不改变它们在C_0中的顺序)形成K_n中Hamilton圈C，C即为所求的近似最优圈.

因为上述算法每一步都有有效算法，所以Christofides算法是有效算法.

定理5.5.2 对于满足三角不等式的$(K_n, \mathbf{w})$，Christofides近似算法的性能比小于$\frac{3}{2}$.

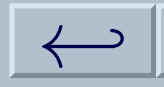
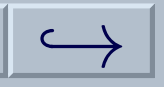
证明

- 设$(K_n, \mathbf{w})$满足三角不等式，C_0和C是由Christofides算法求出的Euler回和Hamilton圈，







则

$$\mathbf{w}(C) \leqslant \mathbf{w}(C_0) = \mathbf{w}(T) + \mathbf{w}(M), \tag{7}$$

其中, T 是 $(K_n, \mathbf{w})$ 中最小树, M 是 $G' = K_n[V']$ 中最小权完美匹配, V' 是 T 中奇度点集.

- 设 C^* 是 $(K_n, \mathbf{w})$ 中最优圈, 则从 C^* 中删去任何一条边得到支撑树 T'. 于是

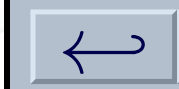
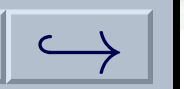
$$\mathbf{w}(T) \leqslant \mathbf{w}(T') < \mathbf{w}(C^*) \tag{8}$$

- 令 C' 为 $G' = K_n[V']$ 中按 C^* 的顺序形成的 Hamilton 圈.
- 由于 $(K_n, \mathbf{w})$ 满足三角不等式, 所以 $\mathbf{w}(C') \leqslant \mathbf{w}(C^*)$.
- 又由于 C' 是偶圈, 因而 C' 可分解为两个边不交的完美匹配 M_1 和 M_2 之并. 不妨设 $\mathbf{w}(M_1) \leqslant \mathbf{w}(M_2)$.







- 于是, M_1 是 G' 的完美匹配, 并且

$$\mathbf{w}(M) \leqslant \mathbf{w}(M_1) \leqslant \frac{1}{2}\mathbf{w}(C') \leqslant \frac{1}{2}\mathbf{w}(C^*). \qquad (9)$$

- 由式 (7), (8) 和式 (9) 有,

$$\mathbf{w}(C) < \mathbf{w}(C^*) + \frac{1}{2}\mathbf{w}(C^*) = \frac{3}{2}\mathbf{w}(C^*).$$

因此,

$$\frac{L_0}{L} = \frac{\mathbf{w}(C)}{\mathbf{w}(C^*)} < \frac{3}{2}.$$

定理得证. ∎

注: 目前还没有发现比 Christofides 算法更接近于最优圈的有效近似算法. 而且, S. Sahni & T. Gonzalez (1976) 已证明: 除非 $NPC = P$, 否则不可能存在性能比为常数的有效近似算法来求解不满足三角不等式的加权图 $(K_n, \mathbf{w})$ 中最优圈问题.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）

作业

5.5.4 设 $(K_n, \mathbf{w})$ 是满足三角不等式的加权图. 证明: 若 C 是 $(K_n, \mathbf{w})$ 中最优圈, 而 T 是 $(K_n, \mathbf{w})$ 中最优树, 则 $\mathbf{w}(C) \leqslant 2\mathbf{w}(T)$.



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）








谢谢大家!



Title Page
匹配
独立集
人员安排问题-完美匹...
最优安排问题-最大权...
货郎担问题（TSP）



